Práctica 6: Métodos espectrales

Problema 1

Resuelva numericamente la siguiente ecuación diferencial con el método de Galerkin espectral:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + [\cos x + \cos^2 x]u = e^{\cos x - 1}$$

para $u = u(x)$ 2π-periódica. Utilice un desarrollo en cosenos con dos términos (a_0, a_1) y luego un desarrollo con cuatro términos (a_0, a_1, a_2, a_3). Tabule los coeficientes obtenidos en cada caso.

1. Compare cada desarrollo con la solución exacta $u(x) = e^{\cos x - 1}$ y grafique.
2. Compare los coeficientes con los obtenidos de desarrollar en serie de cosenos la solución exacta y tabule el error en cada uno.
3. Compare las soluciones numéricas con las obtenidas con un método en diferencias finitas de segundo orden de $N = 10$, 20 y 40 puntos de grilla.

Ayuda:

$$\int_0^{2\pi} \cos(jx) e^{\cos x - 1} dx = e^{-1} \begin{cases} I_0(1) & j = 0 \\ 2I_j(1) & j \neq 0 \end{cases}$$

con $I_j(x)$ la función modificada de Bessel y los siguientes valores para $x = 1$,

$$\begin{aligned} e^{-1}I_0(1) &= 0{,}465759597 \\ e^{-1}I_1(1) &= 0{,}207910413 \\ e^{-1}I_2(1) &= 0{,}049938776 \\ e^{-1}I_3(1) &= 0{,}008155308 \\ e^{-1}I_4(1) &= 0{,}00100693 \end{aligned}$$

Problema 2

Considere la ecuación de advección-difusión lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con V constante (tomar $V = 1$) y $u(x,t)$ 2π-periódica en el espacio x. Suponga que $u(x, t = 0) = \operatorname{sen}(x) + \cos(2x)$. Resuelva mediante el método de Galerkin espectral con un truncamiento de la forma:

$$u_N(x,t) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2-1} \hat{u_k}(t) e^{ikx} \qquad \text{con} \quad N = 6$$

Problema 3

Considere la ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con $\nu = 0{,}05 =$ constante, $u(x,t)$ 2π-periódica en el espacio x, y la condición inicial $u(x, t = 0) = \sin x + \cos 2x$. Plantee las ecuaciones con el método de Galerkin espectral con un desarrollo en exponenciales complejas como en el ejercicio anterior con $N = 6$ (las ecuaciones obtenidas para los coeficientes del desarrollo se pueden integrar en el tiempo numericamente con un método de Runge-Kutta de orden 2).
Considerando ahora un método pseudoespectral con $N = 32$ y $N = 512$ puntos de grilla x_j, obtenga la solución numérica $u_N(x_j, t)$ para $t = 1$, 2, 10 y 100 utilizando un método de Runge-Kutta de orden 2 para la integración temporal. Compare la solución con la obtenida en el ejercio 2) anterior. Observar qué sucede si se realiza o no de-aliasing. Compare con un método en diferencias finitas de segundo orden con $N = 32$, 512 y 4096 puntos de grilla.