Tema 9. Transformada de Fourier

Prof. William La Cruz Bastidas

28 de junio de 2002

Tema 9

Transformada de Fourier

A continuación introduciremos el concepto de transformada de Fourier continua. De ahora en adelante, denotaremos con j la unidad imaginaria.

9.1 Transformada de Fourier

Sea $x(t)$ una señal continua. Se define la transformada de Fourier de x, denotada con $X(\omega)$, como la función

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt \tag{9.1}$$

que está definida en $\Re$ y toma valores complejos. Para que la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ exista (en forma ordinaria no como función generalizada), x debe satisfacer las siguientes propiedades denominadas condiciones de Dirichlet:

(1) $x(t)$ es absolutamente integrable, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty.$$

(2) $x(t)$ posee un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito.

Ejemplo 9.1 *Sea*

$$x(t) = \begin{cases} -3t, & t \leq 0 \\ t+1, & 0 < t \leq 1 \\ 3 & t > 1. \end{cases}$$

Se observa que $x(t)$ no es absolutamente intebrable, por lo tanto su transformada de Fourier no existe.

Ejemplo 9.2 *Sea $x(t) = e^{-at}u(t)$, con $a > 0$. Calcular la transformada de Fourier de $x(t)$.*

Solución. Es claro que $x(t)$ es continua en $\Re$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} < \infty.$$

Por lo tanto, $X(\omega)$ existe y viene dada por

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt \\ &= -\frac{1}{(a+j\omega)}\ e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{(a+j\omega)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 9.3 *Calcular la transformada de Fourier de $\delta(t)$.*

Solución. Como $\delta(t)$ no es una función continua en todo $\Re$ y, además, es una función generalizada, su transformada de Fourier no existe en forma ordinaria. Para remediar esto es conveniente generalizar el concepto de transformada de Fourier, lo cual se hará simplemente forzando la existencia de la transformada de Fourier de $\delta(t)$. La transformada de Fourier de $\delta(t)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\left[\cos\omega t - j\mathrm{sen}\,\omega t\right]\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{sen}\,\omega t\,dt \\ &= \cos(0) - j\mathrm{sen}\,(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En el ejemplo 9.3 se introdujo la transformada de Fourier generalizada, la cual es muy necesaria para establecer transformadas de Fourier de funciones que no la poseen en forma ordinaria.

Definición 9.1 (Transformada Inversa de Fourier) *Sea $x(t)$ una señal cuya transformada de Fourier es $X(\omega)$. La transformada inversa de Fourier es el proceso de obtener $x(t)$ a través de $X(\omega)$ y se define como:*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{9.2}$$

Según (9.2) la transformada inversa de Fourier se traduce a integrar la Función $X(\omega)e^{j\omega t}$ que está definida de los reales a los complejos. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación.

Ejemplo 9.4 *Determine la transformada inversa de Fourier de la función $X(\omega) = \delta(\omega)$.*

Solución. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\cos\omega t\,d\omega - j\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\mathrm{sen}\,\omega t\,d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\cos(0) - j\mathrm{sen}\,(0)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

En general, la expresión (9.2) no se utiliza para hallar la transformada inversa de Fourier. Normalmente se emplea un procedimiento algebraico el cual se estudiará en el Tema 10.

9.2 Algunos pares de transformadas de Fourier

En la Tabla 9.1 se observan las transformadas de Fourier de las señales básicas.

Señal	**Transformada de Fourier**
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - k\omega_0\right)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$
$\operatorname{sen}\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)-\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$
$x\left(t\right)=1$	$2\pi\delta\left(\omega\right)$
$\frac{\operatorname{sen}Wt}{\pi t}$	$X\left(\omega\right)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<W\\ 2 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$
$\delta\left(t\right)$	1
$u\left(t\right)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta\left(\omega\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-at}u\left(t\right)$, $\mathrm{Re}\left\{a\right\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$te^{-at}u\left(t\right)$, $\mathrm{Re}\left\{a\right\}>0$	$\frac{1}{\left(a+j\omega\right)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u\left(t\right)$, $\mathrm{Re}\left\{a\right\}>0$	$\frac{1}{\left(a+j\omega\right)^n}$

Tabla 9.1: Pares básicos de transformadas de Fourier.

9.3 Propiedades de la transformada de Fourier

En la Tabla 9.2 se observan las propiedades de la transformada de Fourier.

Propiedad	**Señal**	**Transformada de Fourier**
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$y(t)$	$Y(\omega)$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Conjugación	$\overline{x(t)}$	$\overline{X(-\omega)}$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)Y(\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$

Tabla 9.2: Propiedades de la transformada de Fourier.

9.4 Magnitud y Fase de una señal

Definición 9.2 (Magnitud de una señal) *Sea $X(\omega)$ la transformada de Fourier de una señal continua $x(t)$. La magnitud de la señal $x(t)$ se define como el valor absoluto de su transformada de Fourier; en otras palabras, la función*

$$A(\omega) = |X(\omega)| \tag{9.3}$$

se define como el espectro de magnitud de $x(t)$.

Definición 9.3 (Fase de una señal) *Sea $X(\omega)$ la transformada de Fourier de una señal continua $x(t)$. La fase de la señal $x(t)$ se define como el argumento de su transformada de Fourier; en otras palabras, la función*

$$\phi(\omega) = \arg\{X(\omega)\} \tag{9.4}$$

se define como el espectro de fase de $x(t)$.