

Problema 1.9 Calcular el trabajo realizado por n moles de gas ideal para ir de un estado inicial a otro final, en cada una de las siguientes transformaciones reversibles:

- a) Evolución isocórica
- b) Evolución isobárica
- c) Evolución isotérmica
- d) Evolución adiabática

¿En qué casos la expresión obtenida es válida aún para gases no ideales? ¿En qué casos es válida aún para procesos irreversibles?

El trabajo producido por el gas sobre el medio externo está definido como

$$W = \int_{V_0}^{V_f} P_{\text{ext}} \cdot dV \quad (1)$$

En el caso de procesos reversibles podemos reemplazar P_{ext} (la presión del medio exterior) por P (la presión del gas), ya que coinciden durante la evolución (si no lo hicieran, la evolución no sucedería de forma *cuasiestacionaria*).

a) Una evolución isocórica es tal que el volumen del gas permanece constante: $\Delta V = 0$. El trabajo, definido por 1 resulta evidentemente $W = 0$. Esto es independiente del tipo de gas (no fue necesario usar la ecuación de estado del gas), y es válido incluso para procesos irreversibles.

b) En una evolución isobárica es la presión la que permanece constante. La ecuación 1 queda

$$W = \int_{V_0}^{V_f} P \cdot dV = P \int_{V_0}^{V_f} dV = P \cdot \Delta V$$

pero para esto tuvimos que suponer que el proceso es reversible. En este caso tampoco usamos la relación entre las variables termodinámicas, dada por la ecuación de estado del gas ideal.

c) Ahora tenemos un proceso a temperatura constante. Si suponemos la evolución reversible de un gas ideal, podemos despejar P de la ecuación de estado $PV = nRT$. Resulta entonces

$$W = \int_{V_0}^{V_f} P \cdot dV = \int_{V_0}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_f}{V_0}$$

d) Por último tenemos una evolución en la que el gas no intercambia calor con el medio ($Q = 0$). En este caso, y a partir de la ecuación de los gases ideales, se pueden deducir (ver teórica) las siguientes conservaciones de las variables termodinámicas a lo largo del proceso:

$$\begin{aligned} TV^{\gamma-1} &= \text{constante} \\ TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= \text{constante} \\ PV^{\gamma} &= \text{constante} \end{aligned}$$

donde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. A partir de la última de estas conservaciones, podemos decir

$$P = \frac{\text{constante}}{V^\gamma} = \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} = \frac{P_f V_f^\gamma}{V^\gamma} \quad (2)$$

Ahora podemos escribir el trabajo como

$$W = \int_{V_0}^{V_f} P dV = \int_{V_0}^{V_f} \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = P_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_f} V^{-\gamma} dV$$

Si suponemos $\gamma \neq 1$ (deberíamos considerarlo como un caso especial)

$$W = P_0 V_0^\gamma \frac{V_f^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} (P_0 V_0^\gamma V_f^{1-\gamma} - P_0 V_0)$$

A partir de la expresión 2 sabemos que $\frac{V_f^{-\gamma}}{P_f} = \frac{V_0^{-\gamma}}{P_0}$, con lo cual

$$W = \frac{P_f V_f - P_0 V_0}{1-\gamma}$$