Práctica 5: Ecuaciones elípticas

Problema 1

La ecuación de Poisson bajo condiciones de borde tipo Dirichlet está dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

definida en un dominio rectangular $0 < x < X_{max}$, $0 < y < Y_{max}$. La discretización de dicho dominio se realiza como un *retículo o grilla* bidimensional uniforme de paso $\Delta x = \Delta y = 1$ en la forma:

$$\begin{array}{ccc} u(x,y) & \rightarrow & U_{ij} \\ f(x,y) & \rightarrow & F_{ij} \end{array}$$

con $i = 0, ..., N$ y $j = 0, ..., M$ donde N y M representan el número de puntos en las direcciones x e y respectivamente.
Si se define $M = N = 10$ y se considera la solución de la ecuación de Poisson:

a) Calcule el forzado F_{ij} con un laplaciano de cinco puntos.

b) Con el forzado obtenido, determine la solución numérica G_{ij} de la ecuación de Poisson mediante el método de relajación con sobre-relajación. Tome una cota para los residuos igual a $0,01$.

c) Analice cómo varía el número de iteraciones con el coeficiente de sobre-relajación.

d) Imprima las matrices U y G. Calcule e imprima el error cuadrático medio entre la solución numérica y la solución exacta.

Problema 2

En las mismas condiciones que el ejercicio anterior obtenga la solución numérica sin sobre-relajación. Compare el número de iteraciones necesarias y la precisión de la solución respecto del caso con sobre-relajación.