1 Repaso de matematicas

(La solucion de estos ejercicios deben ser entregados a los ayudantes)

1.- Dado dos numeros complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, donde i es tal que $i^2 = -1$. Estos numeros tambien pueden ser escritos como

$$z_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1) \;\; ; \;\; z_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2)$$

a) Calcule $\rho_1, \rho_2, \varphi_1$ y φ_2 en terminos de x_1, x_2, y_1 e y_2.

a) Calcule $z_1 * z_2$ usando ambas formas de escribir los complejos y verfique la identidad de los resultados obtenidos

b) Calcule z_1/z_2 usando ambas formas de escribir los complejos y verfique la identidad de los resultados obtenidos

Le resultara util recordar que $\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin(\alpha)$ y por lo tanto $\sin\alpha = \frac{\exp(i\alpha)-\exp(-i\alpha)}{2i}$, $\cos\alpha = \frac{\exp(i\alpha)+\exp(-i\alpha)}{2}$, $\tan\alpha = -i\frac{\exp(i\alpha)-\exp(-i\alpha)}{\exp(i\alpha)+\exp(-i\alpha)}$.

d) verifique que

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \;\; ; \;\; cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2.- Desarrolle en serie de potencias las siguientes funciones

a) $\frac{1}{1-x}$

b) $\frac{1}{(1-x)^2}$

c) $exp(ix)$ y $\exp(x)$

d) sin (x)

e) cos (x)

f) $\sqrt{1-x}$ y $\sqrt{1-x^2}$

g) $\ln(1+x)$

h) Usando los desarrollos en serie verifique que $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ y que $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right]$

3.- Usando los desarrollos en serie realizados estudie el valor del limite de $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$, $\frac{\tan x}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ cuando x$\to 0$.

4.- Verifique que

$$\sum_{n=1}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$

5.- Dada una funcion de dos variables f(x,y). Las derivadas parciales respecto de x e y quedan definidas como

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \left[\frac{df(x,y)}{dx}\right]_{y=\text{constante}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left[\frac{df(x,y)}{dy}\right]_{x=\text{constante}}$$

Cuando hay derivadas segundas se sobreentiende que existe un orden de derivacion prefijado, es decir, por ejemplo

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \left[\frac{d}{dx}\left[\frac{df(x,y)}{dy}\right]_{x=\text{constante}}\right]_{y=\text{constante}}$$

Evalue las primeras y segundas derivas parciales para las siguientes funciones (y compare las derivadas segundas donde se altera el orden)

a) $f(x,y) = 3x^2y - y^3$
b) $f(x,y) = yx^4$
c) $f(x,y) = \exp(xy)$
d) $f(x,y) = \exp(\frac{1}{xy})$