Práctica 4: Ecuación de advección lineal

Problema 1

Dada la ecuación de advección lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Utilizando una aproximación en diferencias finitas centradas en el espacio y los esquemas temporales: **a)** Adelantado/Euler **b)** Heun **c)** Leapfrog

1. Halle un algoritmo de cálculo para su resolución e indique si los esquemas resultantes son explícitos o implícitos. Diga cuántos niveles temporales y espaciales emplea y el orden de la aproximación.
2. Halle el factor de amplificación y la velocidad de fase relativa de la solución numérica de cada esquema. Confeccione un gráfico que ilustre su comportamiento.
3. Estudie las condiciones de estabilidad.
4. Los esquemas de diferencias finitas propuestos, ¿son consistentes con la ecuación diferencial? ¿proveen una aproximación convergente a la solución de la ecuación diferencial?

Problema 2

Integre numéricamente la ecuación de advección lineal en el intervalo $0 < x < 50$ y $0 < t < 25$ utilizando los esquemas del ejercicio anterior. Si la solución real es un pulso rectangular de la forma:

$$u(x,t) = f(x-ct) = \begin{cases} 80 & 0 \leq x - ct \leq 10 \\ 0 & 11 \leq x - ct \leq 50 \end{cases}$$

Considere $c = 1$ y utilice los parámetros

a) $\Delta t = 0{,}1$ y $\Delta x = 1$ **b)** $\Delta t = 0{,}5$ y $\Delta x = 1$ **c)** $\Delta t = 0{,}5$ y $\Delta x = 5$

1. Resuelva tomando condiciones de borde cíclicas. En caso de ser necesario, para calcular la condición inical en el primer paso temporal, utilice un esquema adelantado.
2. Imprima los resultados numéricos y la solución real cada cinco unidades de tiempo en dos tablas.
3. Confeccione un gráfico para cada esquema con las soluciones numérica y real en $t = 10$ y $t = 25$.
4. Analice el comportamiento de la solución numérica en cada caso.

Problema 3

Escriba un código para obtener las soluciones de la ecuación de advección lineal en el dominio periódico $0 < x < 1$, con la condición inicial $u(x, 0) = sen(2\pi x)$. Para ello, utilice una aproximación de diferencias finitas centradas en el espacio.

1. Utilice los esquemas adelantados y de Leapfrog. Resuelva para $c = 1/10$, $CFL = 1/10$ y resoluciones espaciales: $\Delta x = 1/20$, $1/40$ y $1/80$.

2. Repita el punto 1 utilizando un esquema de Heun y agregue el caso $\Delta x = 1/160$.

3. Repita el punto 2 utilizando $c = 0{,}5$ y $CFL = 0{,}5$.

4. Repita el punto 3 utilizando $c = 1{,}2$ y $CFL = 1{,}2$.

En todos los casos, para cada resolución espacial y esquema temporal, grafique las soluciones numérica y real en $t = 50$. Compare y analice resultados.