

Fundamentos de Inferencia Bayesiana

“La moneda”

Modelo Beta-Binomial



¿ $p(0)$ en la próxima tirada? ¿ $3/6=0.5$?



¿Y ahora? ¡¿1?!

Inferencia Bayesiana, incorporamos conocimientos previos.
Primer paso: modelo.

Modelo

likelihood:



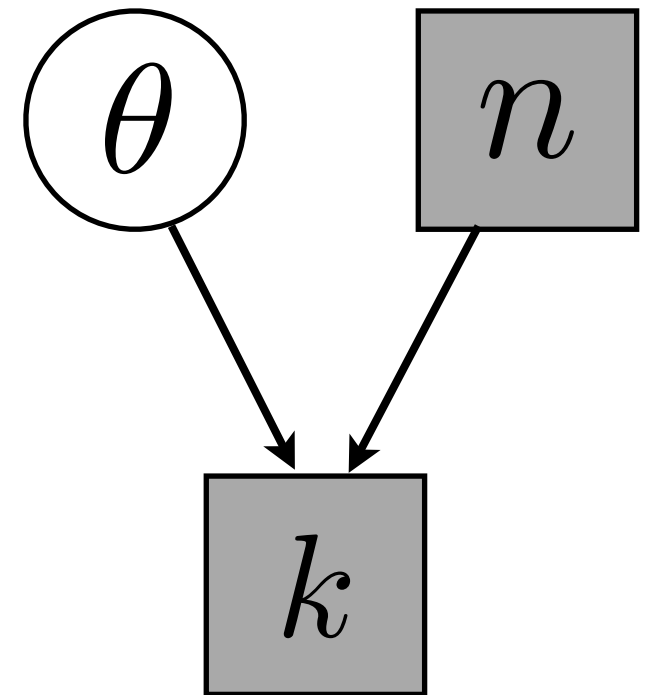
$$p(01011|\theta) = \theta^2(1 - \theta)^3$$

$$p(k|\theta) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

número de *caras* (pointing to θ^k)

número de *tiradas* (pointing to $n-k$)

$$k \sim \text{Binomial}(\theta, n)$$



prior:

¿Cómo lo elegimos?

Podemos pensar en experiencia previa *ficticia*

Eligiendo el *prior*...

Si pienso que tiré la moneda y obtuve 1000 *caras*
y 1000 *cecas*..

likelihood: $p(D|\theta) \propto \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$

prior: $p(\theta) \propto \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}$

α número ficticio de *caras*

β número ficticio de *cecas*

Distribución $\text{Beta}(\alpha, \beta)$, *conjugada* de la *Binomial*

Distribuciones conjugadas

$$p(\theta|D) \propto p(D|\theta)p(\theta)$$

$$p(\theta|D) \propto \underbrace{\theta^k (1 - \theta)^{n-k}}_{\text{likelihood}} \underbrace{\theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}}_{\text{prior}}$$

$$= \theta^{k+\alpha-1} (1 - \theta)^{n-k+\beta-1}$$

$$\searrow \text{Beta}(k + \alpha, n - k + \beta)$$

$$\text{Beta}(.) \propto \text{Binomial}(.)\text{Beta}(.)$$

$\searrow$ real + ficticio

Propiedad útil para el cómputo y la interpretación

Modelo

likelihood:

$$p(k|\theta) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

$$k \sim \text{Binomial}(\theta, n)$$

prior:

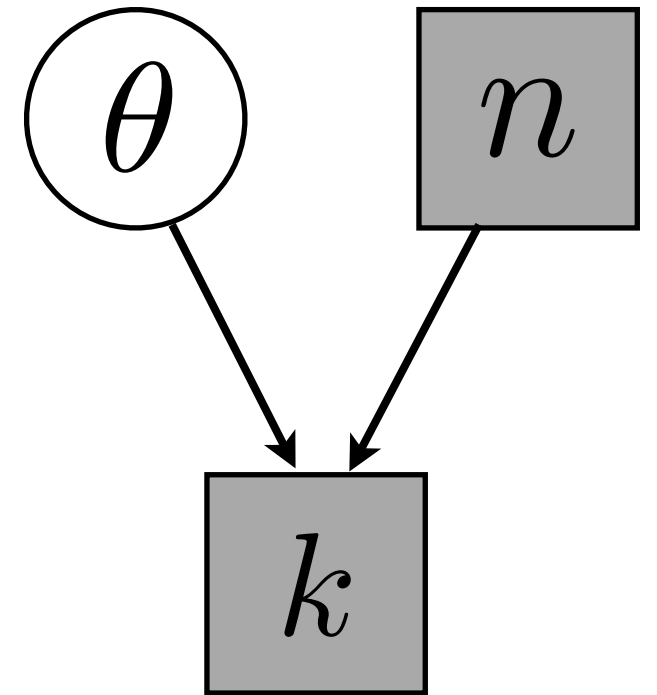
$$\theta \sim \text{Uniform}(0, 1) = \text{Beta}(1, 1)$$

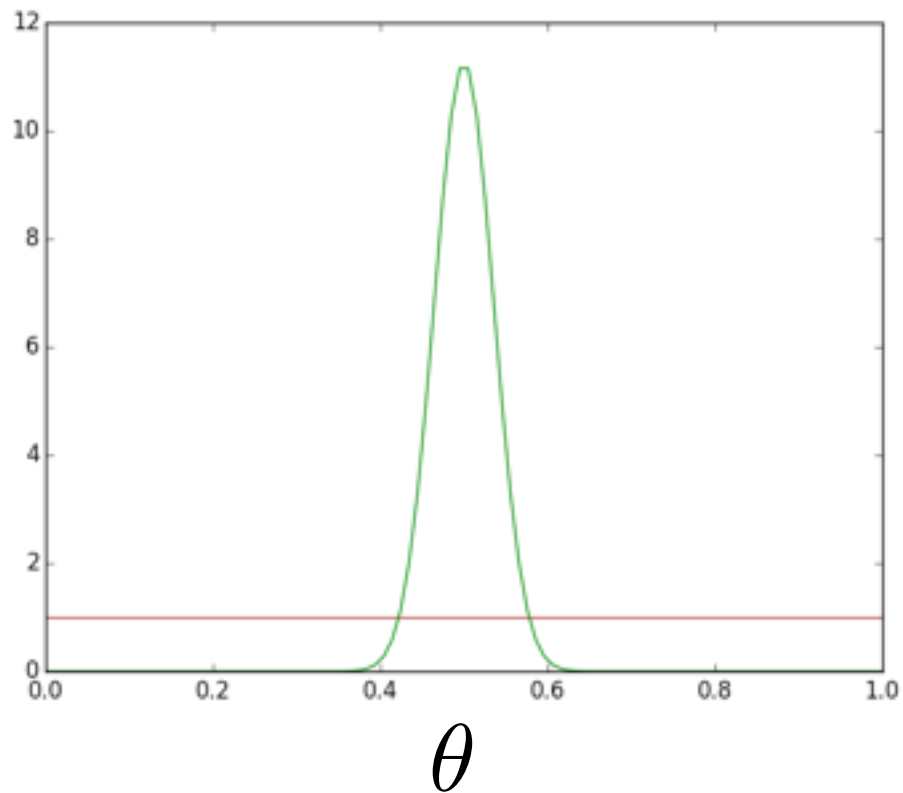
$$\theta \sim \text{Beta}(100, 100)$$

posterior:

$$p(\theta|D) = \text{Beta}(k + 1, n - k + 1)$$

$$p(\theta|D) = \text{Beta}(k + 100, n - k + 100)$$





prior

$$\theta \sim \text{Uniform}(0, 1) = \text{Beta}(1, 1)$$

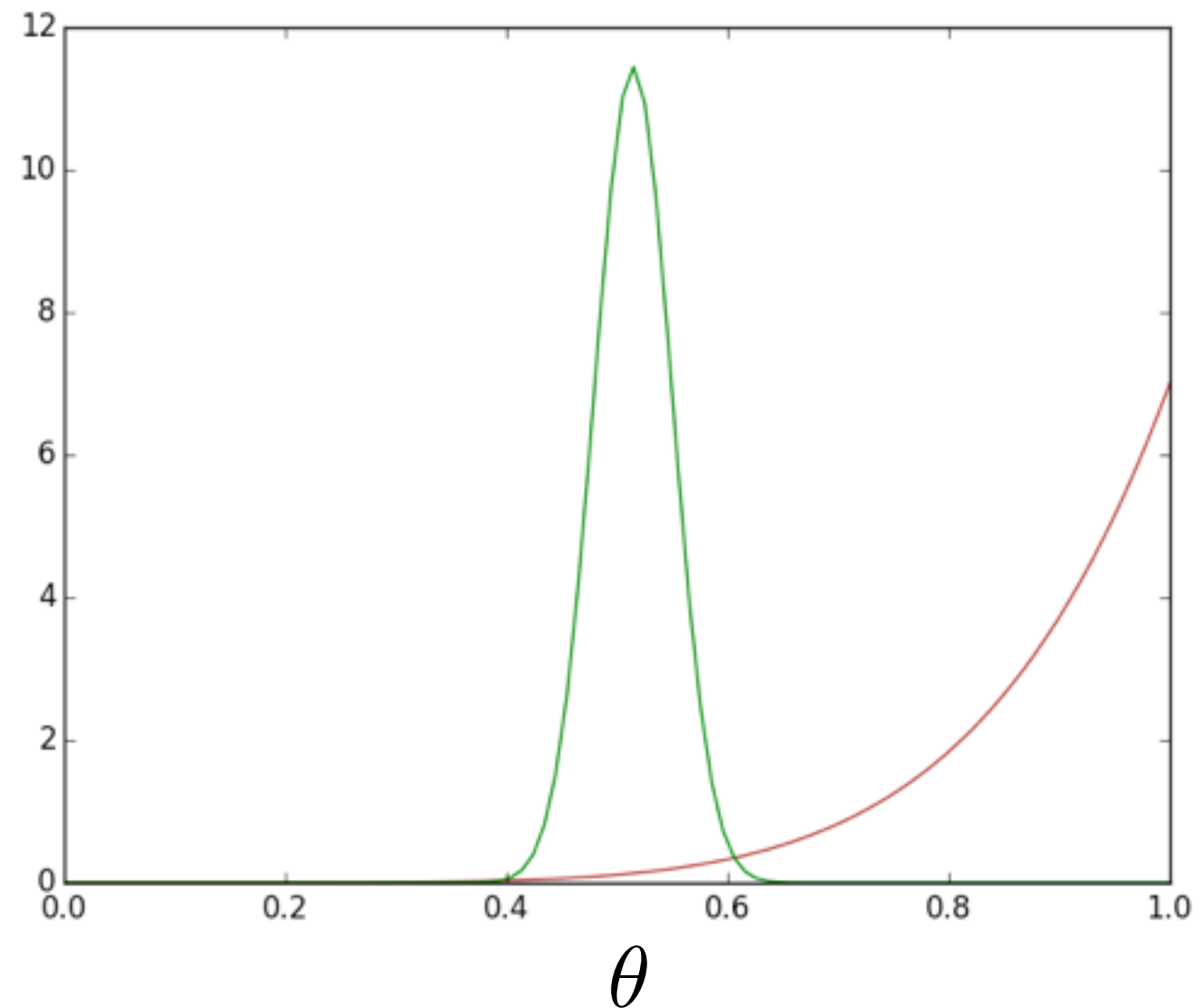
$$\theta \sim \text{Beta}(100, 100)$$

posterior

$D: k=6, n=6$

$$p(\theta|D) = \text{Beta}(k + 1, n - k + 1)$$

$$p(\theta|D) = \text{Beta}(k + 100, n - k + 100)$$



Práctica

¡Inferir θ !