6.6 *Transformación de Lorentz*

Al final del siglo diecinueve, cuando se suponía que el espacio, vacío de materia, estaba lleno con "éter", hubo una gran discusión en lo que respecta a cómo se movían los cuerpos a través del éter y cómo afectaría este movimiento la velocidad de la luz medida desde la tierra. Los físicos al principio habían supuesto que las vibraciones de este éter hipotético estaban relacionadas con la luz del mismo modo que las vibraciones en el aire están relacionadas con el sonido. Suponiendo el éter estacionario, encontramos que la luz se desplaza con respecto al éter con una velocidad $c = 2{,}9979 \times 10^8$ ms^{-1}. Si la tierra se moviera a través del éter sin alterarlo, entonces la velocidad de la luz con respecto a la tierra debía depender de la dirección de propagación de la luz. Por ejemplo, debía ser $c - v$ para un rayo de luz que se propaga en la misma dirección del movimiento de la tierra y $c + v$ en la dirección opuesta. Sin embargo, si la trayectoria de la luz como se observa desde la tierra es en dirección perpendicular a su movimiento, su velocidad relativa a la tierra debía ser $\sqrt{c^2 - v^2}$. (Recordar el ejemplo 6.2d para un caso similar del sonido).

En 1881 los físicos norteamericanos Michelson y Morley iniciaron una serie de experimentos memorables para medir la velocidad de luz en diferentes direcciones con respecto a la tierra. Con gran sorpresa encontraron que la velocidad de la luz era la misma en todas las direcciones.* Sin embargo, la transformación Galileana indica que ningún cuerpo puede tener la misma velocidad relativa a dos observadores en movimiento uniforme relativo, y que la velocidad relativa depende de la dirección del movimiento del observador. Esto se aprecia particularmente en las ecs. (6.9) y (6.10). Una explicación posible podría ser que la tierra arrastrara al éter con ella, como arrastra a la atmósfera, y por consiguiente cerca a la superficie terrestre el éter estaría en reposo relativo con respecto a la tierra. Esta es una explicación poco probable, ya que el arrastre del éter se manifestaría asimismo en otros fenómenos relacionados con la propagación de la luz. Tales fenómenos no se han observado nunca. Por tales razones la idea del éter ha sido descartada por los físicos.

El dilema del experimento de Michelson y Morley fue resuelto en 1905 cuando Einstein estableció su principio de relatividad el cual se discutirá en más detalle en la sección 11.3. Este principio establece que

> *todas las leyes de la naturaleza son las mismas (es decir, permanecen invariantes) para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme.*

Einstein supuso que la velocidad de la luz es una invariante física que tiene el mismo valor para todos los observadores. Como veremos posteriormente, esto se requiere cuando aplicamos el principio de relatividad a las leyes del electromagnetismo. Bajo esta suposición, la transformación galileana no es la correcta. En particular la cuarta ecuación en (6.8) $t' = t$ no puede ser correcta. Puesto que la velocidad es la distancia dividida entre el tiempo, tenemos que ajustar el tiempo al igual que la distancia, si el cociente de las dos debe ser el mismo para observadores en movimiento relativo como en el caso de la velocidad de la luz. En otras palabras, el intervalo de tiempo entre dos eventos *no tiene* necesariamente que ser el mismo para observadores en movimiento relativo. Por consiguiente debemos reemplazar la transformación Galileana por otra de modo que la velocidad de la luz sea una invariante. Como en el caso de la transformación Galileana, supondremos que los observadores O y O' se mueven con velocidad relativa $\boldsymbol{v}$ y que los ejes X y X' señalan en la dirección del movimiento relativo y los ejes YZ e YZ' son paralelos respectivamente (Fig. 6-14). Podemos también

---

* Para una revisión crítica de los experimentos realizados para determinar la velocidad de la luz con respecto a la tierra en diferentes direcciones, consultar R. S. Shankland, *et al.*, *Reviews of Modern Physics* **27**, 167 (1955).

suponer que ambos observadores ajustan sus relojes de modo que $t = t' = 0$ cuando ellos coinciden.

Supongamos que para $t = 0$ se emite un destello de luz en la posición común. Después de un tiempo t el observador O notará que la luz ha llegado al punto A y escribirá $r = ct$, siendo c la velocidad de la luz. Ya que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

podemos también escribir

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{6.30}$$

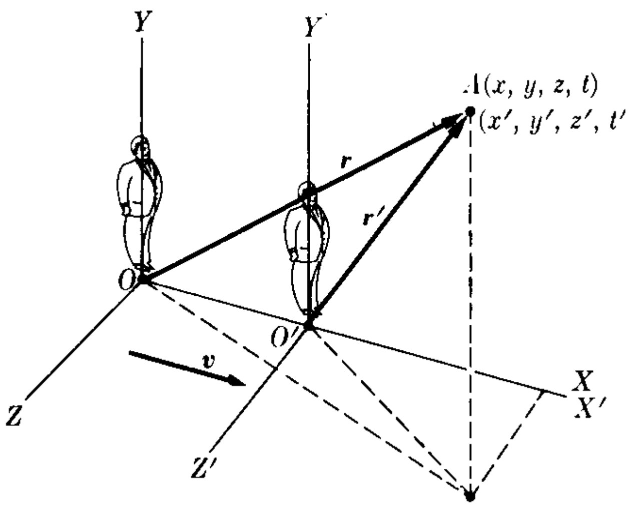

Fig. 6-14. Sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación uniforme.

Similarmente, el observador O' notará que la luz llega al mismo punto A en un tiempo t', pero también con velocidad c. Luego él escribe $r' = ct'$, o

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{6.31}$$

Nuestro propósito es obtener una transformación que relacione las ecs. (6.30) y (6.31). La simetría del problema sugiere $y' = y$ y $z' = z$. También, ya que $OO' = vt$ para el observador O, debe cumplirse que $x = vt$ para $x' = 0$ (punto O'). Esto hace suponer que $x' = k(x - vt)$, donde k es una constante a determinarse. Ya que t' es diferente, podemos también suponer que $t' = a(t - bx)$, donde a y b son constantes a determinarse (para la transformación Galileana $k = a = 1$ y $b = 0$). Realizando todas estas substituciones en la ec. (6.31) tenemos

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2),$$

ó

$$(k^2 - b^2a^2c^2)x^2 - 2(k^2v - ba^2c^2)xt + y^2 + z^2$$
$$= (a^2 - k^2v^2/c^2)c^2t^2.$$

Este resultado debe ser idéntico a la ec. (6.30). Por tanto

$$k^2 - b^2a^2c^2 = 1, \qquad k^2v - ba^2c^2 = 0, \qquad a^2 - k^2v^2/c^2 = 1.$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones, obtenemos

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad b = v/c^2. \tag{6.32}$$

La nueva transformación, compatible con la invariancia de la velocidad de la luz, es entonces

$$
\begin{aligned}
x' &= k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= k(t - bx) = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{6.33}
$$

Este conjunto de relaciones es denominado *transformación de Lorentz* debido a que fue obtenida por primera vez por el físico holandés Hendrik Lorentz, alrededor de 1890, en conexión con el problema del campo electromagnético de una carga en movimiento.

Cuando notamos que c es una velocidad muy grande comparada con las velocidades que encontramos en la tierra, de modo que la relación v/c es muy pequeña, los términos v^2/c^2 y vx/c^2 son, en general, despreciables y k es prácticamente igual a uno (ver Fig. 6-15). Desde el punto de vista práctico, entonces, no hay diferencia entre las transformaciones Lorentziana y Galileana, y podemos seguir usando la última en la mayor parte de los problemas que encontramos. Sin embargo, cuando tratamos con partículas muy rápidas, tales como los electrones en los átomos o las partículas en los rayos cósmicos, *debemos* usar la transformación de Lorentz.

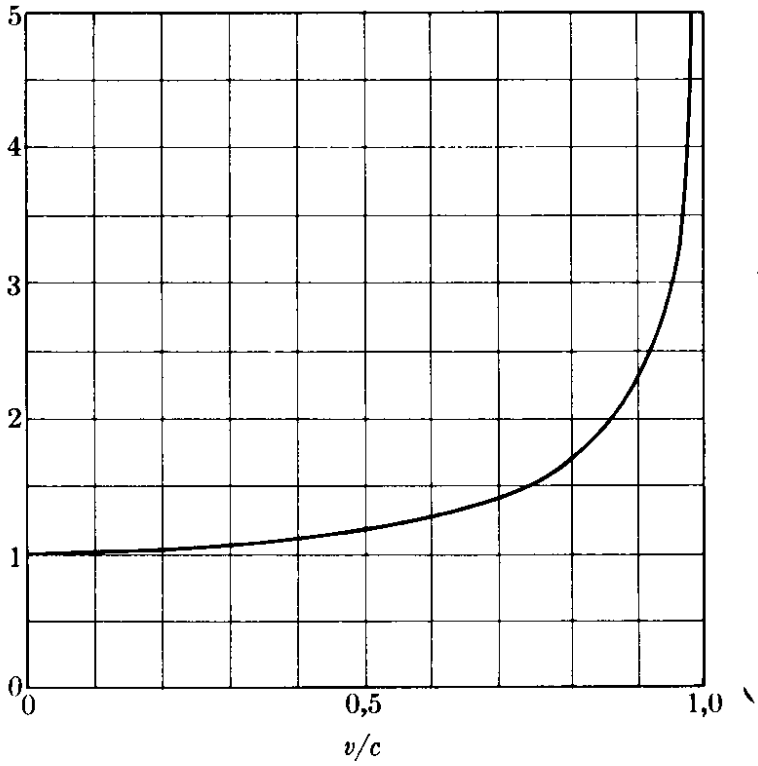

Fig. 6-15. Cambio de k en función de v/c.

EJEMPLO 6.4. Obtener la transformación de Lorentz que exprese las coordenadas x, y, z y el tiempo t medido por O en función de las coordenadas x' y', z' y el tiempo t' medido por O'.

Solución: Esta es la transformación Lorentziana inversa a aquélla expresada por la ec. (6.33). Por supuesto, la segunda y tercera relaciones no ofrecen ninguna dificultad. Una manera simple de resolver la primera y la cuarta es resolverlas como un conjunto de dos ecuaciones simultáneas para x y t en función de x' y t'. Dejamos este método como un ejercicio para el estudiante, sin embargo, y procederemos a lo largo de una línea de razonamiento más física. Desde el punto de vista del observador O', el observador O se aleja en la dirección $-X'$ con una velocidad $-\boldsymbol{v}$. El observador O' tiene derecho a usar la misma transformación de Lorentz para obtener los valores de x y t medidos por O en función de los valores x' y t' que mide O'. Para ello el observador O' tiene solamente que reemplazar $\boldsymbol{v}$ por $-\boldsymbol{v}$ en la ec. (6.33) e intercambiar x, t con x', t'. Así

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{6.34}$$

que da la transformación inversa de Lorentz.

6.7 Transformación de velocidades

Obtengamos ahora la regla para comparar velocidades. La velocidad de A medida por O tiene componentes

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt}. \tag{6.35}$$

Similarmente, las componentes de la velocidad de A medida por O' son

$$V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \qquad V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \qquad V'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}.$$

Nótese que nosotros usamos dt' y no dt, ya que t y t' no son las mismas. Difeenciando las ecs. (6.33) obtenemos

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dt, \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \frac{dt - v\,dx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - vV_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dt. \end{aligned}$$

En la primera y última ecuación dx ha sido reemplazada por $V_x dt$, de acuerdo a la ec. (6.35). Por consiguiente, dividiendo las tres primeras de estas ecuaciones entre la cuarta, obtenemos

$$
\begin{aligned}
V'_{x'} &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2},\\
V'_{y'} &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2},\\
V'_{z'} &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}.
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

Este conjunto de ecuaciones da la ley de transformación de Lorentz para las velocidades; esto es, la regla para comparar la velocidad de un cuerpo medida por dos observadores en movimiento uniforme de traslación relativa. Nuevamente se reduce a la ec. (6.10) cuando la velocidad relativa es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz. Para partículas que se mueven en la dirección X tenemos $V_x = V$, $V_y = V_z = 0$. Por consiguiente, como $V'_{x'} = V'$ ya que las otras dos componentes de V' son cero, la ec. (6.36) se vuelve

$$V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2}. \tag{6.37}$$

Para verificar que la ec. (6.37) es compatible con la suposición que la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores O y O', consideremos el caso de una señal lumínica que se propaga en la dirección X. Luego $V = c$ en la ec. (6.37) y

$$V' = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c.$$

Por lo tanto el observador O' mide también una velocidad c. Resolviendo la ec. (6.37) para V, obtenemos

$$V = \frac{V' + v}{1 - vV'/c^2}, \tag{6.38}$$

que es la transformación inversa de la ec. (6.37). Nótese que si V' y v son ambas menores que c, entonces V es también menor que c. Además, la velocidad v no puede ser mayor que c porque el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ sería imaginario. Por el momento no podemos dar un significado físico a tal factor. Por consiguiente la velocidad de la luz es la máxima velocidad que puede observarse.

Debe también notarse que las ecs. (6.37) o (6.38) relacionan la velocidad del *mismo* cuerpo medida por dos observadores en movimiento relativo. Sin embargo, un observador dado combina *diferentes* velocidades en su propio sistema de referencia de acuerdo a las reglas establecidas en el capítulo 3.

EJEMPLO 6.5. Verificar el hecho de que las transformaciones de velocidades ec. (6.36), son compatibles con la suposición de que la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores considerando un rayo de luz que se mueve a lo largo (a) del eje Y con respecto a XYZ, (b) del eje Y' con respecto a $X'Y'Z'$.

Solución: (a) En este caso debemos suponer que $V_x = 0$, $V_y = c$, y $V_z = 0$. Así la ec. (6.36) se vuelve

$$V'_{x'} = -v, \qquad V'_{y'} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad V'_{z'} = 0.$$

Entonces la velocidad relativa a $X'Y'Z'$ es

$$V' = \sqrt{V'^2_{x'} + V'^2_{y'}} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c,$$

y el observador O' mide también una velocidad c para la luz, como se requirió cuando se derivó la transformación de Lorentz. Al observador en movimiento O' le parece que la luz se propaga con respecto al sistema $X'Y'Z'$ en una dirección que hace un ángulo con el eje X' dado por

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{V'_{y'}}{V'_{x'}} = \frac{-c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

(b) Consideremos ahora el caso en el cual el observador O' ve el rayo de luz propagándose a lo largo del eje Y'. Luego $V'_{x'} = 0$ y las dos primeras expresiones en la ec. (6.36) dan

$$0 = \frac{V - v}{1 - vV_x/c^2}, \qquad V'_{y'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}.$$

De la primera ecuación obtenemos $V_x = V$, la cual, cuando se reemplaza en la segunda ecuación, da

$$V'_{y'} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Pero para el observador O, quien mide la velocidad de la luz como c, tenemos

$$c = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{v^2 + V_y^2} \quad \text{ó} \quad V = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

la cual, cuando se reemplaza en la expresión previa de $V'_{y'}$ da $V'_{y'} = c$. Una vez más verificamos que el observador O' mide también la velocidad de la luz como c. La dirección en la cual el observador ve el rayo de luz hace un ángulo α con el eje de las X dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Los resultados de este problema deben ser comparados con aquellos del ejemplo 6.2 para el sonido, en el cual se usó la transformación Galileana.

EJEMPLO 6.6. Obtener la relación entre la aceleración de una partícula medida por dos observadores en movimiento relativo. Suponer por simplicidad que, en el instante de la comparación, la partícula está en reposo relativo con respecto al observador O'.

Solución: La componente X de la aceleración de la partícula, medida por O', es

$$a'_{x'} = \frac{dV'_{x'}}{dt'} = \frac{dV'_{x'}}{dt}\,\frac{dt}{dt'}.$$

Usando el valor de $V'_{x'}$ de la primera relación de la ec. (6.36) y reemplazando las derivadas apropiadas, tenemos

$$a'_{x'} = \left[\frac{a_x}{1 - vV_x/c^2} + \frac{(V_x - v)va_x/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2}\right]\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} = a_x\frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x/c^2)^3}.$$

En el instante cuando la partícula se encuentra en reposo relativo con respecto a O', $V_x = v$ y

$$a'_{x'} = \frac{a_x}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = k^3 a_x.$$

Por un análisis similar encontramos que

$$a'_{y'} = \frac{a_y}{1 - v^2/c^2} = k^2 a_y, \qquad a'_{z'} = \frac{a_z}{1 - v^2/c^2} = k^2 a_z.$$

Este resultado difiere del de la ec. (6.14) de la transformación Galileana, ya que en este caso la aceleración no es la misma para ambos observadores en movimiento relativo uniforme. En otras palabras, el requisito de que la velocidad de la luz sea invariante en todos los sistemas de referencia que se encuentran en movimiento relativo uniforme destruye la invariancia de la aceleración.

Es importante conocer la relación entre las magnitudes de la aceleración observada por O y O'. Ahora

$$\begin{aligned} a'^2 &= a'^2_{y'} + a'^2_{y'} + a'^2_{z'} \\ &= \frac{a_x^2}{(1 - v^2/c^2)^3} + \frac{a_y^2}{(1 - v^2/c^2)^2} + \frac{a_z^2}{(1 - v^2/c^2)^2} \\ &= \frac{a_x^2 + (a_y^2 + a_z^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^3} \\ &= \frac{a^2 - v^2(a_y^2 + a_z^2)/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \end{aligned}$$

Pero $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x v$ y $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{u}_y v a_z + \boldsymbol{u}_z v a_y$, de modo que $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})^2 = v^2(a_y^2 + a_z^2)$. Por consiguiente

$$a'^2 = \frac{a^2 - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \tag{6.39}$$

que es la relación requerida. Cuando la aceleración es paralela a la velocidad, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = 0$ y $\alpha' = a/(1 - v^2/c^2)^{3/2}$. Este resultado está de acuerdo con la relación entre a_x y $a'_{y'}$. Cuando la aceleración es perpendicular a la velocidad $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v})^2 = v^2 a^2$ y $a' = a/(1 - v^2/c^2)$ que coincide con la relación entre a_y, a_z y $a'_{y'}$, $a'_{z'}$.

6.8 Consecuencias de la transformación de Lorentz

El factor $k = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que aparece en la ec. (6.33) sugiere que las longitudes de los cuerpos y los intervalos de los tiempos entre eventos dados pueden no ser los mismos cuando se miden por observadores diferentes. Discutiremos ahora esta importante cuestión.

(1) ***Contracción de la longitud.*** La longitud de un objeto puede definirse como la distancia entre sus extremos. Sin embargo, si el objeto cuya longitud se mide se encuentra en movimiento relativo con respecto a un observador, las posiciones de sus dos extremos deben ser medidas *simultáneamente.* Consideremos una barra en reposo relativo a O' y paralela al eje $O'X'$. Designando sus dos extremos por a y b, su longitud medida por O' es $L' = x'_b - x'_a$. La simultaneidad no es necesaria para O' debido a que él ve la barra en reposo. Sin embargo, el observador O, quien ve la barra en movimiento, debe medir las coordenadas x_a y x_b de los extremos al mismo tiempo t, obteniendo $L = x_b - x_a$. Aplicando la primera relación en la ec. (6.33) encontramos que

$$x'_a = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y

$$x'_b = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Nótese que escribimos el mismo tiempo en ambas expresiones. Ahora, sustrayendo

$$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{ó} \qquad L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L'. \tag{6.40}$$

Puesto que el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ es menor que la unidad, tenemos una situación en la cual L es menor que L', esto es el observador O, quien ve el objeto en movimiento, mide una longitud *menor* que el observador O', quien ve el objeto en reposo. En otras palabras, *los objetos en movimiento parecen más cortos;* esto es $L_{\text{movimiento}} < L_{\text{reposo}}$.

(2) ***Dilatación del tiempo.*** *Un intervalo de tiempo* puede definirse como el tiempo que transcurre entre dos eventos, medido por un observador. Un *evento* es una ocurrencia específica que sucede en un punto particular del espacio y en un tiempo particular. Así, en función de estas definiciones, cuando la masa del péndulo alcanza su máxima altura durante una oscilación, esto constituye un evento. Después de un cierto período de tiempo retornará a esta misma posición; esto es un segundo evento. El tiempo transcurrido entre estos dos eventos es entonces un intervalo. Así un intervalo es el tiempo que toma hacer algo: oscilar para un péndulo, girar alrededor del núcleo para un electrón, desintegrarse para una partícula radioactiva, latir para un corazón, etc.

Consideremos dos eventos que ocurren en el mismo lugar x' con respecto a un observador O'. El intervalo entre estos eventos es $T' = t'_b - t'_a$. Para un observador O con respecto a quien O' se está moviendo con velocidad constante v en la dirección positiva de las X, el intervalo es $T = t_b - t_a$. Para encontrar la relación entre los tiempos en los cuales ocurren los dos eventos, registrados por ambos observadores, usamos la última de las ecs. (6.34). Esto nos da

$$t_a = \frac{t'_a + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t_b = \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Nótese que escribimos la misma x' en ambas expresiones. Por consiguiente, restando t_a de t_b, tenemos

$$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{ó} \quad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.41}$$

Ahora T' es el intervalo de tiempo medido por un observador O' *en reposo* con respecto al punto en el cual tienen lugar los eventos, y T es el intervalo de tiempo medido por un observador O relativo al cual el punto está en *movimiento* cuando los eventos ocurren. Esto es, el observador O ve que los eventos ocurren en dos posiciones diferentes del espacio. Puesto que el factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ es mayor que uno, la ec. (6.41) indica que T es *mayor* que T'. Por consiguiente *los procesos parecen tomar más tiempo cuando ocurren en un cuerpo en movimiento relativo a un observador que cuando el cuerpo está en reposo relativo al observador; esto es* $T_{\text{movimiento}} < T_{\text{reposo}}$.

Es importante analizar la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud en mayor detalle, ya que estos resultados son contrarios a nuestras expectativas *a priori*. Demostraremos en una manera más directa que la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud son consecuencias directas de la invariancia (constancia) de la velocidad de la luz. Consideremos de nuevo a dos observadores O y O' en movimiento relativo a lo largo del eje X con velocidad v. En la Fig. 6-16, M' es un espejo en reposo relativo a O' y situado a una distancia L del origen a lo largo del eje Y'. Esta es la misma distancia medida por O ya que el espejo se encuentra en una posición perpendicular a la dirección del movimiento. Supongamos que, cuando O y O' coinciden se envía un rayo de luz desde su posición común hacia el espejo. Para el observador que ve el espejo en movimiento, la señal de luz debe enviarse haciendo un ángulo dependiente de la velocidad del espejo y la distancia L. Sean T y T' los tiempos registrados por O y O' para que la señal de luz retorne a O' después que se haya reflejado en el espejo. En el sistema O', la luz retornará al origen, pero en el sistema O la luz cruzará el eje X a una distancia vT del origen. Con respecto a O', la trayectoria de la señal de luz es $O'M'O' = 2L$ y el tiempo transcurrido es $T' = 2L/c$, ya que O' mide la

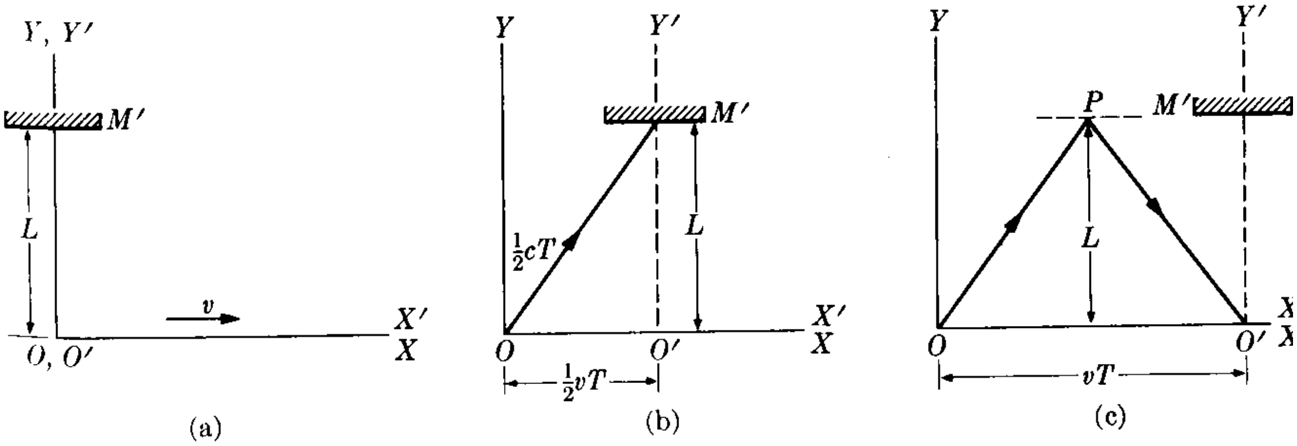

Figura 6-16

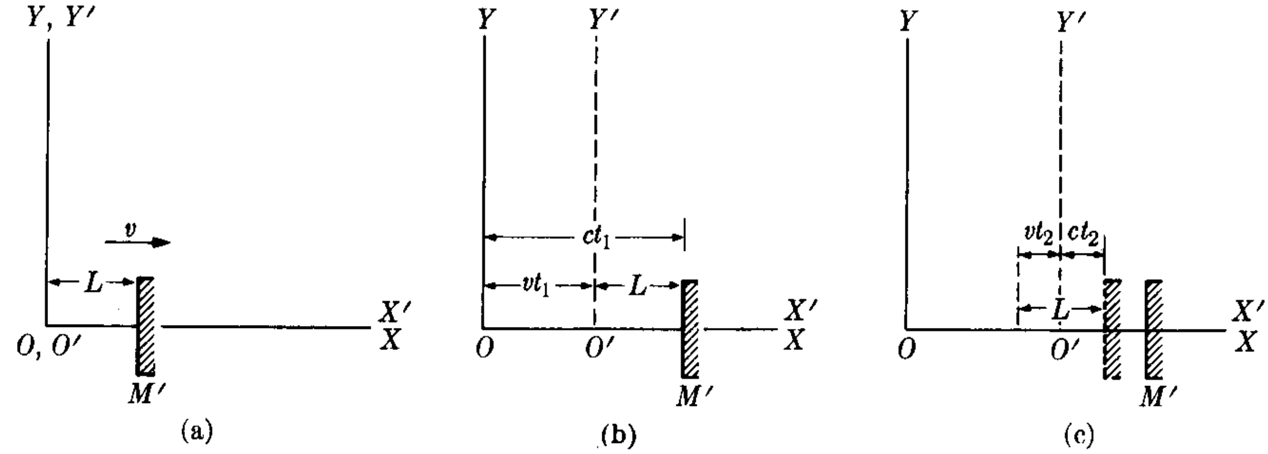

Figura 6-17

velocidad de la luz como c. Este intervalo de tiempo corresponde a dos eventos que tienen lugar en el mismo punto (O') respecto a O'.

Con respecto al observador O, quien mide la velocidad como c, la trayectoria de la señal es OPO', y por ello O aplica la relación (de la Fig. 6-16b) $(\frac{1}{2}cT) = = (\frac{1}{2}vT)^2 + L^2$ o $T = (2L/c)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Por consiguiente $T = T'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, que es la ec. (6.41). Nótese que hemos obtenido la dilatación del tiempo requiriendo que la velocidad de la luz sea la misma para todos los observadores inerciales.

Consideremos ahora el espejo M' colocado a lo largo del eje X' y orientado perpendicularmente a él y a una distancia L' de O' y consideramos el espejo en reposo en el sistema O'. El conjunto se muestra en la Fig. 6-17. Nuevamente cuando O y O' coinciden se lanza una señal de luz hacia el espejo y se miden los tiempos T y T' que toma la luz en regresar a O'. El intervalo para O', quien mide la velocidad de la luz como c, es $T' = 2L'/c$. La distancia $O'M'$ puede no ser la misma para el observador O, y la llamaremos la distancia L. Ahora el tiempo t_1, para que la luz viaje de O al espejo se encuentra de la relación $ct_1 = L + vt_1$ o $t_1 = L(c - v)$, ya que M' ha avanzado la distancia vt_1. Al reflejarse, O mide un tiempo t_2 para que la luz llegue a O', que se ha movido una distancia vt_2 en aquel tiempo (ver Fig. 6-17c). Así $ct_2 = L - vt_2$ o $t_2 = L/(c + v)$. El tiempo total necesario para que la luz llegue a O', medido por O, es así

$$T = t_1 + t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1 - v^2/c^2}.$$

Pero T y T' corresponden a dos eventos que ocurren en el mismo lugar, con respecto a O', y están relacionadas por consiguiente por la ec. (6.41), Así,

$$\frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{ó} \qquad L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L'.$$

Esta ecuación es idéntica a la ec. (6.40) ya que L' es una longitud en reposo con respecto a O'. De estos dos ejemplos, vemos que la constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales afecta, en una manera muy particular, los resultados obtenidos por observadores en movimiento relativo.

EJEMPLO 6.7. Análisis del experimento de Michelson-Morley. Al principio de la sección 6.6, mencionamos el experimento de Michelson-Morley. Lo describiremos ahora sucintamente, y analizaremos los resultados. El arreglo experimental llamado interferómetro se muestra esquemáticamente en la Fig. 6-18, donde S es una fuente monocromática de luz y M_1 y M_2 son dos espejos colocados a la misma distancia L' (medida por un observador terrestre) de un espejo plateado P. La luz que proviene de S, cuando llega a P, es parcialmente transmitida hacia M_1 y parcialmente reflejada hacia M_2. Los rayos reflejados en M_1 y M_2 regresan a P y eventualmente llegan al observador situado en O'. Nótese que la trayectoria de la luz dibujada en la Fig. 6-18 es con respecto al sistema $X'Y'Z'$ que se mueve con la tierra y con respecto al cual el *interferómetro* está en reposo. Se sugiere como ejercicio que el estudiante dibuje la trayectoria de la luz vista por un observador respecto al cual la tierra se mueve con una velocidad v. El equipo experimental real usado por Michelson y Morley se ilustra en la Fig. 6-19.

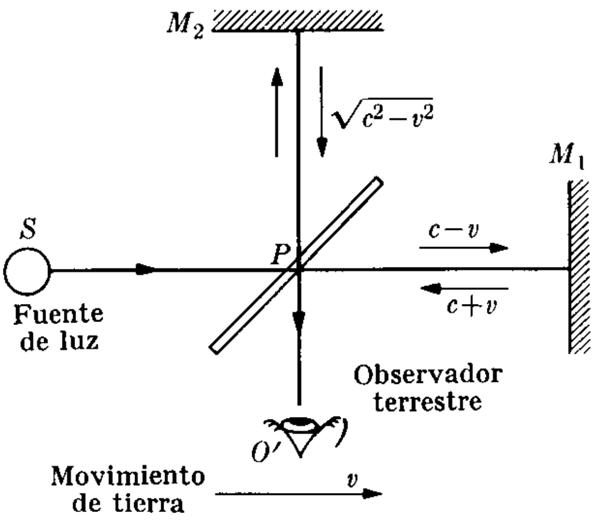

Fig. 6-18. Componentes básicos del experimento de Michelson-Morley.

Solución: Sea c la velocidad de la luz medida por un observador estacionario relativo al éter. Llamemos v a la velocidad de la tierra con respecto al éter, y orientemos el interferómetro de modo que la línea PM_1 sea paralela al movimiento de la tierra.

Cuando usamos la transformación Galileana, encontramos, siguiendo los resultados del ejemplo 6.2, que con respecto a la tierra, la velocidad de la luz que va de P a M_1 es $c - v$, la de M_1 a P es $c + v$ y la que va de P a M_2 ó de M_2 a P es $\sqrt{c^2 - v^2}$. Así el tiempo necesario para que la luz vaya de P a M_1 y de regreso a P, medido por el observador terrestre O', es

$$t'_{\parallel} = \frac{L'}{c - v} + \frac{L'}{c + v} = \frac{2L'c}{c^2 - v^2} = \frac{2L'/c}{1 - v^2/c^2},$$

mientras que el tiempo necesario para ir de P a M_2, y de regreso a P, medido por O', es

$$t'_{\perp} = \frac{2L'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Notamos que $t'_{\parallel}$ y $t'_{\perp}$ son diferentes, y por consiguiente los rayos que llegan al observador $0'$ tienen una diferencia de trayectoria y (de acuerdo a la teoría presentada en el capítulo 22) debería dar por resultado un cierto patrón de interferencia. Sorprendentemente no se observa tal interferencia, como se indicó previamente en la sección 6.6 * Esto sugiere que $t'_{\parallel} = t'_{\perp}$. Para resolver este dilema

* En el experimento real realizado por Michelson, los dos brazos del interferómetro, o más precisamente las longitudes ópticas, eran ligeramente diferentes, dando por resultado un patrón de interferencia. Luego Michelson para compensar esta diferencia y realmente aumentar la precisión de sus mediciones, giró el instrumento 90° (Fig. 6-19). Y aunque la teoría, basada en la transformación Galileana, predecía un corrimiento en el patrón de interferencia como resultado de la rotación, no se observó tal corrimiento.

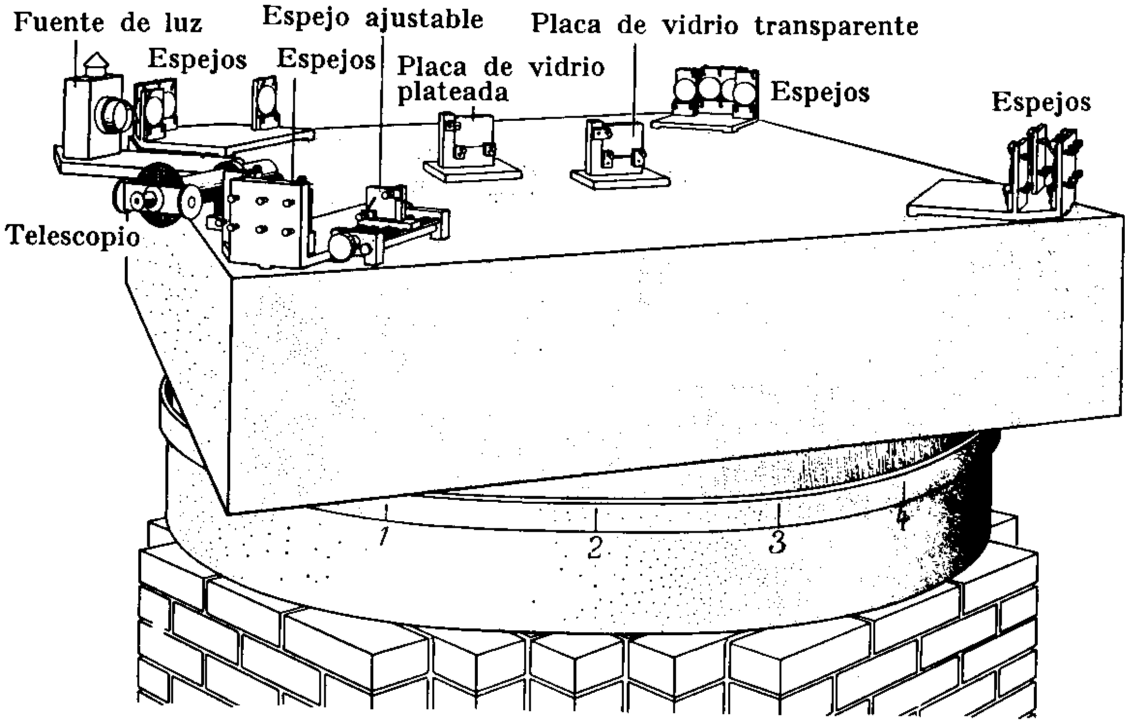

Fig. 6-19. Interferómetro usado por Michelson y Morley en sus mediciones de la velocidad de la luz. Una mesa de piedra que sostiene los espejos, se fija a un anillo de madera que flota en mercurio. La serie de espejos sirven para aumentar la trayectoria total de la luz. La placa no plateada se coloca a lo largo de una de las trayectorias para compensar el hecho de que la otra trayectoria debe pasar a través del vidrio del espejo. El telescopio permite observar las franjas de interferencia. (Dibujo cortesía de *Scientific American.*)

Lorentz, e independientemente Fitzgerald, propusieron que todos los objetos que se mueven a través del éter sufren una contracción "real" en la dirección del movimiento, y que esta contracción es suficiente para hacer que $t'_{\parallel} = t'_{\perp}$. Esto significa que la longitud que aparece en $t'_{\parallel}$ no debe ser la misma longitud que aparece en $t'_{\perp}$, ya que la primera es en la dirección del movimiento de la tierra y la otra perpendicular a ella. Escribiendo L en lugar de L' en la expresión para $t'_{\parallel}$, tenemos

$$t'_{\parallel} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}.$$

Igualando $t'_{\parallel}$ y $t'_{\perp}$, obtenemos, después de simplificar,

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L'. \tag{6.42}$$

Esta expresión relaciona las longitudes PM_1 y PM_2 medidas por un observador O en reposo con respecto al éter. ¡El observador O' no debía notar esta contracción, debido a que la regla que usa para medir la distancia PM_1 está también contraída en la misma proporción que PM_1 cuando se le coloca en la dirección del movimiento de la tierra! Así, para él, las longitudes PM_1 y PM_2 son iguales. Pero el observador O reiría de las preocupaciones de O' ya que él se da cuenta que O' está en movimiento y, de acuerdo a la hipótesis de Lorentz-Fitzgerald, los objetos que él lleva se acortan en la dirección del movimiento. Así O concluye que la longitud "real" de PM_1, es L y la de PM_2 es L', siendo esta diferencia "real" en longitud la razón del resultado negativo obtenido al examinar la interferencia de los dos haces de luz.

Por supuesto, una explicación alternativa del resultado negativo del experimento de Michelson-Morley es suponer que la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones no importa cuál sea el estado de movimiento del observador. Entonces el observador O' utiliza C para todas las trayectorias de la Fig. 6-18 y entonces $t'_{\parallel} = t'_{\perp} = 2L'/C$. Esta fue la posición adoptada por Albert Einstein cuando formuló su principio de relatividad. El estudiante puede, sin embargo, en este momento decir que la contracción "real" supuesta por Lorentz para explicar el resultado negativo es exactamente la misma que la contracción que encontramos en la ec. (6.40) usando la transformación de Lorentz y el principio de la invariancia de la velocidad de la luz. Hay, sin embargo, una diferencia fundamental entre las dos hipótesis usadas para obtener estos dos resultados aparentemente idénticos: (1) La contracción (6.42) obtenida por medio de la transformación Galileana, se supone que es una contracción *real* sufrida por todos los cuerpos que se mueven a través del éter, y la v, que aparece en la fórmula, es la velocidad del objeto con respecto al éter. (2) La contracción (6.40) se refiere sólo al valor *medido* de la longitud del objeto en movimiento con respecto al observador, y es una consecuencia de la invariancia de la velocidad de la luz. La v que aparece en la fórmula es la velocidad del objeto con respecto al observador y así la contracción es diferente para diferentes observadores. El gran ingenio de Einstein lo llevó a comprender que la idea del éter era artificial e innecesaria, y que la explicación lógica era la segunda. Este fue el postulado básico que Einstein utilizó para formular el principio de la relatividad como veremos en el capítulo 11.

11
DINAMICA DE ALTA ENERGIA

11.1 Introducción
11.2 Principio clásico de relatividad
11.3 Principio especial de relatividad
11.4 Momentum
11.5 Fuerza
11.6 Energía
11.7 Transformación de energía y momentum
11.8 Transformación de fuerza
11.9 Sistemas de partículas
11.10 Colisiones de alta energía

11.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos desarrollado una teoría llamada mecánica *clásica* o *newtoniana* para describir el movimiento de cuerpos que observamos a nuestro alrededor. La teoría se basa en varias suposiciones. Por ejemplo, hemos visto que el momentum puede expresarse como $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, donde la masa m es un coeficiente característico de la partícula o del sistema; hemos considerado siempre esta masa m como un coeficiente invariante de cada partícula o sistema. Siempre que la magnitud de las velocidades que observamos no sea muy grande, esta suposición sobre la masa parece ser válida y compatible con nuestra experiencia. Pero existe la posibilidad de que experimentando con velocidades muy grandes esta suposición no permanezca correcta. De hecho, se encuentran discrepancias al estudiar el movimiento de partículas muy energéticas, tales como los electrones interiores de los átomos o las partículas halladas en los rayos cósmicos o producidas en los aceleradores de alta energía. El propósito de este capítulo es desarrollar una teoría general del movimiento válida para partículas tanto de baja como de alta energía. Apoyaremos el desarrollo de esta teoría en la transformación de Lorentz, ya discutida en la sección 6.6, y en el *principio de relatividad.* Por esta razón la nueva teoría se llama también *mecánica relativista.*

11.2 Principio clásico de la relatividad

En el capítulo 6 discutimos la naturaleza relativa del movimiento y derivamos expresiones para las velocidades y aceleraciones tal como son medidas por dos observadores en movimiento relativo. En particular, en la sección 6.3, derivamos la transformación galileana para dos observadores en movimiento traslacional uniforme relativo.

En el capítulo 7 enfatizamos el hecho de que las leyes del movimiento tienen que ser consideradas como referidas, o relativas, a un observador inercial. Ahora supondremos que dos observadores inerciales diferentes, moviéndose con velocidad constante relativa, correlacionarán por la transformación de Galileo sus respectivas observaciones del mismo fenómeno. Debemos ahora observar críticamente este asunto, verificando que si las leyes de la dinámica son válidas para un observador inercial, también lo son para todos los observadores inerciales. Es necesario verificar este enunciado sólo para el *principio de conservación del momentum* y para la *definición de fuerza,* ya que todas las otras leyes de la dinámica se derivan de esas dos. La hipótesis de que *todas las leyes de la dinámica deben ser las mismas para todos los observadores inerciales, que se mueven con velocidad constante unos con respecto a otros,* es lo que constituye el *principio clásico de relatividad.*

Consideremos dos partículas, de masas m_1 y m_2, y llamemos $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ sus velocidades medidas por un observador inercial O. Si no hay fuerzas externas que actúen sobre las partículas, el principio de conservación del momentum requiere que

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \text{const.} \tag{11.1}$$

Para otro observador inercial O', que se mueve relativamente a O con la velocidad constante $\boldsymbol{v}$, las velocidades de m_1 y m_2 son $\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}$, de acuerdo con la ec. (6.9), derivada de la transformación de Galileo. Sustituyendo tales valores en la ec. (11.1) tenemos

$$m_1(\boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}) + m_2(\boldsymbol{v}_2' + \boldsymbol{v}) = \text{const},$$

ó

$$m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = \text{const} - (m_1 + m_2)\boldsymbol{v} = \text{const}. \tag{11.2}$$

Notemos que el nuevo resultado es constante sólo si $\boldsymbol{v}$ es también constante; esto es, si O' es otro observador inercial. La ec. (11.2) es completamente similar a la ec. (11.1) y, por consiguiente, ambos observadores inerciales verifican el mismo principio de conservación del momentum.

Discutamos en seguida la relación entre la fuerza medida por dos observadores O y O' moviéndose con una velocidad relativa constante $\boldsymbol{v}$. Supongamos que O y O' miden ambos la misma masa para una partícula que observan en movimiento, una suposición basada en la experiencia, por lo menos siempre que la velocidad relativa $\boldsymbol{v}$ sea pequeña comparada con la velocidad de la luz. Si $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}'$ son los valores respectivos de la velocidad de la partícula con respecto a los dos observadores, ellas están relacionadas por la ec. (6.9), $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{v}$. Ya que $\boldsymbol{v}$ es constante, $d\boldsymbol{v}/dt = 0$, y tenemos que

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{11.3}$$

Esto es, ambos observadores miden la misma aceleración (recordar la ec. 6.13). Según la definición de fuerza dada en la ec. (7.12), tenemos que la fuerza medida por cada observador es

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = m\boldsymbol{a} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F}' = \frac{d\boldsymbol{p}'}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = m\boldsymbol{a}'.$$

En vista de que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, concluimos que

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'. \tag{11.4}$$

Por consiguiente *ambos observadores inerciales miden la misma fuerza sobre la partícula* cuando tales observadores comparan sus medidas usando la transformación de Galileo.

Dejamos al estudiante la tarea de verificar que si la energía se conserva con respecto al observador inercial O, esto es, que si

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + E_{p,12} = \text{const},$$

entonces, también se conserva con relación al observador inercial O', y

$$E' = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + E_{p,12}' = \text{const},$$

donde $E'_{p,12} = E_{p,12}$ si la energía potencial depende únicamente de la distancia entre las partículas. (Para la relación entre E' y E, ver el problema 11.1). Por consiguiente, en lo que concierne a las leyes fundamentales de la dinámica, la descripción del movimiento es la misma para ambos observadores inerciales.

EJEMPLO 11.1. Discutir la forma de la ecuación del movimiento cuando es usada con referencia a un observador no inercial.

Solución: Si un observador O' es no inercial, ello significa que su velocidad $\boldsymbol{v}$, relativa a un observador inercial O, no es constante en el tiempo. Por tanto $d\boldsymbol{v}/dt \neq 0$. Entonces, dado que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{v}$, tenemos que

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

La fuerza medida por el observador inercial es $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Entonces, si el observador no inercial O' utiliza la misma definición de fuerza debe escribir $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$. Por tanto, en vista de la relación entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}'$.

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} - m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{11.5}$$

De esa manera *el observador no inercial mide una fuerza diferente de la que mide el observador inercial.* En otras palabras, el observador no inercial considera que, además de la fuerza $\boldsymbol{F}$ medida por el observador inercial (que incluye todas las interacciones a las que está sujeta la partícula), hay otra fuerza $\boldsymbol{F}''$ actuando sobre la partícula,

$$\boldsymbol{F}'' = -m\, d\boldsymbol{v}/dt, \tag{11.6}$$

de modo que la fuerza resultante sobre la partícula es $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}''$. Esta fuerza ficticia se llama *fuerza inercial.*

Cuando deseamos describir el movimiento de una partícula con relación a la tierra (que no es un sistema inercial de referencia) usamos este tipo de lógica. En este caso $d\boldsymbol{v}/dt$ es la aceleración centrípeta $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ (recordar la ec. 6.25). Por consiguiente la fuerza inercial es $\boldsymbol{F}'' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ y corresponde a una fuerza centrífuga actuante sobre la partícula además del peso.

11.3 Principio especial de relatividad

En 1905, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) dio un paso más adelante y propuso el *principio especial de relatividad,* enunciando que

> *todas las leyes de la naturaleza (no solamente de la dinámica) deben ser las mismas para todos los observadores inerciales moviéndose con velocidad constante unos con respecto a otros.*

Este principio nuevo, o especial, de relatividad tiene importantes consecuencias, porque si lo aceptamos, debemos expresar todas las leyes físicas de tal modo que no cambien al pasar de un observador inercial a otro, hecho que acabamos de verificar para las leyes de la dinámica, usando la transformación galileana. El resultado de esta exigencia es la restricción impuesta sobre la expresión matemática de dichas leyes. Entre las leyes que deben permanecer invariantes para todos los observadores inerciales están aquellas que describen los fenómenos electromagnéticos; ellas serán discutidas en detalle en capítulos posteriores.

Pero podemos adelantar que dichas leyes, al ser expresadas con relación a un observador inercial, incluyen una velocidad c, esto es, la velocidad de la luz. Por consiguiente, el principio especial de relatividad, tal como fue formulado por Einstein, requiere que la velocidad de la luz sea la misma para todos los observadores inerciales.

La suposición de Einstein fue motivada en parte por la memorable serie de experimentos empezados alrededor de 1880 por Michelson y Morley, quienes midieron la velocidad de la luz en diferentes direcciones, tratando de ver cómo era afectada por el movimiento de la tierra. Discutimos este experimento en el capítulo 6 (particularmente en el ejemplo 6.7). Los resultados, como se indicó en el capítulo 6, han sido siempre negativos, indicando que *la magnitud de la velocidad de la luz es independiente del movimiento del observador.*

Ahora, de acuerdo a la ec. (6.9), la velocidad de un objeto nunca es la misma para dos observadores en movimiento relativo si sus observaciones están relacionadas por una transformación Galileana. Por otra parte, la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales si sus medidas se relacionan entre sí por medio de la transformación de Lorentz, como se discutió en la sección 6.6. Por consiguiente, para satisfacer el nuevo principio de relatividad, debemos usar la transformación de Lorentz en vez de la transformación de Galileo. Consecuentemente, volveremos a enunciar el principio de relatividad en la siguiente forma:

> *Los observadores inerciales deben correlacionar sus observaciones por medio de la transformación de Lorentz, y todas las magnitudes físicas deben transformarse de un sistema inercial a otro de tal modo que la expresión de las leyes físicas sea la misma para todos los observadores inerciales.*

Lo que resta de este capítulo será dedicado a una discusión de cómo esta nueva formulación del principio de relatividad afecta las cantidades dinámicas definidas previamente. Desde un punto de vista práctico, la teoría que desarrollaremos es importante solamente para velocidades comparables a la de la luz, y, por consiguiente, debe ser usada cuando las partículas tienen una energía muy alta. Para partículas con energías bajas, la transformación Galileana es una aproximación muy buena para relacionar magnitudes físicas en los sistemas inerciales, y la mecánica newtoniana proporciona un formalismo satisfactorio para describir dichos fenómenos. La teoría por desarrollar se llama la teoría *especial* de la relatividad porque se aplica solamente a los observadores inerciales. Cuando los observadores no son inerciales, empleamos la teoría *general* de relatividad, la cual discutiremos brevemente al final del capítulo 13.

Aun si, desde un punto de vista práctico, podemos ignorar la teoría especial de la relatividad en muchos casos, desde un punto de vista conceptual esta teoría ha producido una modificación profunda en nuestros métodos teóricos para analizar los fenómenos físicos.

11.4 Momentum

En el capítulo 7 definimos el momentum de una partícula por $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ y supusimos que la masa m era independiente de la velocidad. Sin embargo, como resultado de muchos experimentos con partículas de alta energía, tales como protones y electrones rápidos producidos por los aceleradores modernos, o encontrados en los rayos cósmicos, se ha hallado que esta suposición ya no es válida. Recordemos que la fuerza aplicada sobre una partícula ha sido definida como $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, y que ejerciendo fuerzas conocidas en partículas veloces podemos determinar experimentalmente la correspondiente expresión para $\boldsymbol{p}$. [Podemos, por ejemplo, observar el movimiento de electrones (u otras partículas cargadas) en campos magnéticos y eléctricos conocidos]. El resultado de esos experimentos ha sido que la masa de la partícula moviéndose con una velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa al observador parece estar dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0. \tag{11.7}$$

Aquí se define k como en la ec. (6.32) y m_0 es una constante característica de cada partícula llamada *masa en reposo*, ya que es el valor de m cuando $v = 0$, esto es, cuando la partícula está en reposo con respecto al observador. La presencia del factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que encontramos antes en el capítulo 6 al tratar de la transformación de Lorentz, no es sorprendente, ya que nuestro nuevo principio de relatividad basado en esta transformación puede requerir su uso.

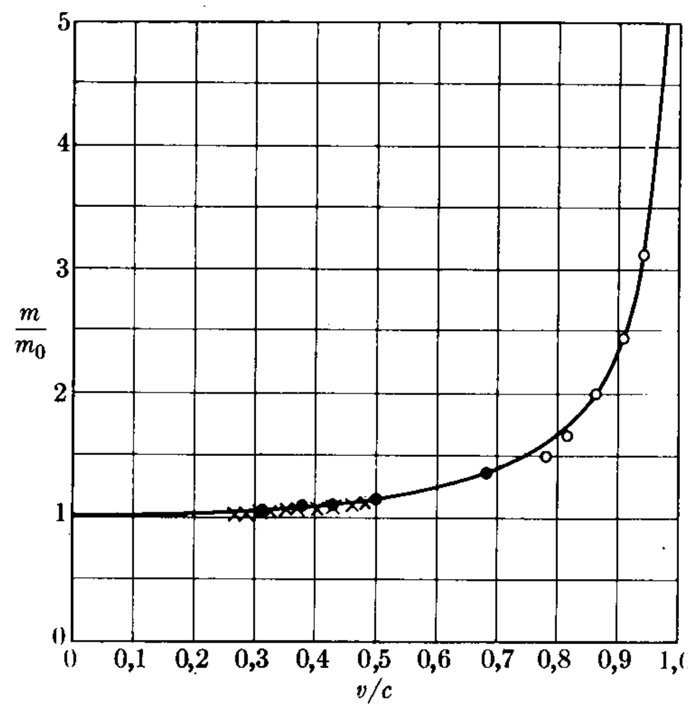

Fig. 11-1. Confirmación experimental de la variación de la masa con la velocidad. La línea es una curva basada en la ec. (11.7). Los datos experimentales de W. Kaufmann (1901) se indican con círculos abiertos, los de A. Bucherer (1909) con círculos negros, y los de C. Guye y C. Lavanchy (1915) con cruces.

La variación de la masa con la velocidad según la ec. (11.7) está ilustrada en la Fig. 11-1. Esta figura es esencialmente idéntica a la Fig. 6-15 ya que ambas dan k en términos de v/c. Puede verse que solamente a muy altas velocidades hay un aumento notable en la masa de la partícula. Por ejemplo, aun para $v = 0{,}5c$, $m/m_0 = 1{,}15$, o sea solamente hay un 15 % de aumento en la masa.

El momentum de una partícula que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa a un observador debe por consiguiente ser expresada por:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0\boldsymbol{v}. \tag{11.8}$$

Para pequeñas velocidades ($v \ll c$), k puede igualarse a 1, y esta nueva expresión viene a ser idéntica a la usada en capítulos anteriores.

Tenemos aún que verificar que esta expresión para el momentum satisface los principios de relatividad. Esto es, debemos verificar que, si el movimiento de la partícula está referido a un observador inercial diferente, respecto al cual la partícula se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}'$, el momentum $\boldsymbol{p}'$ queda expresado al reemplazar $\boldsymbol{v}$ por $\boldsymbol{v}'$ en la ec. (11.8), y que las dos expresiones para el momentum son compatibles con la transformación de Lorentz que relaciona a los dos observadores. Tenemos también que verificar que esta nueva definición del momentum es compatible con la invariancia del principio de conservación del momentum para todos los observadores inerciales. Este asunto será pospuesto hasta las secciones 11.7 y 11.9.

EJEMPLO 11.2. Comparar el aumento relativo en velocidad con el aumento relativo en nomentum.

Solución: El aumento relativo en momentum se define como dp/p, y el aumento relativo en velocidad como dv/v. El momentum y la velocidad están relacionados por la ec. (11.8), cuya forma escalar es

$$p = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

La definición del aumento relativo en velocidad sugiere que primero tomemos el logaritmo de esta expresión. Esto es.

$$\ln p = \ln m_0 + \ln v - \tfrac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Diferenciando, obtenemos

$$\frac{dp}{p} = \frac{dv}{v} + \frac{(v/c^2)\,dv}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\,\frac{dv}{v} = k^2\,\frac{dv}{v}.$$

Vemos entonces que a bajas velocidades, cuando v^2/c^2 es despreciable, tenemos que $dp/p = dv/v$, y los aumentos relativos en momentum y velocidad son iguales, de acuerdo a nuestra experiencia diaria, Sin embargo, a mayores velocidades, comparables, con c, el factor que multiplica a dv/v es muy grande, y así es posible producir un aumento relativamente grande en el momentum con un aumento relativamente pequeño en la velocidad. Por ejemplo, para $v = 0{,}7\,c$, tenemos que $dp/p \approx 2(dv/v)$, y para $v = 0{,}99c$, obtenemos $dp/p \approx 50(dv/v)$.

11.5 Fuerza

En el capítulo 7 definimos la fuerza sobre una partícula por medio de la ec. (7.12), la que fue obtenida del principio de conservación del momentum. Esta definición será mantenida en la mecánica relativística. Por ello redefinimos la fuerza como

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \tag{11.9}$$

Al tratar del *movimiento rectilíneo* consideramos solamente las magnitudes y por tanto podemos escribir

$$F = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] = \frac{m_0(dv/dt)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{1 - v^2/c^2}\frac{dv}{dt}. \tag{11.10}$$

En la ec. (11.10) m tiene el valor dado por la ec. (11.7). Ya que dv/dt es la aceleración, concluimos que para una partícula de alta energía la ecuación $F = ma$ no es respetada en el movimiento rectilíneo. Por otra parte, en el caso del *movimiento circular uniforme*, la velocidad permanece constante en magnitud pero no en dirección y la ec. (11.9) se transforma en

$$\boldsymbol{F} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Pero $d\boldsymbol{v}/dt$ es entonces la aceleración normal o centrípeta cuya magnitud es v^2/R, donde R es el radio de la circunferencia de acuerdo con la ec. (5.44). Por tanto la magnitud de la fuerza normal o centrípeta viene a ser

$$F_N = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\frac{v^2}{R} = m\frac{v^2}{R} = \frac{pv}{R}. \tag{11.11}$$

Observamos que la relación $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ se satisface en el caso del movimiento circular uniforme si usamos para la masa la expresión relativística (11.7). En el caso general del *movimiento curvilíneo*, notando que dv/dt es la aceleración tangencial y que v^2/R la aceleración normal (de acuerdo a la ec. 5.44), concluimos de las ecs. (11.10) y (11.11) que las componentes de la fuerza a lo largo de la tangente y la normal a la trayectoria son, usando la ec. (11.7),

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} a_T = \frac{m}{1 - v^2/c^2} a_T = k^2 m a_T, \\ F_N &= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} a_N = m a_N. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Una conclusión inmediata es que la fuerza *no* es paralela a la aceleración (Fig. 11-2) porque los coeficientes multiplicadores de a_T y a_N son diferentes. Por tanto, una relación vectorial del tipo $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ no existe para partículas que tienen alta energía, a menos que el cuerpo se mueva con movimiento circular uniforme.

Sin embargo, la relación más fundamental $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ permanece aún válida, porque es nuestra *definición* de fuerza. Otro hecho interesante es que, proporcionalmente, la componente tangencial F_T es mayor que la componente normal F_N. Esto sucede porque la fuerza normal cambia solamente la dirección de la velocidad sin cambiar su magnitud, y por tanto sin cambiar tampoco la masa. Pero la fuerza tangencial no solamente cambia la magnitud de la velocidad sino que también, como consecuencia, varía la masa de la partícula.

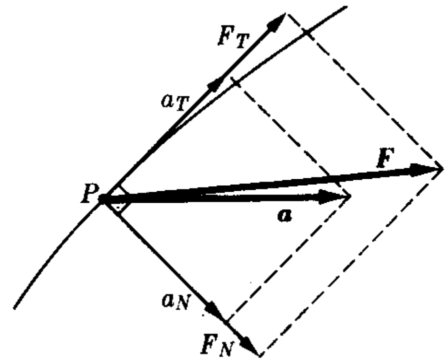

Fig. 11-2. A alta velocidad, la fuerza no es paralela a la aceleración.

EJEMPLO 11.3. Movimiento rectilíneo bajo una fuerza constante en dinámica relativística.

Solución: Este movimiento, en mecánica no relativística, corresponde al movimiento con aceleración constante. Así, si medimos el tiempo y el desplazamiento desde el punto donde la partícula empezó a moverse, podemos usar las ecuaciones (5.10) y (5.11) para hallar que $v = at$ y $x = \frac{1}{2}at^2$, donde $a = F/m_0$ es la aceleración constante. En mecánica relativística empezamos con la ecuación (11.9) escrita escalarmente, ya que el movimiento es en línea recta y no hay cambios en la dirección. Por tanto

$$F = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right].$$

Integrando esta expresión, tomando en cuenta el hecho de que F es constante (y que para $t = 0$, $v = 0$), tenemos

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft.$$

Despejando la velocidad, encontramos que

$$v = c\,\frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2}}.$$

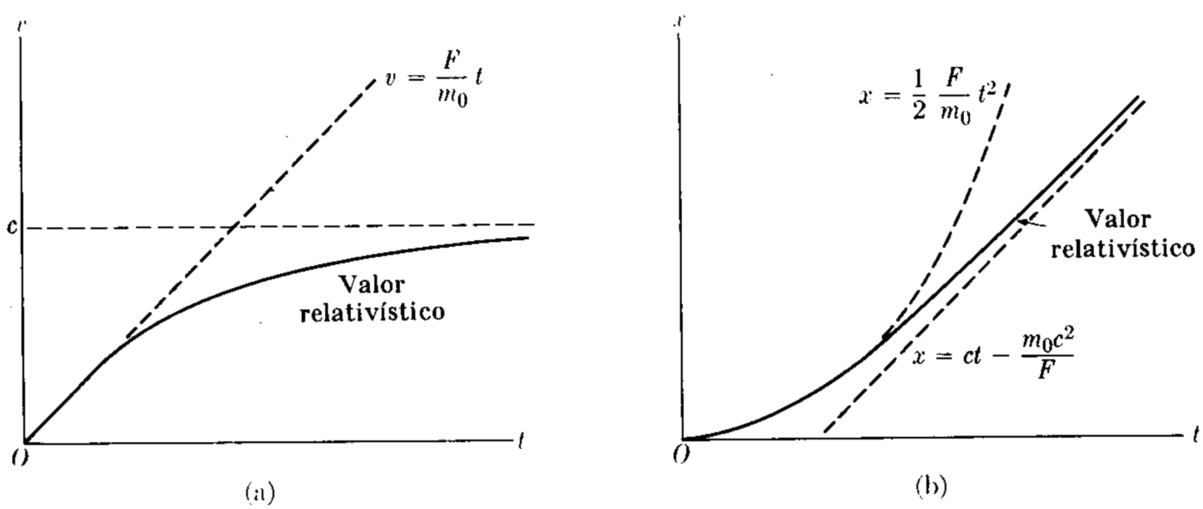

Fig. 11-3. Movimiento rectilíneo relativístico bajo una fuerza constante.

Para muy pequeños valores de t (esto es, cuando la medición tiene lugar al comienzo del movimiento), el segundo término del denominador puede despreciarse y $v \approx (F/m_0)t$, que es la expresión no relativista, ya que en este caso $a = F/m_0$. Para valores grandes de t (esto es, cuando la medición es hecha después que la partícula ha sido acelerada por un largo tiempo), el 1 en el denominador puede ser despreciado en comparación con el segundo término, y $v \approx c$. Por tanto, en vez de aumentar indefinidamente, la velocidad se aproxima al valor límite c, que es la velocidad de la luz. Esta variación de velocidad con el tiempo es indicada por la línea sólida de la Fig. 11-3 (a). El momentum, sin embargo, está dado por $p = Ft$, y aumenta indefinidamente. Para obtener el desplazamiento de la partícula recordamos que $v = dx/dt$. Por tanto

$$\frac{dx}{dt} = c\,\frac{(F/m_0c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0c)^2t^2}}.$$

Integrando (poniendo $x = 0$ cuando $t = 0$), tenemos

$$x = \frac{m_0c^2}{F}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2} - 1\right].$$

Usando la expansión binomial (M.28) con $n = 1/2$, la ecuación se reduce a $x = \frac{1}{2}(F/m_0)t^2$ para valores pequeños de t; este es el valor no relativista. Para valores grandes de t, tenemos $x \approx ct - (m_0c^2/F)$, que corresponde al movimiento uniforme con velocidad c. Por tanto, la distancia es menor que si las expresiones no relativistas fueran válidas a todas las velocidades. Ello se indica por la línea sólida en la Fig. 11-3 (b). Este problema es de interés en muchos aspectos; por ejemplo, en el movimiento de una partícula cargada en un acelerador lineal.

11.6 Energía

Para computar la energía cinética de una partícula usando la nueva definición de momentum, usamos el mismo procedimiento que en la sección 8.5 donde hablábamos de mecánica newtoniana. Esto es, recordando que $v = ds/dt$, obtenemos

$$E_k = \int_0^v F_T\,ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv)\,ds = \int_0^v v\,d(mv).$$

Integrando por partes (ver ec. M.41) y usando la expresión relativista (11.7) para la masa, tenemos

$$E_k = mv^2 - \int_0^v mv\,dv = \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0v\,dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0c^2.$$

Combinando los dos primeros términos del lado derecho en uno solo, obtenemos finalmente la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad v relativa a un observador

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = (m - m_0)c^2, \tag{11.13}$$

donde la ec. (11.7) ha sido usada para escribir la última parte. El resultado (11.13) es muy sugestivo. Indica que la ganancia en energía cinética puede ser considerada como una ganancia en masa como resultado de la dependencia de la masa con la velocidad, de acuerdo a la ec. (11.7). Esta interpretación puede ser extendida para asociar un cambio en la masa Δm a cualquier cambio en la energía ΔE del sistema. Ambos cambios están relacionados por la expresión

$$\Delta E = (\Delta m)c^2, \tag{11.14}$$

la cual es una extensión de la ec. (11.13). Por ejemplo, la conservación de la energía de un sistema aislado requiere que $(E_k + E_p)_2 = (E_k + E_p)_1 = \text{const}$, o $E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2}$. Pero, según la ecuación (11.13), $E_{k2} - E_{k1} = (m_2 - m_1)c^2$. Por consiguiente:

$$(m_2 - m_1)c^2 = E_{p1} - E_{p2}. \tag{11.15}$$

La ec. (11.15) significa que cualquier cambio en la energía potencial interna del sistema, debido a una redistribución interna, puede ser expresado como el cambio en la masa del sistema como resultado de un cambio en la energía cinética interna. Debido al factor c^2, los cambios de masa son apreciables solamente si los cambios en energía son muy grandes. Por esta razón el cambio en la masa resultante de transformaciones de energía es apreciable sólo para interacciones nucleares o en física de alta energía, y es prácticamente despreciable en reacciones químicas.

La magnitud m_0c^2 que aparece en la ec. (11.13) se llama *energía en reposo* de la partícula, y la cantidad

$$E = E_k + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \tag{11.16}$$

es la energía *total* de la partícula. La energía total de la partícula, tal como está definida aquí, incluye la energía cinética y la energía en reposo, pero no la energía potencial.

Combinando la ec. (11.8) con la ec. (11.16), vemos que $v = c^2p/E$. Esta expresión da la velocidad en término del momentum y la energía. Ya que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p}$ tienen la misma dirección, esta expresión es también válida para los vectores, y podemos escribir

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}. \tag{11.17}$$

La ec. (11.16) es equivalente a

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}, \tag{11.18}$$

como podemos ver reemplazando p por su expresión (11.8) y verificando que la ec. (11.18) se transforma en la ec. (11.16).

A primera vista, la ec. (11.13) para la energía cinética relativista puede parecer muy distinta de la ec. (8.12) para la energía cinética newtoniana (esto es, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$).

Sin embargo, no es así. Cuando v es pequeña comparada con c, podemos desarrollar el denominador en la ec. (11.7), usando el teorema binominal (M.22):

$$m = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right).$$

Sustituyendo en la ec. (11.13), encontramos que

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_0v^2 + \tfrac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots \tag{11.19}$$

El primer término es la energía cinética ya conocida de la ec. (8.12). El segundo, y los siguientes términos, son despreciables si $v \ll c$. En esta forma verificamos nuevamente que la mecánica newtoniana es sólo una aproximación de la mecánica relativista, válida para pequeñas velocidades o energías y usando para la masa su valor de reposo. Por otra parte, a muy altas velocidades podemos reemplazar v por c en el numerador de la ec. (11.8) para el momentum, escribiendo $p = mc$. Entonces la energía cinética dada por la ec. (11.13) va a ser

$$E_k = pc - m_0c^2 = c(p - m_0c). \tag{11.20}$$

En la Fig. 11-4, la variación de la energía cinética E_k dada por la ec. (11.13) ha sido indicada por la curva a, y la energía cinética newtoniana $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ por la curva b. Esta figura nos muestra claramente que, a igualdad de velocidades, la energía relativista es mayor que la newtoniana. En la Fig. 11-5 la energía cinética ha sido representada en términos del momentum. Puede verse, que, para momenta iguales, la energía relativista (curva a) es menor que la energía newtoniana (curva b). La curva relativista se aproxima asintóticamente al valor dado por la ec. (11.20).

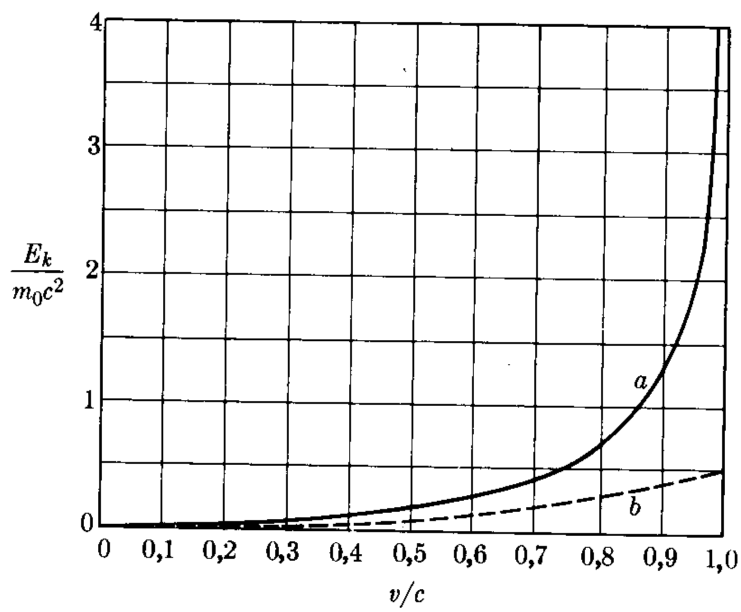

Fig. 11-4. Variación de la energía con la velocidad; (a) relativista, (b) newtoniana.

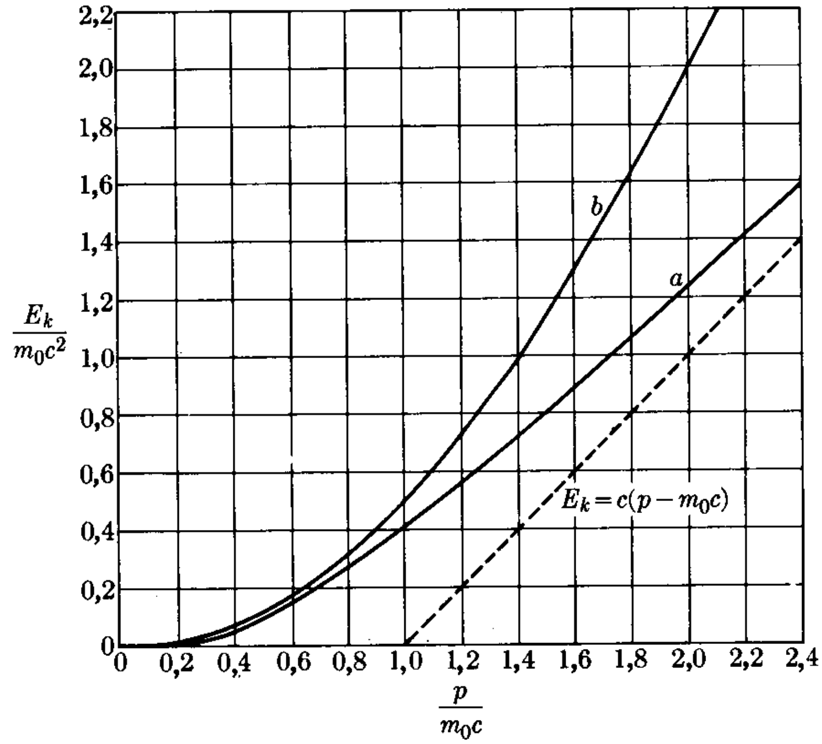

Fig. 11-5. Variación de la energía cinética con el momentum; (a) relativista, (b) newtoniana.

Debemos notar que las razones m/m_0 y E_k/m_0c^2 son las mismas para todas las partículas que tienen la misma velocidad. Por tanto, dado que la masa del protón es alrededor de 1850 veces la masa del electrón, los efectos relativistas en el movimiento de los protones son percibidos solamente en energías 1850 veces mayores. Por esta razón el movimiento de protones y neutrones en los núcleos atómicos puede tratarse en muchos casos sin hacer consideraciones relativistas, mientras que el movimiento de los electrones requiere, en la mayoría de los casos, un tratamiento relativista.

Ocurre un caso especial interesante cuando la partícula no tiene masa en reposo ($m_0 = 0$). Entonces la ec. (11.18) se transforma en

$$E = cp \qquad \text{ó} \qquad p = E/c. \tag{11.21}$$

Y por consiguiente, por la ec. (11.17), encontramos que la velocidad de la partícula es $v = c$. En consecuencia, una partícula con masa en reposo nula puede moverse solamente con la velocidad de la luz y nunca puede estar en reposo en un sistema inercial. Este es el caso del fotón, y parece ser también el del neutrino, como veremos en capítulos posteriores. La relación (11.21) también es válida cuando una partícula, con masa m_0 no necesariamente cero, se mueve a velocidad comparable con la de la luz, de modo que su momentum p sea grande comparado con m_0c. Esto se puede ver ya que, cuando en la ec. (11.18) despreciamos el término m_0c en comparación con p, la ecuación se reduce a la ec. (11.21).

EJEMPLO 11.4. Comparar el aumento relativo en la velocidad y el momentum con el aumento relativo en la energía.

Solución: Resolviendo la ec. (11.18) para v, tenemos

$$v = c\left(1 - \frac{m_0^2c^4}{E^2}\right)^{1/2}.$$

Cuando la velocidad de una partícula aumenta en la cantidad dv y su energía en la cantidad dE, el aumento relativo en la velocidad está dado por dv/v y el aumento relativo en la energía por dE/E. Esto sugiere, como en el ejemplo 11.2, que debemos tomar el logaritmo de la expresión anterior antes de diferenciarla. Esto es,

$$\ln v = \ln c + \tfrac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{m_2^0c^4}{E^2}\right).$$

Diferenciando, obtenemos

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0^2c^4}{E^2 - m_0^2c^4}\,\frac{dE}{E}.$$

Si la energía de la partícula es muy alta comparada con su masa de reposo, de modo que $E \gg m_0c^2$, podemos despreciar $m_0^2c^4$ en el denominador, obteniendo

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0^2c^4}{E^2}\,\frac{dE}{E}.$$

El coeficiente que multiplica el aumento relativo en energía es siempre menor que la unidad porque, a alta energía, E es mucho mayor que m_0c^2. Por consiguiente, a altas energías dv/v es muy pequeña comparada con dE/E. En otras palabras, a energías altas es posible aumentar la energía de la partícula sin que apreciablemente aumente su velocidad. Esta característica es de gran importancia en el diseño de aceleradores de alta energía, tanto lineales como circulares. Sugerimos que el estudiante repita el mismo cálculo, usando la mecánica newtoniana, y compare los resultados.

Por otra parte, en lo que se refiere al momentum p, tenemos de la ecuación (11.18) que

$$\ln E = \ln c + \tfrac{1}{2}\ln(m_0^2c^2 + p^2)$$

y, diferenciando, obtenemos

$$\frac{dE}{E} = \frac{p^2}{m_0^2c^2 + p^2}\,\frac{dp}{p}.$$

A altas energías, cuando p es mucho mayor que m_0c, obtenemos $dE/E \approx dp/p$, y el momentum aumenta en la misma proporción que la energía.

EJEMPLO 11.5. Movimiento curvilíneo bajo fuerza constante en dinámica relativista.

Solución: En mecánica no relativista este movimiento corresponde a una trayectoria parabólica, tal como sucede con un proyectil (recordar la sección 5.7). Para resolver este problema en mecánica relativista, es más fácil usar las relaciones de energía y de momentum. Supongamos que para $t = 0$ la partícula está en O (Fig. 11-6), moviéndose a lo largo del eje X con momentum p_0, mientras que la fuerza $\boldsymbol{F}$ es perpendicular a él (o a lo largo del eje Y). La ecuación del movimiento $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, expresada en términos de sus componentes a lo largo de los ejes X e Y viene a ser

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \qquad \frac{dp_y}{dt} = F.$$

Integrando cada una de esas expresiones, obtenemos $p_x = p_0$ (const), $p_y = Ft$. Por tanto el momentum total después del tiempo t, cuando la partícula ha alcanzado el punto A, es

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{p_0^2 + F^2t^2},$$

y la energía total, usando la ec. (11.18), es

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2\,p_0^2 + F^2t^2} = \sqrt{E_0^2 + c^2F^2t^2},$$

donde $E_0 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_0^2}$ es la energía total para $t = 0$. Por consiguiente, las componentes de la velocidad, usando la relación vectorial $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/E$, son

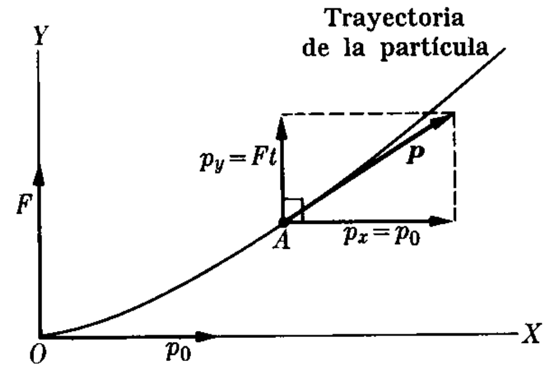

Fig. 11-6. Movimiento relativista curvilíneo bajo fuerza constante.

$$v_x = \frac{c^2p_x}{E} = \frac{c^2p_0}{\sqrt{E_0^2 + c^2F^2t^2}}, \quad v_y = \frac{c^2p_y}{E} = \frac{c^2Ft}{\sqrt{E_0^2 + c^2F^2t^2}},$$

de donde puede obtenerse la magnitud de la velocidad. Integrando estas expresiones, las coordenadas x e y de la partícula pueden ser expresadas como función del tiempo. La trayectoria se obtiene de esas ecuaciones. Dejamos al estudiante el dar estos últimos pasos y comparar la trayectoria con la parábola no relativista (ver Problema 11.11).

11.7 *Transformación de energía y momentum*

De acuerdo al principio de relatividad, la ec. (11.18) que relaciona la energía y el momentum debe ser la misma para todos los observadores inerciales. Es por tanto importante comparar esas magnitudes medidas por dos observadores en movimiento relativo. Para el observador O, la ec. (11.18) puede ser escrita en la forma

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2. \tag{11.22}$$

Recordemos que $\boldsymbol{p}$ es una magnitud vectorial con componentes p_x, p_y y p_z. Por tanto $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ y la ec. (11.22) viene a ser

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2. \tag{11.23}$$

Para ser consistente con la suposición del principio de relatividad, esta expresión debe permanecer invariante para todos los observadores inerciales. Esto es, en otro sistema de referencia (observador O') moviéndose con velocidad v relativa al sistema original con respecto al cual se escribe la ec. (11.23), debemos tener

$$p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0^2c^2, \tag{11.24}$$

donde m_0 permanece la misma ya que corresponde a la masa en reposo. En otras palabras, debemos tener

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2 - \frac{E'^2}{c^2}. \tag{11.25}$$

La estructura de las ecs. (11.23), (11.24) y (11.25) es similar a la de las ecs. (6.30) y (6.31) si hacemos la correspondencia

$$p_x \to x, \quad p_y \to y, \quad p_z \to z, \qquad \text{y} \qquad ct \to E/c.$$

Por tanto, la invariancia de la ec. (11.23) requiere una transformación entre sus elementos igual a la transformación de Lorentz para x, y, z y t. Esto conduce a

$$\begin{aligned} p_{x'}' &= \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p_{y'}' &= p_y, \\ p_{z'}' &= p_z, \\ E' &= \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{11.26}$$

Este resultado, junto con la correspondiente expresión para la energía, prueba cómo nuestra definición de momentum dada en la ec. (11.8), satisface el primer requisito del principio especial de relatividad; vale decir, el momentum se transforma apropiadamente bajo una transformación de Lorentz.

Nótese que hemos hallado dos conjuntos de cantidades asociadas, esto es x, y, z, ct y p_x, p_y, p_z, E/c, que parecen transformarse entre sí siguiendo las reglas de la transformación de Lorentz. Indudablemente podemos esperar que otras cantidades físicas se transformen de manera similar. Una característica común de todos estos conjuntos de cantidades es que tienen cuatro "componentes"; esto es, son expresadas por cuatro números. Por tal razón se llaman *cuadrivectores*, y pueden imaginativamente ser representadas en un espacio cuadridimensional. Un método para adaptar las leyes físicas a los requisitos de invariancia del principio de relatividad consiste en escribirlas como relaciones entre escalares, cuadrivectores y otras cantidades parecidas (tensores). No nos detendremos en este asunto, ya que pertenece a una discusión más extensa de la teoría de la relatividad, más allá de la intención y alcance de este libro.

EJEMPLO 11.6. Expresar las relaciones inversas entre la energía y el momentum correspondientes a las ec. (11.26). Esto es, dar los valores medidos por O en términos de los valores medidos por O'.

Solución: Referimos al estudiante al ejemplo 6.4, que corresponde al problema equivalente para las coordenadas x, y, z y el tiempo t. Podemos así llegar al resultado deseado cambiando simplemente el signo de v e intercambiando las cantidades con prima y sin prima en las ecuaciones (11.26), obteniendo

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_{x'} + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p_y &= p'_{y'}, \\ p_z &= p'_{z'}, \\ E &= \frac{E' + vp'_{x'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{11.27}$$

EJEMPLO 11.7. Aplicar los resultados del ejemplo anterior al caso en que la partícula está en reposo con relación a O'.

Solución: En este caso $p'_{x'} = p'_{y'} = p'_{z'} = 0$ y $E' = m_0c^2$. Por consiguiente las ecuaciones de transformación dan

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Las tres primeras ecuaciones dan el momentum y la última la energía tales como son medidos por O. La comparación con la ec. (11.8) para el momentum y con la ec. (11.16) para la energía muestra que ellas corresponden exactamente al momentum y la energía de una partícula moviéndose a lo largo del eje X con velocidad v. Este es justamente el caso, ya que la partícula, estando en reposo con relación a O', debe parecer moverse con velocidad v respecto de O. El mérito de este ejemplo está en que las relaciones (11.26), y sus inversas (11.27), derivadas en forma algo intuitiva usando el principio de invariancia relativista, son compatibles con las expresiones anteriores para la energía y el momentum derivadas usando un punto de partida diferente. Este ejemplo muestra así la consistencia de nuestra lógica.

EJEMPLO 11.8. Discutir la transformación de energía y momentum para una partícula con masa de reposo nula. Por simplicidad suponer que el movimiento de la partícula tiene lugar a lo largo de la dirección del movimiento relativo de los observadores.

Solución: Ya que $m_0 = 0$, podemos suponer que la relación $E = cp$, de acuerdo con la ec. (11.21), es satisfactoria para el observador O. Entonces, usando las ec. (11.26), con $p'_{x'} = p'$ y $p_x = p$, ya que el movimiento es a lo largo del eje X, y usando $E = cp$, tenemos para el observador O',

$$p' = \frac{p - v(cp)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = p\,\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Usando este resultado para p', obtenemos para la energía

$$E' = \frac{cp - vp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = cp\,\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = cp'.$$

Por consiguiente la relación $E' = cp'$ también vale para el observador O'. Este ejemplo, como el anterior, indica al estudiante la consistencia de la teoría. Se sugiere que el estudiante repita el problema suponiendo que la partícula se mueve en una dirección arbitraria.

11.8 Transformación de la fuerza

La fuerza que actúa sobre la partícula medida por los observadores O y O' es, respectivamente,

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F}' = \frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}, \tag{11.28}$$

tal como se requiere por el principio de relatividad, ya que ambos observadores deben usar las mismas ecuaciones del movimiento. La relación entre $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F}'$ en general es algo complicada, pues no podemos usar un razonamiento tan simple como el usado para la energía y el momentum. Por tanto, computaremos esta relación sólo para el caso especial en que la partícula está momentáneamente en reposo en el sistema O'. Entonces $\boldsymbol{F}'$ se llama la *fuerza propia.*

Usando las ec. (11.26), obtenemos

$$F'_{x'} = \frac{dp'_{x'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

$$= \frac{dt}{dt'}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}\right). \tag{11.29}$$

Ahora de la transformación inversa de Lorentz (ver la última ecuación en el ejemplo 6.4), tenemos que

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

y ya que $dx'/dt' = 0$, porque la partícula está en reposo con respecto a O',

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{11.30}$$

Por otra parte, de acuerdo a la definición de fuerza, $dp_x/dt = F_x$. De las definiciones de la energía E y de la energía cinética $E_k = E - m_0c^2$, como también del hecho de que el trabajo $F_x dx$ debe ser igual a dE_k, tenemos que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{F_x\, dx}{dt} = F_x v, \tag{11.31}$$

ya que en este caso $dx/dt = v$. Haciendo todas estas sustituciones en la ec. (11.29), obtenemos

$$F'_{x'} = F_x. \tag{11.32}$$

Para la componente paralela al eje Y, considerando que $F_y = dp_y/dt$, obtenemos

$$F'_{y'} = \frac{dp'_{y'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dp_y}{dt} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kF_y. \tag{11.33}$$

Análogamente, para la componente Z, con $F_z = dp_z/dt$, tenemos

$$F'_{z'} = \frac{dp'_{z'}}{dt'} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kF_z, \qquad (11.34)$$

donde k se define como en la ec. (6.32). Las ec. (11.32), (11.33) y (11.34) relacionan la fuerza $\boldsymbol{F}$, medida por un observador en un sistema inercial y arbitrario de referencia, con la fuerza $\boldsymbol{F}'$ medida por un observador en un sistema inercial en el que la partícula está momentáneamente en reposo. El hecho de que la ley de transformación para la fuerza es diferente que para las magnitudes cuadrivectoriales momentum y energía, la coloca en una categoría diferente de ellas, ya que la fuerza no es parte de un cuadrivector. También la convierte en un concepto menos útil, en la teoría de la relatividad, que los de momentum y energía. Consecuentemente se ha propuesto una diferente definición de fuerza. No la discutiremos aquí, excepto para decir que tiene la ventaja de transformarse como un cuadrivector. Sin embargo, aun si la fuerza se transforma de manera diferente al momentum y energía, su transformación garantiza que la ecuación del movimiento, $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, sea invariante para todos los observadores inerciales, lo cual constituye nuestro requisito fundamental. La relación entre las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F}'$ ha sido indicada en la Fig. 11-7.

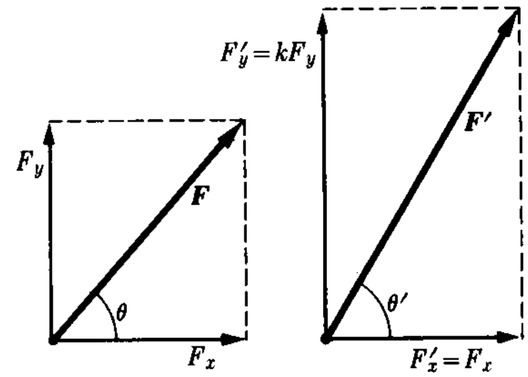

Fig. 11-7. Transformación de Lorentz de las componentes de una fuerza.

11.9 Sistemas de partículas

Consideremos un sistema de partículas, cada una de momentum $\boldsymbol{p}_i$ y energía E_i. Despreciando sus interacciones, podemos escribir el momentum total del sistema como $\boldsymbol{P} = \Sigma_i \boldsymbol{p}_i$ y la energía total como

$$E = \Sigma_i E_i = \Sigma_i m_i c^2 = Mc^2.$$

Por tanto, usando la ec. (11.17), podemos asociar al sistema una velocidad definida por

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{c^2 \boldsymbol{P}}{E} = \frac{\boldsymbol{P}}{M}. \qquad (11.35)$$

Recordando la sección 9.2, podríamos decir que ésa es la velocidad del centro de masa del sistema y considerar que el sistema se comporta como un cuerpo de masa M moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}_C$. Recordamos al estudiante, sin embargo, que (por las razones dadas en la sección 9.2) cuando la masa depende de la velocidad no podemos definir el centro de masa. Por tanto, llamaremos a la velocidad dada por la ec. (11.35) la *velocidad del sistema*.

Supongamos que tenemos dos observadores inerciales diferentes, cada uno examinando el sistema de partículas. Respecto al observador O el momentum y la energía total son $\boldsymbol{P} = \Sigma_i \boldsymbol{p}_i$ y $E = \Sigma_i E_i$. Con relación a O', tales magnitudes son $\boldsymbol{P}' = \Sigma_i \boldsymbol{p}'_i$ y $E' = \Sigma_i E'_i$. Si la velocidad de O' relativa a O es v, a lo largo del eje X, cada E_i y $\boldsymbol{p}_i$ se transforma en E'_i y $\boldsymbol{p}'_i$ de acuerdo a las ecs. (11.26). Es claro que sus sumas se transforman de la misma manera, y podemos así escribir

$$\begin{aligned} P'_{x'} &= \frac{P_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ P'_{y'} &= P_y, \\ P'_{z'} &= P_z, \\ E' &= \frac{E - vP_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{11.36}$$

Ahora si, con relación a O, el momentum y la energía se conservan, $\boldsymbol{P} = \text{const}$, y $E = \text{const}$, y entonces las transformaciones anteriores implican $\boldsymbol{P}' = \text{const}$. y $E' = \text{const}$, y las dos leyes de conservación son también satisfactorias para O'. Hemos verificado, por consiguiente, el segundo requisito exigido por nuestra teoría, tal como se indicó al final de la sección 11.4. Notamos también que, debido a la estructura de las ecuaciones de transformación, las dos leyes de conservación deben ser satisfechas simultáneamente; en otras palabras, no pueden ser independientes una de la otra. Esta situación no ocurre en el caso no relativista.

Consideremos ahora el caso especial en que la velocidad relativa de los dos observadores es paralela al momentum total $\boldsymbol{P}$. Entonces $P_x = P$, $P_y = P_z = 0$, y la primera de las ec. (11.36) se reduce a

$$P' = \frac{P - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Por analogía con los sistemas de referencia L y C introducidos en el capítulo 9.

> *definimos el sistema-C en mecánica relativista como el sistema de referencia en el que el momentum total del sistema es cero.*

Por tanto, si el observador O' está en reposo con relación al sistema-C, el momentum P' es cero. Si ponemos $P' = 0$ en la expresión anterior, la velocidad de O' relativa a O (que usa el sistema de referencia L), es $v = c^2P/E$. La comparación con la ec. (11.35) muestra que el sistema-C se mueve con la velocidad del sistema $\boldsymbol{v}_C$ relativa al sistema-L. Este es el mismo resultado obtenido en la situación no relativista del capítulo 9.

Indicamos al comienzo de esta sección que estábamos despreciando interacciones entre las partículas del sistema. La consideración de las interacciones que dependen de la posición relativa de las partículas introduce serias dificultades en la teoría de la relatividad. Por ejemplo, vimos en el capítulo 6 que el concepto de la simultaneidad en la posición de dos partículas, que es requerido para definir una interacción, no es un concepto invariante. Por tanto la velocidad de trasmisión de la interacción debe ser tomada en cuenta. Por tal razón, se necesita técnicas especiales para discutir las interacciones en una forma consistente con la teoría de la relatividad.

EJEMPLO 11.9. Discutir el sistema de referencia C para dos partículas idénticas que se mueven en la misma dirección.

Solución: Las propiedades del sistema-C pueden ser fácilmente discutidas para el caso de dos partículas. Consideremos un sistema de dos partículas idénticas que, con respecto al observador O, parece que se mueven a lo largo del eje X en el sistema-L (usado por O) con velocidades v_1 y v_2. Sus respectivas masas con m_1 y m_2, computadas de acuerdo a la ec. (11.7), con el mismo valor de m_0 para ambas. El momentum total en el sistema-L es

$$P = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{11.37}$$

Con relación al sistema-C el momentum total del sistema es cero. Por tanto,

$$P' = p_1' + p_2' = 0.$$

Ello requiere que el momentum de las dos partículas en el sistema-C sea el mismo en magnitud, pero que las partículas se muevan en direcciones opuestas. Entonces la ec. (11.8) requiere que las magnitudes de las velocidades en el sistema-C sean las mismas. Por tanto, las partículas parecen estar moviéndose con velocidades v' y $-v'$. Designando las velocidades del sistema-C relativa al sistema-L por v_C y usando la ecuación (6.38) para la transformación de velocidades, con v reemplazada por v_C, tenemos

$$v_1 = \frac{v' + v_C}{1 + v'v_C/c^2}, \qquad v_2 = \frac{-v' + v_C}{1 - v'v_C/c^2}.$$

que pueden ser escritas en las formas alternativas:

$$v_1 = v_C + \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 + v'v_C/c^2}, \qquad v_2 = v_C - \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 - v'v_C/c^2}.$$

Podemos obtener el momentum total en el sistema-L sustituyendo dichos valores en la ec. (11.37). Ello da

$$P = (m_1 + m_2)v_C + v'(1 - v_C^2/c^2)\left(\frac{m_1}{1 + v'v_C/c^2} - \frac{m_2}{1 - v'v_C/c^2}\right). \tag{11.38}$$

Reemplazando m_1 y m_2 en el último término por sus valores de acuerdo con la ecuación (11.7), obtenemos

$$m_0 v'(1 - v_C^2/c^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}\,(1 + v'v_C/c^2)} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}\,(1 - v'v_C/c^2)}\right).$$

Usando las identidades del Problema 6.38, podemos simplificar cada término dentro del paréntesis. Puede verse que ambos términos son iguales a $1/\sqrt{(1 - v_C^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}$ y, por tanto, que su diferencia es cero. Por consiguiente, el último término en la ec. (11.38) desaparece, y P se reduce a

$$P = (m_1 + m_2)v_C \qquad \text{y} \qquad v_C = P/M.$$

Esta es justamente la ec. (11.35) adaptada al caso particular de dos partículas moviéndose en la misma dirección. Por consiguiente, verificamos que en la teoría de la relatividad, tanto como en la teoría clásica, el sistema-C (relativo al cual el momentum total del sistema es cero) está moviéndose con respecto al sistema-L con una velocidad v_C dada por la ec. (11.35).