

# Electromagnetismo - Estática

	Electricidad		Magnetismo					
<b>Elemento Fuente</b>	$dQ' = \begin{cases} \lambda(\vec{r}') dl' & \lambda \text{ densidad lineal de carga [C/m]} \\ \sigma(\vec{r}') dS' & \sigma \text{ densidad superficial de carga [C/m}^2] \\ \rho(\vec{r}') dV' & \rho \text{ densidad volumétrica de carga [C/m}^3] \end{cases}$		$q' \vec{v} = \begin{cases} I d\vec{l}, \vec{I} = \lambda \vec{v} \\ \vec{g} dA, \vec{g} = \sigma \vec{v} \\ \vec{J} dV, \vec{J} = \rho \vec{v} \end{cases}$	$I$ : cantidad de carga que pasa por unidad de tiempo = $dQ/dt$ [C/seg=Ampere] $\vec{g}$ : densidad superf. de corriente [A/m] $\vec{J}$ : densidad volumétrica [C/m <sup>3</sup> *m/s=A/m <sup>2</sup> ]				
<b>Campo</b>	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ ^3}$	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ'(\vec{r}-\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ ^3}$ [N/C=V/m]	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(q\vec{v}) \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ ^3}$	[T (Tesla)=N/(C m/s)=N/A m] 1 Gauss= 10 <sup>-4</sup> T				
<b>Campo en Distrib. continuas</b>	$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') d\vec{l}' \cdot \vec{R}}{R^3}$ $\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS' \cdot \vec{R}}{R^3}$	$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV' \cdot \vec{R}}{R^3}$ $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$\vec{B}(\vec{r}) = k_m \int_C \frac{(i d\vec{l}') \times \vec{R}}{R^3}$ $\vec{B}(\vec{r}) = k_m \int_S \frac{(\vec{g} dS') \times \vec{R}}{R^3}$	$\vec{B}(\vec{r}) = k_m \int_V \frac{(\vec{J} dV') \times \vec{R}}{R^3}$ $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$				
	$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', R = \ \vec{R}\ $		$\vec{r}$ : vector donde evaluó el campo $\vec{r}'$ : vector de fuente de campo, sobre el cual integro					
<b>Leyes (estática)</b>	<b>Gauss</b>	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$	<b>Forma Diferencial</b>	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	<b>Ampere</b>	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$	<b>Forma Diferencial</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
	$\vec{E}$ conservativo	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$		$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\nexists$ monopolo	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$		$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
<b>Potencial</b>	$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\Delta W}{Q}$	$V(\vec{r}) = k_e \int \frac{dQ'}{r}$	$\vec{E} = -\nabla V$	$\vec{A}(\vec{r}) = k_m \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{R}$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	Potencial vectorial con gauge de Coulomb		
	Trabajo = Fuerza x Dist. Potencial = Trabajo /Carga = Campo x Dist.							
<b>Fuerza</b>	$\vec{F} = Q\vec{E} = -Q\nabla V(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$			$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$				
<b>Poisson</b>	$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$			$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ ( $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$ )				

## Expansión Multipolar y Momentos

	Electricidad		Magnetismo	
<b>Expansión Multipolar</b>	<i>Expansión del potencial V</i> $V(\vec{r}) \approx k_e \left[ \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{Q} \vec{r}}{2r^5} + \dots \right]$	<i>Campo <math>\vec{E}</math> del dipolo</i> $\vec{E}(\vec{r}) \approx k_e \left( -\frac{\vec{p}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right)$	<i>Expansión del potencial <math>\vec{A}</math></i> $\vec{A}(\vec{r}) \approx k_m \left[ \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \right]$	<i>Campo <math>\vec{B}</math> del dipolo</i> $\vec{B}(\vec{r}) = k_m \left( -\frac{\vec{m}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right)$
<b>Momentos</b>	<b>Monopolo</b> $Q$ : carga total <b>Dipolo</b> $\vec{p} = q\vec{d}$ (dir de $\ominus \rightarrow \oplus$ ) $\vec{p} = \iiint_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$ [C m <sup>2</sup> ] <b>Cuadrup.</b> $\vec{Q}/Q_{i,j} = \iiint_V \rho(\vec{r}') (3x_i x_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'$ [C m <sup>2</sup> ] $x_{ij} = x, y \text{ o } z. \delta_{ij}$ : delta de Kronecker.		<b>Monopolo</b> No existe monopolo magnético $\vec{m} = I S \hat{n} = I \vec{S}$ $\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{r}' \times d\vec{l}'$ $d\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r}' \times \vec{J} dv$ <b>Dipolo</b> $S$ : Área del dipolo. $\hat{n}$ Normal a la corriente con mano derecha. $\vec{m}$ en [A m <sup>2</sup> ]	
<b>Fuerzas Dip</b>	$F_{E\text{ fijo}} = 0$ $F_{E\text{ var}} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$ $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$		$F_{B\text{ fijo}} = 0$ $F_{B\text{ var}} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$ $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$	

## Electromagnetismo en Medios Materiales

	Electricidad		Magnetismo	
<b>Campos</b>	Desplazamiento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$		Intensidad Magnética $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{M}$	
<b>Leyes en Medios</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$ o $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{Lenc}$ Ley de Gauss en medios eléct., rotor $\neq 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_L + \vec{J}_M)$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_L$ o $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_L \cdot d\vec{S}$ Ley de Ampere en medios magnéticos, pero $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \rho_M$ (divergencia $\neq 0$ )
			Si $\vec{J}_M = 0$ , Ampere en $\vec{B}$	Si $\rho_M = 0$ , Ampere en $\vec{H}$
<b>Fuentes</b>	$\vec{E}$ : $\rho_L, \sigma_L, \rho_P, \sigma_P$	$\vec{D}$ : $\rho_L, \sigma_L, \vec{\nabla} \times \vec{P}, \vec{P} \times \hat{n}$	$\vec{B}$ : $\vec{J}_L, \vec{g}_L, \vec{J}_M, \vec{g}_M$	$\vec{H}$ : $\vec{J}_L, \vec{g}_L, \rho_M, \sigma_M$ $\vec{M}$ : $\vec{J}_M, \vec{g}_M, -\rho_M, -\sigma_M$
	$\vec{P}$ : $\rho_P, \sigma_P, \vec{\nabla} \times \vec{D}, \vec{D} \times \hat{n}$		$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ $\vec{g}_M = \vec{M} \times \hat{n}$	<b>Densidades volumétrica (<math>\vec{J}_M</math>) y superficial (<math>\vec{g}_M</math>) de corriente de magnetización.</b> $\vec{J}_L$ y $\vec{g}_L$ densidades de corriente libres. $\hat{n}$ separa los medios.
	$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$	<b>Densidades volumétrica (<math>\rho_P</math>) y superficial (<math>\sigma_P</math>) de carga de polarización.</b> $\rho_L$ y $\sigma_L$ dens. de cargas libres. $\hat{n}$ separa medios.	$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$	<b>Densidades volumétrica (<math>\rho_M</math>) y superficial (<math>\sigma_M</math>) de carga magnética.</b> Funcionan como cargas magnéticas, en pares ( $\sigma_M$ polos Norte y Sur). $\hat{n}$ separa los medios.
<b>Teoría Macroscópica</b>	$\vec{P} = \Delta \vec{p} / \Delta v$ es la <b>polarización</b> del medio (momento dipolar por unidad de volumen)		$\vec{M} = \Delta \vec{m} / \Delta v$ es la <b>magnetización</b> del medio (momento magnético por unidad de volumen)	
	$\langle V(\vec{r}) \rangle = k_e \left[ \iiint_V \frac{\rho_P(\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ } dV' + \oiint_S \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ } dA' \right]$		$\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle = k_m \left[ \iiint_V \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ } dV' + \oiint_S \frac{\vec{g}_M(\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ } dA' \right]$	
	Potencial eléctrico		Potencial magnético vectorial	
			$V_M(\vec{r}) = k_m \left[ \iiint_V \frac{\rho_M(\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ } dV' + \oiint_S \frac{\sigma_M(\vec{r}')}{\ \vec{r}-\vec{r}'\ } dA' \right]$	
			Potencial magnético escalar	
<b>En Medios LIH</b>	$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ $\chi_e = \epsilon - \epsilon_0$ $k_e = 1 + \chi_e$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\epsilon = k_e \epsilon_0$ $k_e = 1 + \chi_e$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ $\chi_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$ $k_m = 1 + \chi_m$	$\vec{H} = \vec{B} / \mu$ $\mu = k_m \mu_0$ $k_m = 1 + \chi_m$
	$\mu$ : Permeabilidad magnética $\chi_m$ : Suceptibilidad mag.. <b>Diamagnéticos</b> <0, <b>Paramagnéticos</b> >0, <b>Ferromagnéticos</b> >>0 $k_m$ : Permeabilidad relativa.			
<b>C. Cont.</b>	$\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$	$\vec{D}_1 \perp \vec{D}_2$	$\vec{B}_1 \perp \vec{B}_2$	$\vec{H}_1 \parallel \vec{H}_2$

## Conductores Ideales

Toda la carga en las superficies. En interior:  $\vec{E} = \vec{D} = \vec{P} = 0$  o  $V = \text{cte}$ .  $\vec{E} \perp$  superficie del conductor, con valor  $\sigma/\epsilon_0$

## Corrientes

$I = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$ . Por conservación de cargas, corriente ingresando en superficie cerrada S:  $I = -\oiint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV$ . Normal hacia

afuera de S, I positivo si entra carga en S.  $I = \frac{dQ}{dq} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r}') dV \Rightarrow \iiint_V (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}) dV = 0 \Rightarrow$

**Ecuación de Continuidad:**  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$  **Ley de Ohm Microscópica:**  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ .  $\sigma$ : conductibilidad (en  $[\Omega^{-1} m]$ ),  $\rho = 1/\sigma$  resistividad.

En un cable recto, la diferencia de potencial es  $\Delta V = -\int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = El$ . Pero  $I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = JS = \sigma ES \Rightarrow I = JS/l \Delta V$ . Llamo  $JS/l = R$  la **resistencia** del cable, y queda:  $\Delta V = RI$  **Ley de Ohm Macroscópica.** R en  $[V/A = Ohm (\Omega)]$

## Inducción


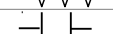





**Ley de Faraday:**  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ .  $\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  **Flujo Magnético:**  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$  (unidades: Weber,  $[1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2]$ ).

**Ley de Lenz:** La dirección de la corriente inducida produce un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético que genera esa corriente (1-Defino  $\hat{n}$  para la superficie. 2-Veo signo de  $\Phi$ . 3-Veo signo de  $d\Phi/dt$ , si  $>0$ ,  $\varepsilon < 0$  y viceversa. 4-Dirección de la corriente para  $\varepsilon > 0$  con regla mano derecha pulgar apuntando en  $\hat{n}$ , al revés para  $\varepsilon < 0$ ).  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

**Autoinductancia.**  $L = \frac{d\Phi}{dI}$ , queda  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$  para un circuito fijo

**Inductancia Mutua.**  $\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$   $M_{12} = \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial I_2}$   $\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$   $\Phi_{12} = \iint_1 \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$ .  $\Phi_{12}$  es el flujo del campo magnético del objeto 2 sobre el área del objeto 1.  $\varepsilon_{12}$  es la emf asociada al cambio de este flujo con el tiempo.  $M_{12} = M_{21} = M$ .  $\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$ .  $\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$

## Circuitos

Elemento	Voltaje	React. ( $\Omega$ )	Imped. ( $\Omega$ )	Amplit. I	Fase $\phi$	t=0	t= $\infty$	Complejos
	Resistencia $V=IR$	$R$	$\bar{Z}_R=R$	$I_{R0}=V_0/R$	I en fase con V: $V \rightarrow, I \rightarrow$			$\bar{Z} = a + bi =  \bar{Z}  e^{i\phi}$
	Capacitor $V=Q/C$	$X_C=1/\omega C$	$\bar{Z}_C = -i/(\omega C)$	$I_{C0}=V_0/Z_C$	I delante de V 90°: $V \rightarrow, I \uparrow$			$ \bar{Z}  = \sqrt{a^2 + b^2}, \phi = \tan^{-1}(b/a)$
	Inductor $V=L dI/dt$	$X_L=\omega L$	$\bar{Z}_L = i \omega L$	$I_{L0}=V_0/Z_L$	I atrás de V 90°: $V \rightarrow, I \downarrow$			$r e^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

**Resistencia:** En serie:  $R = R_1 + R_2$  En paralelo:  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$  Resistencia único elemento que disipa potencia,  $P = I^2 R = IV$

**Capacitancia:** Placas paralelas  $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ,  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \varepsilon_0}$  Cilíndrico  $C = \frac{2\pi \varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$ . Esférico  $C = 4\pi \varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$ . Esfera aislada  $C = 4\pi \varepsilon_0 R$   
En serie:  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$  En paralelo:  $C = C_1 + C_2$  Con Dieléctrico:  $C = k_e C_0$  ( $k_e = \varepsilon/\varepsilon_0$ )

**Inductancia:** Cable:  $L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$  Cilindro hueco:  $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} (\ln(2l/r) - 1)$ ,  $l \gg r$  Cables paralelos:  $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln(dr)$ ,  $l \gg d \gg r$  Coaxil:  $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln(b/a)$   
En serie:  $L = L_1 + L_2$  En paralelo:  $1/L = 1/L_1 + 1/L_2$  [ $r$  radio del cilindro / cable,  $d$  dist. entre cables,  $a$  y  $b$  radios coaxil]

**Impedancia:** En serie:  $\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$  En paralelo:  $1/\bar{Z} = 1/\bar{Z}_1 + 1/\bar{Z}_2$   $\bar{Z}$  complejo:  $\text{Re}(\bar{Z}) = \text{Resistencia } (R)$ ,  $\text{Im}(\bar{Z}) = \text{Reactancia } (X)$

**Leyes de Kirchoff:** 1.Ley de Nodos: La suma de las corrientes en cada nodo = 0 (corriente que entra al nodo = a la que sale). 2.Ley de Mallas. En cada malla (o loop) la suma de las diferencias de tensión (V) = 0. Para sumar elijo una Dir para cada I, y una Dir de Giro en la malla. En bats, si Dir de Giro va de  $| a | \Rightarrow +\varepsilon$ . En Rs, si Dir de Giro = Dir de I  $\Rightarrow -RI$ . En Cs, si Dir de Giro va de  $+q | a | \Rightarrow -q/C$

**Thevenin:** 1-Remover  $R_L$  y reemplazar por terminales abiertas A y B. 2-Encontrar  $I_s$  con Kirchoff (circuito ab. en A y B para  $I_s$ ). 3-Encontrar  $V_{th}$  agregando bat  $V_{th}$  entre A y B, con cualquier malla que pase por  $V_{th}$ , y con  $I_s$  calculadas en 2 ( $I=0$  para elementos en terminales abiertas). 4-Encontrar  $R_{th}$  con cortocircuito en baterías (salvo sus resistencias si tienen) y calculando R equivalente =  $R_{th}$ .

**Corriente Alterna. Régimen transitorio: 1er orden (Circ RL):**  $\dot{x} + (1/\tau)x = b$ ,  $x_h(t) = k e^{-t/\tau}$ ,  $x_p(t) = b\tau$ ,  $x(t) = x_h + x_p = k e^{-t/\tau} + b\tau$

**2do Orden (Circ. RLC)**

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t), x_h(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

$b > \omega_0$	Sobreamortiguado	$x_h(t) = e^{-bt} (A e^{at} + B e^{-at})$	Antioscilador
$b < \omega_0$	Subamortiguado	$x_h(t) = e^{-bt} (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}) = A_1 e^{-bt} \cos(\omega t + \phi_0)$	$\ddot{x} - \omega_0^2 x = F(t)$ $x_h(t) = A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}$
$b = \omega_0$	Amortig. Crítico	$x_h(t) = e^{-bt} (A + B t)$	
$b = 0$	Osc. Armónico	$x_h(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$	

**Régimen estacionario: Ley de Ohm de Fasores:**  $\vec{\varepsilon} = \vec{Z} \vec{I}$ .  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ .  $\vec{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$ .  $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ .  $\vec{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ .  $|Z| = V_{ef}/I_{ef}$

En Serie:  $I(t)$  igual para todos los elementos,  $V(t)$  desfasado. Dibujar Fasores de V. En paralelo:  $I(t)$  desfasada,  $V(t)$  igual. Dibujar Fasores de I.

**Potencia entregada x fuente:**  $P(t) = I(t)V(t)$ .  $\langle P \rangle = \frac{I_0 V_0}{2} \cos(\phi) = \frac{V_0^2}{2|Z|} \cos(\phi) = I_{rms} V_{rms} \cos(\phi) = I_{rms}^2 R$ .  $\phi$ : fase de  $\vec{Z}_{eq}$ ,  $\cos(\phi)$ : Factor de Potencia,

$V_{rms} = V_0/\sqrt{2}$ . **Transformador Ideal:**  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$ ,  $M^2 = L_1 L_2$ ,  $P_{in} = I_1 V_1 = P_{out} = I_2 V_2$ .

## Energía

	Electricidad	Magnetismo
<b>Distribuciones Discretas</b>	$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j V_{ij}, \text{ con } V_{ij} = \frac{k_e q_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j }$	$U = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j, \text{ con } d\Phi_j = \sum_i \frac{d\Phi_{ji}}{dI_i} dI_i = \sum_i M_{ji} dI_i$
<b>Continuas</b>	$U = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dV'$	$U = \frac{1}{2} \sum_j \oint_{C_j} d\vec{l}_j \cdot \vec{A}$
<b>En medios</b>	$U = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV$	$U = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$
<b>Densidad</b>	$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ Energía de un Capacitor: $U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$	$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ Energía de un solenoide: $U_B = \frac{1}{2} Li^2$

## Ejemplos de Campos

Electricidad				Magnetismo		
<b>Carga Puntual</b>	$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$	$V = k_e Q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$	$q$ : carga, $r$ : distancia. $V=0$ en $ z =\infty$	<b>Cable finito</b>	$\vec{B} = k_m \frac{I}{r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{\theta}$	$r$ distancia $\perp$ al cable, $\theta_1$ y $\theta_2$ ángulos subtendidos en $\vec{r}$ por los extremos
<b>Esfera carga un.</b>	$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r}$	$V = k_e \frac{Q}{r}, r \geq R$	A dentro $\vec{E}=0$ . $Q$ : Carga total. Similar a esf. conductora	<b>Cable <math>\infty</math></b>	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$	$r$ distancia $\perp$ al cable. Cable en dirección $z$ .
<b>Línea de carga <math>\infty</math></b>	$\vec{E} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}$	$V = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left( \frac{R_{ref}}{r} \right)$	$r$ : distancia $\perp$ a la línea. $V=0$ en $r=R_{ref}$	<b>Plano <math>\infty</math></b>	$\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 g}{2} \hat{y}, z > 0$	Plano en $xy$ , $\vec{g}$ en dirección $x+$
<b>Plano <math>\infty</math></b>	$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$	$V = V_0 - \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma  z $	$V=V_0$ en $z=0$	<b>Solenoides <math>\infty</math></b>	$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$ $L = \mu_0 n^2 A l$	Solenoides en $xy$ , $I$ en dirección $x+$ , $n=N/l$ (densidad de espiras)
<b>Anillo uniforme</b>	$\vec{E} = k_e \frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{z}$	$V = k_e \frac{Q}{\sqrt{z^2+R^2}}$	$\vec{E}$ medido en eje $z$ . $R$ : radio. $V=0$ en $ z =\infty$	<b>Espira circular</b>	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{z}$	$\vec{B}$ en eje de la espira. Espira en plano $xy$ . $R$ radio espira
<b>Disco uniforme</b>	$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{ z }{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \hat{z}$	$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}  z  \left( \sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1 \right)$	$\vec{E}$ medido en eje $z$ . $V=0$ en $ z =\infty$	<b>Toroide</b>	$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\theta}$ $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r}$	$\vec{B}$ dentro del toroide. $N$ : vueltas totales. $r$ : radio toroide. $S$ : área tor.

## Constantes

<b>Constante eléctrica</b> $k_e = 8.988 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$	<b>Permitiv. el. vacío</b> $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$	<b>Coulomb</b> $1C = 6.2 \times 10^{18} e$ $e$ =carga electrón	<b>Constante magnética</b> $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = \frac{N}{A^2}$	<b>Permeab. mg. vacío</b> $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$	<b>Velocidad de la luz</b> $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{seg}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

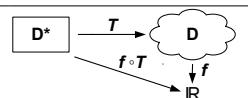
## Apéndice Matemática

### Tipos de Integrales

	De función escalar $f(\vec{r})$	De campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$
<b>Simple</b>	<b>Integral simple</b> $\int f(t) dt = k$	<b>Integral simple sobre un campo</b> $\int \vec{F}(t) dt = \int F_1(t) dt \hat{x} + \int F_2(t) dt \hat{y} + \int F_3(t) dt \hat{z} = \vec{r}$
<b>Curva</b>	<b>Integral de línea</b> $\int_C f(\vec{r}) dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \ \vec{\gamma}'(t)\  dt = k$ $\gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular de $C$ Si $f(\vec{r}) \geq 0$ se puede interpretar como el "área de una valla"	<b>Circulación de un campo - Vector dot <math>d\vec{l}</math> = escalar</b> $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = k$ <b>Vector por <math>d\vec{l}</math> = Vector</b> $\int_C \vec{F}(\vec{r}) dl = \int_C F_1(\vec{r}) dl \hat{x} + \int_C F_2(\vec{r}) dl \hat{y} + \int_C F_3(\vec{r}) dl \hat{z} = \vec{r}$
	<b>Doble</b>	<b>Integral doble / de área</b> $\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = k$
<b>Superficie</b>	<b>Integral de superficie</b> $\iint_S f(\vec{r}) dS = \iint_D f(\vec{T}(u, v)) \ \vec{T}_u \times \vec{T}_v\  du dv = k$	<b>Flujo de un Campo - Vector dot <math>d\vec{S}</math> = escalar</b> $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \iint_S F_n dA = k$ <b>Integral de superficie sobre un campo - vector por <math>d\vec{S}</math></b> $\iint_S \vec{F}(\vec{r}) dS = \iint_S F_1(\vec{r}) dS \hat{x} + \iint_S F_2(\vec{r}) dS \hat{y} + \iint_S F_3(\vec{r}) dS \hat{z} = \vec{r}$ Ejemplo: Campo eléctrico de una superficie
	<b>Volumen</b>	<b>Integral triple / de volumen</b> $\iiint_V f(\vec{r}) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = k$

### Teoremas de Cálculo Vectorial

**Cambio de Variable:**  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  inyec. y  $C^1$ .  $D^* \subset \mathbb{R}^2$  acotado y  $f: D = T(D^*) \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Si  $DT$  inversible en  $D^* \Rightarrow \int_D f = \int_{D^*} (f \circ T) |det(DT)|$ . Ej. polares,  $D$  círculo  $r=R$ ,  $D^* r \times \theta: [0, R] \times [0, 2\pi]$ ,  $T(r, \theta) = \{x=r \cos \theta, y=r \sin \theta\}$



Green (o Stokes en áreas de $\mathbb{R}^2$ )	Stokes	Gauss
$\oint_{\partial D=C} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} dA$	$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S=C} \vec{F} \cdot d\vec{l}$	$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_{\partial V=S} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$
La integral del rotor de un campo en un área de $\mathbb{R}^2$ es igual a la circulación del campo sobre el borde	El flujo del rotor de un campo sobre una superficie es igual a la circulación del campo sobre la frontera	La integral de volumen de la div. de un campo es igual al flujo del campo sobre la superficie que envuelve al vol.

**Expansión Binomial:**  $(1 \pm \epsilon)^n \approx 1 \pm n\epsilon + \dots$  ( $\epsilon \ll 1$ ). Ej.:  $\frac{1}{\sqrt{r^2+L^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2(1+L^2/r^2)}} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2} \right) = \frac{1}{r} - \frac{L^2}{2r^3}$  ( $L \ll r, \epsilon = \frac{L^2}{r^2}$ )

### Integrales Relevantes

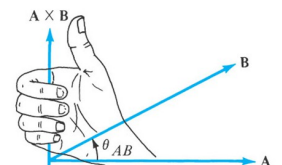
$\oint_C d\vec{l} = 0$	$\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_C \vec{r} \times d\vec{l} = 2A$ ( $A$ : Área encerrada)	$\oint_C \frac{d\vec{l}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} = 0$	$\oint_C \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} = \nabla \times \oint_C \frac{d\vec{l}'}{ \vec{r} - \vec{r}' }$	$\iiint_{V'} \frac{\vec{A} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} dV' = \nabla \times \iiint_{V'} \frac{\vec{A}}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$
------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### Productos Escalar y Vectorial

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \hat{e}, \quad \hat{e} \perp (\vec{A}, \vec{B})$$

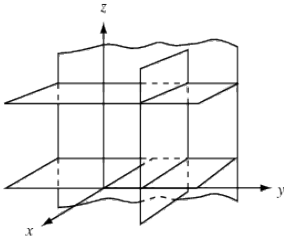
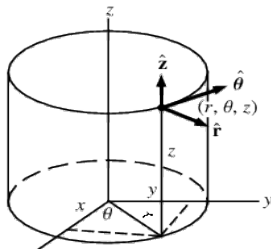
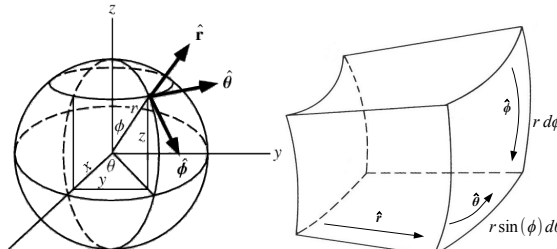
Regla de la mano derecha: Pulgar  $\vec{A}$ , Índice  $\vec{B}$ , del Medio  $\vec{A} \times \vec{B}$



## Identidades y Operaciones Simples

<b>Con Gradiente</b>	$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$	$\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$	$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$		
<b>Con Divergencia</b>	$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$	$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})=(\nabla f)\cdot\vec{A}+f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$	$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$ $\vec{\nabla}\cdot(\nabla\times f)=0$		
<b>Con Rotor</b>	$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{B}$	$\vec{\nabla}\times(f\vec{A})=(\nabla f)\times\vec{A}+f(\vec{\nabla}\times\vec{A})$	$\vec{\nabla}\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ $\vec{\nabla}\times(\nabla f)=0$		
	$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$	$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$	$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$		
<b>Con Laplaciano</b>	$\nabla^2(fg)=g\nabla^2f+f\nabla^2g+2(\nabla f\cdot\nabla g)$				
<b>Operaciones Simples</b>	$\nabla r=\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$	$\nabla r^n=n r^{n-1} \hat{r}=n r^{n-2} \vec{r}$	$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\hat{r}}{r^2}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$	$\nabla\frac{1}{r^2}=-2\frac{\hat{r}}{r^3}=-2\frac{\vec{r}}{r^4}$	$\nabla\frac{1}{r^n}=-n\frac{\hat{r}}{r^{n+1}}=-n\frac{\vec{r}}{r^{n+2}}, n>0$
	$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}/r^3=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$	$\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$	$\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta(\vec{r})$

## Coordenadas

	<b>Cartesianas</b> ( $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ )	<b>Polares / Cilíndricas</b> ( $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$ )	<b>Esféricas</b> ( $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$ ) $\phi$ cenital, $\theta$ azimutal
<b>Vectores</b>	$\vec{F}=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$	$\vec{F}=F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_z\hat{z}$	$\vec{F}=F_r\hat{r}+F_\phi\hat{\phi}+F_\theta\hat{\theta}$
<b>Coord</b>	<u>Cart.</u> : $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$ $\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$ $\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$ <u>Cilíndricas</u> : Notación altern: $(\rho, \theta, \phi, z)$ $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}$ $\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}$ $\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$	$r=\sqrt{x^2+y^2}: [0, +\infty)$ $\theta=\tan^{-1}(y/x): [0, 2\pi]$ $z=z(-\infty, +\infty)$ $x=r\cos(\theta)$ $y=r\sin(\theta)$ $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}: [0, +\infty)$ $\phi=\cos^{-1}(z/r): [0, \pi]$ $\theta=\tan^{-1}(y/x): [0, 2\pi]$ $x=r\cos(\theta)\sin(\phi)$ $y=r\sin(\theta)\sin(\phi)$ $z=r\cos(\phi)$
<b>Versores</b>	<u>Esféricas</u> : Notación alter.: $(r, \theta, \phi)$ (radial, cenital, azimutal) $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}$ $\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}$ $\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$	$\hat{r}=x/r\hat{x}+y/r\hat{y}$ $\hat{\theta}=-y/r\hat{x}+x/r\hat{y}$ $\hat{z}=\hat{z}$ $\hat{x}=\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta}$ $\hat{y}=\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta}$ $\hat{z}=\hat{z}$	$\hat{r}=\sin\phi\cos\theta\hat{x}+\sin\phi\sin\theta\hat{y}+\cos\phi\hat{z}$ $\hat{\phi}=\cos\phi\cos\theta\hat{x}+\cos\phi\sin\theta\hat{y}-\sin\phi\hat{z}$ $\hat{\theta}=-\sin\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}$ $\hat{x}=\sin\phi\cos\theta\hat{r}+\cos\phi\cos\theta\hat{\phi}-\sin\theta\hat{\theta}$ $\hat{y}=\sin\phi\sin\theta\hat{r}+\cos\phi\sin\theta\hat{\phi}+\cos\theta\hat{\theta}$ $\hat{z}=\cos\phi\hat{r}-\sin\phi\hat{\phi}$
<b>Jacob.</b>	1	r	$r^2\sin\phi$
$d\vec{l}$	$dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z}$	$dr\hat{r}+r d\theta\hat{\theta}+dz\hat{z}$	$dr\hat{r}+r d\phi\hat{\phi}+r\sin\phi d\theta\hat{\theta}$
$d\vec{S}$	$dy dz \hat{x}$ $dx dz \hat{y}$ $dx dy \hat{z}$	$r d\theta dz \hat{r}$ $dr dz \hat{\theta}$ $r dr d\theta \hat{z}$	$r^2\sin(\phi) d\phi d\theta \hat{r}$ $r\sin(\phi) dr d\theta \hat{\phi}$ $r dr d\phi \hat{\theta}$
$dV$	$dx dy dz$	$r dr d\theta dz$	$r^2\sin\phi d\theta d\phi dr$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}+\frac{1}{r\sin(\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi F_\phi)+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$
$\vec{\nabla}\times\vec{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r}+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi F_\theta)-\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right]\hat{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)\right]\hat{\phi}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)-\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right]\hat{\theta}$
$\vec{\nabla}\times\vec{F}$ <b>Det.</b>	$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{r^2\sin\phi}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & r\sin\phi\hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ F_r & rF_\phi & r\sin\phi F_\theta \end{vmatrix}$
$\dot{r}, \ddot{r}$	$\dot{r}=\dot{x}\hat{x}+\dot{y}\hat{y}+\dot{z}\hat{z}$ $\ddot{r}=\ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}+\ddot{z}\hat{z}$	$\dot{r}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{z}\hat{z}$ $\ddot{r}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{z}$	$\dot{r}=\dot{r}\hat{r}+r\sin\phi\dot{\theta}\hat{\theta}+r\dot{\phi}\hat{\phi}$ $\ddot{r}=(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2-r\sin^2\phi\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\sin\phi\dot{\theta}\dot{r}+2r\cos\phi\dot{\theta}\dot{\phi}+r\sin\phi\ddot{\theta})\hat{\theta}+(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}-r\sin\phi\cos\phi\dot{\theta}^2)\hat{\phi}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$
			

## Áreas / Volúmenes

**Esfera:** Area:  $4\pi r^2$  Vol:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . **Cilindro:** Area:  $2\pi r^2 + 2\pi r h$  Vol:  $\pi r^2 h$ . **Círculo:** Area:  $\pi r^2$  Diámetro:  $2\pi r$ .