

Estudio del campo de velocidades en un fluido generado por un vórtice

Manuel Der, Agustín Somacal, Facundo Sapienza

April 2015

Resumen

En el presente informe se estudia el comportamiento de un fluido giratorio en un recipiente cilíndrico debido a la acción de un agitador magnético. Con una webcam se realizan filmaciones del recorrido de una bolita de telgopor, y luego, a partir de las imágenes y mediante un programa contruido especialmente, se obtiene el campo de velocidades del fluido. Se realizan mediciones variando volúmenes, frecuencias de giro y comparando posteriormente los resultados con las predicciones de la solución de Burgers. Mediante un método de contraste de colores en la imagen se obtiene la forma del perfil del vórtice generado. También se analiza la correlación existente entre el área de la bolita en las fotos y el módulo de la velocidad encontrándose una forma alternativa de análisis de los datos. Al finalizar se sugieren varias vías para las futuras investigaciones que esta práctica promete.

Introducción

En el presente trabajo se caracteriza el campo de velocidades de un fluido que gira en torno a un vórtice confinado en un recipiente cilíndrico. La vorticidad de un fluido se define como el rotor del campo de velocidades. Es de gran utilidad en el estudio de la dinámica ya que es una magnitud que da cuenta de cuánto está rotando el fluido localmente en cada punto. Formalmente

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad (1)$$

donde \vec{u} es el campo de velocidades del fluido. La ecuación de Navier-Stokes que describe la dinámica de un fluido de viscosidad cinemática ν es

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2)$$

donde D/Dt es la derivada convectiva. La solución exacta en tres dimensiones para el campo de velocidades generado por un vórtice con simetría cilíndrica

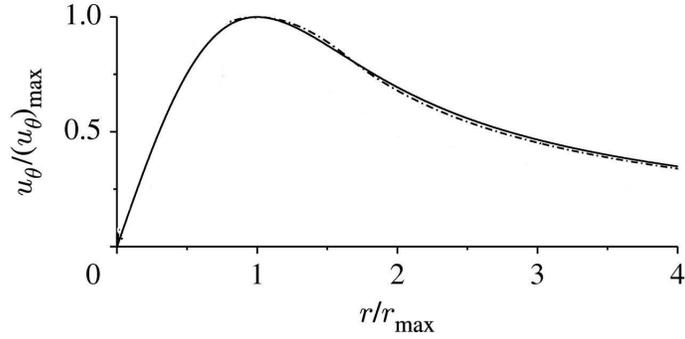


Figura 1: Velocidad tangencial en función del radio para el modelo de vórtice de Burgers.

fue dada por Burgers. Según este modelo, la vorticidad esta dada por [1]

$$\vec{\omega} = \frac{\alpha\Gamma}{4\pi\nu} \exp\left(\frac{-\alpha r^2}{4\nu}\right) \hat{e}_z \quad (3)$$

donde $\alpha > 0$ y Γ son constantes. De 1 y 3 se obtiene fácilmente el campo de velocidades de todo el fluido

$$u_t(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(\frac{-\alpha r^2}{4\nu}\right) \right] \quad (4)$$

$$u_r(r) = -\frac{\alpha r}{2} \quad (5)$$

$$u_z(z) = \alpha z \quad (6)$$

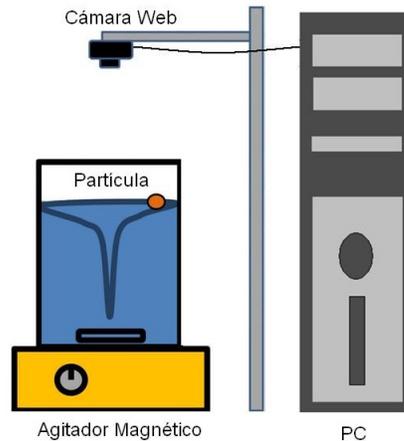
donde v_t es la velocidad tangencial, v_r la velocidad radial y v_z la velocidad en profundidad. En la Figura 1 se ve cómo es el campo de velocidades tangencial en función del radio para el vórtice de Burgers.

Desarrollo Experimental

En el presente trabajo se estudia el campo de velocidades de un fluido (agua en este caso) analizando la pertinencia de la ecuación de Burges y su dependencia ante distintos parámetros, como lo son la altura o volumen, la velocidad del vórtice. Las mediciones consistieron en sacar fotos con una webcam para luego procesarlas con el programa Matlab y hallar así en cada imagen la posición de una partícula de prueba, obteniendo de este modo la velocidad de la misma en función del tiempo.

El dispositivo experimental se puede observar en la Figura 2. Un recipiente de vidrio (Altura = $(10 \pm 0,05)cm$ y diametro = $(19 \pm 0,5)cm$) es colocado en un agitador magnético. Al introducir un imán dentro del recipiente y encender el dispositivo, el imán comienza a girar a una determinada frecuencia, la cual es

a) Esquema del dispositivo experimental



b) Imagen del montaje realizado

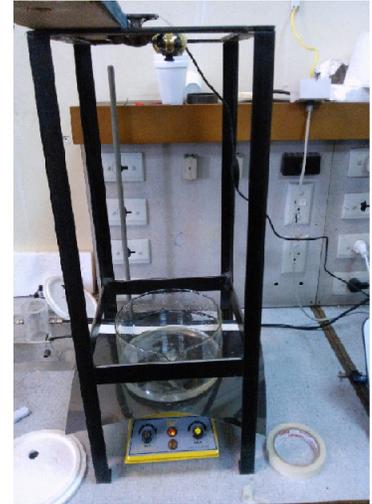


Figura 2: Dispositivo experimental.

regulada con el agitador. Al agregar el líquido dentro del recipiente, se produce un vórtice y todo el fluido comienza a girar. Para determinar el campo de velocidades inducido, se utilizan dos bolitas de telgopor, que son colocadas una en el centro del vórtice (con lo cual queda confinada a esta posición), y otra apartada del mismo de manera tal que gire solidaria a la superficie del fluido. La razón de la primera bolita es que el vórtice no permanece siempre en la misma posición y necesitamos conocerla para hacer los cálculos de la velocidad tangencial y del radio pues lo que nos interesa del modelo es la velocidad del fluido para un vórtice fijo en el origen. De esta forma, la posición donde se calcula la velocidad del líquido está referenciada respecto a la bolita en el vórtice.

Se coloca por encima del recipiente la cámara web conectada a la computadora. Con la misma se filma la evolución del fluido mientras la bolita de telgopor gira en torno al vórtice. De cada imagen adquirida por la cámara se calcula la posición de ambas bolitas de telgopor. Para poder distinguir y aislarlas del resto de la imagen, se tiñe el agua con unas gotas de tinta china para aumentar el contraste, dado que el líquido queda de color negro y las bolitas blancas. A las imágenes se les extrajeron primero los datos correspondientes al ruido de fondo y luego se les realizó un proceso de binarizado. En orden, primero se captura una imagen del recipiente sin las bolitas en su interior. Dicha imagen es restada a las mediciones adquiridas durante el video, de forma tal de borrar toda luz o reflejo constante en el tiempo. Hecho esto, de las imágenes adquiridas sólo son filtrados los píxeles que tengan un brillo superior a determinado umbral (que se elige manualmente en cada filmación). Por lo tanto, se asegura que lo único que

se ve en la imagen sea la posición de las bolitas de telgopor (Dicho proceso puede apreciarse en la Figura 3). Pese a los cuidados tomados, sucedía que los reflejos en el fluido de las distintas fuentes de luz que se hallaban en el laboratorio eran detectados e interpretados erróneamente por el software, lo cual no hacía posible seguir la traza del fluido. Fue por esto que se colocó un difusor por encima del dispositivo experimental, cuya utilidad era homogeneizar la luz proveniente de las distintas fuentes de manera que resultara relativamente constante y por lo tanto parte del fondo.

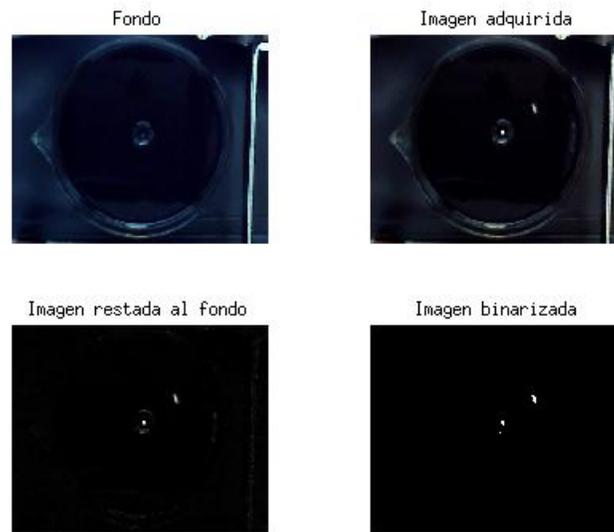


Figura 3: Se puede observar todo el tratamiento de imágenes. Primero se captura una imagen del fondo para restársela a la imagen adquirida durante la filmación. Luego ambas imágenes son restadas. Por último, se pasa la imagen a blanco y negro, identificando sólo los píxeles con un brillo superior a determinado umbral. Dichos puntos son asociados con la posición de las bolitas de telgopor.

Calibración

En esta sección se explica cómo se realizaron los cálculos para la velocidad en sus respectivas unidades. Mediante el procesamiento de datos anteriormente explicitado, la posición y la velocidad de las bolitas de telgopor era siempre obtenida en píxeles y píxeles por segundo, respectivamente. Para relacionar dichas magnitudes con las unidades usuales, se coloca una hoja cuadriculada por debajo y encima del recipiente contenedor del fluido. Para estas dos posiciones se calcula la relación lineal que existe entre píxeles y centímetros. Interpolando linealmente estas dos mediciones se tiene la proporción centímetros-píxel para

todas las alturas intermedias. Luego, simplemente resta medir la altura a la cual se encuentra la columna de agua sobre la cual están apoyadas las bolitas.

Sin embargo, se observó que la cámara utilizada posee distintas resoluciones dependiendo de la dirección. Midiendo los pixeles para una distancia fija en la hoja ($(150 \pm 1)mm$) en el eje horizontal y vertical se obtienen valores distintos. Al calcular la relación entre ambos pixelados es posible calibrar la imagen para eliminar esta aberración de las mediciones, y medir en unidades de distancia, como es deseable. Notar y corregir esto resultó de suma importancia durante el desarrollo de la práctica.

Análisis y desarrollo

Caracterización del campo de velocidades

Se tomaron mediciones de la velocidad tangencial de la pelotita de telgopor en función del radio para un volumen de agua de $1200ml$, donde la perilla correspondiente a las revoluciones del agitador magnético permanecía ubicada en el valor 3. Con ello se tomaron varias filmaciones y luego de hacer el respectivo análisis, utilizando el software Matlab se pudo obtener la velocidad tangencial en función del tiempo de medición.

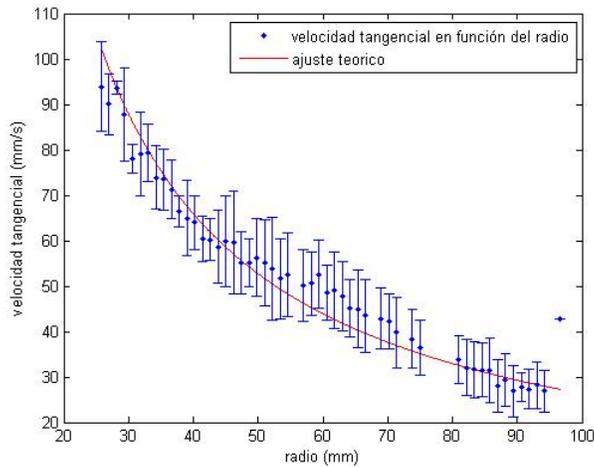


Figura 4: Velocidad tangencial en función del radio. Se ajustó por la función $\frac{\Gamma}{2\pi r}$ resultando ser $\Gamma = (420 \pm 8)Hz$.

Al momento de medir se observó en la pelotita un comportamiento errático por momentos, cambios bruscos de dirección producto de movimientos caóticos del fluido. Sin embargo la tendencia general parecía seguir el movimiento deseado. Al mirar los datos se corroboró este comportamiento observándose una dispersión de datos importante. Para suavizar esta dispersión observada se

procedió a dividir la distancia radial en intervalos pequeños de $1mm$ y se promediaron todas las mediciones que hubieran caído en ese intervalo radial. Así se obtuvo el gráfico de la Figura 4.

Se intentó ajustar el modelo teórico de Burgers, sin embargo, no fue posible debido a que, por dificultades experimentales solo se lograron obtener mediciones de la rama descendente de la solución. Como se puede observar, el término que domina es el de $\frac{1}{r}$ y por ello se decidió aproximar los datos con la función $\Gamma/2\pi r$ obteniéndose un valor para la vorticidad de $(\Gamma = 420 \pm 8)Hz$.

A continuación se hicieron gráficos similares para distintos volúmenes ajustándose las curvas con la misma ecuación, y utilizando de este modo a la constante Γ como parámetro de comparación, que simbolizaría la frecuencia de giro del fluido. Es de esperar que si la perilla del aparato que marca el giro del imán fuera la potencia entregada entonces al aumentar el volumen debería disminuir la constante Γ , pues la misma energía se distribuye en una masa mayor de fluido enlenteciendo el flujo. Si efectivamente se tratara de las revoluciones del campo del agitador, entonces debería permanecer aproximadamente constante pues el aparato ajustaría su potencia para mantener la frecuencia fija.

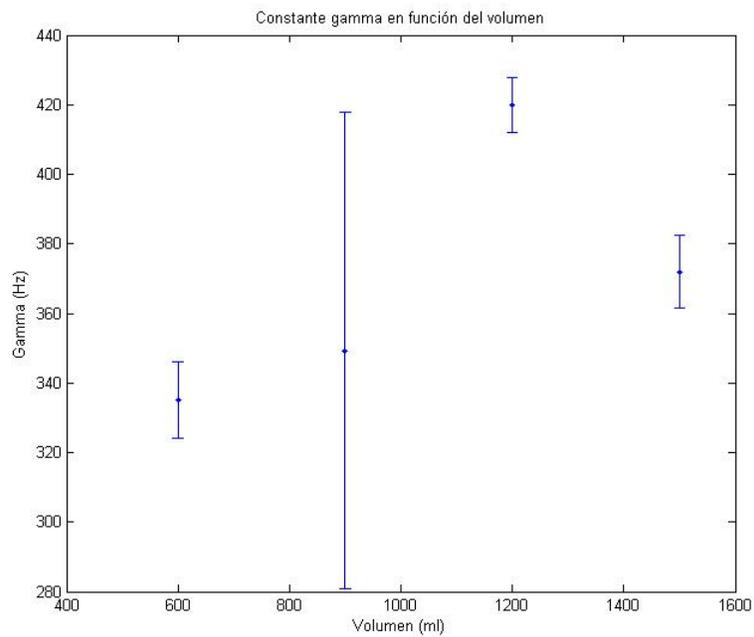


Figura 5: Constante Γ en función del volumen de agua. Se observa ninguna dependencia aparente.

Como se puede observar en la Figura 5 no pareciera haber relación entre las constantes Γ y los volúmenes. Dado que se lograron obtener pocas mediciones,

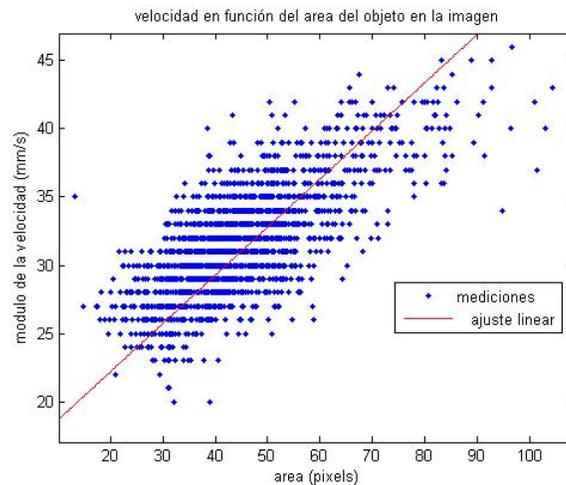
se sugiere para próximas investigaciones hacer una variación más gradual en el volumen, podría ser de utilidad.

También se tomaron mediciones para un mismo volumen de 1500ml variando las revoluciones del agitador. No pudieron rescatarse más que 2 mediciones en las cuales se observó un aumento importante de Γ , siendo $\Gamma = (36 \pm 1)\text{Hz}$ cuando la perilla estaba puesta en 3 y $\Gamma = (76 \pm 7)\text{Hz}$ al estar en 3,5 lo cual marca una duplicación en el valor. Sin embargo tampoco aquí disponemos de suficientes mediciones, por lo cual se sugiere realizar un barrido más fino en la frecuencia. Lo que es importante remarcar es la dificultad experimental que surge al momento de mover la perilla más allá de 4 puesto que el fluido gira tan rápido que resulta difícil seguir a la bolita con el programa. Esto se puede mejorar efectivizando el software o bien utilizando frecuencias que rondan los niveles 3 y 4 de la perilla.

Forma alternativa para encontrar la velocidad

En el proceso de medición se observó que, al sacar la foto, la cámara se mantiene un cierto dt capturando la imagen. Debido a ese tiempo, cuanto mayor es la velocidad de la partícula mayor es el área que se observa en la imagen. A raíz de esta observación cualitativa, se decidió comprobarlo experimentalmente. De este modo se puede ver en la Figura que existe efectivamente una correlación lineal entre ambas variables que puede dar un método alternativo, aunque menos preciso, para la determinación de la velocidad de la partícula.

Figura 6: Modulo de la velocidad en función del área. Se puede observar una correlación lineal de cuyo ajuste se obtiene una pendiente igual a $p = 0,35 \pm 0,05$ y una ordenada al origen de $b = 15 \pm 2$.



Los parámetros del ajuste, la pendiente ($p = 0,35 \pm 0,05$) $\frac{mm}{s \cdot pix}$ y la ordenada

al origen ($b = 15 \pm 2$) $\frac{mm}{s}$ no dependen de las magnitudes que variamos para analizar el campo de velocidades, el volumen la frecuencia, la viscosidad no afectan a la correlación, lo cual fortalece la hipótesis de que esto se debe al efecto temporal de adquisición de la cámara que, por ende, depende solo del instrumento de medición y no del experimento. Un análisis más profundo podría centrarse en el hecho que en las imágenes la bolita se asemeja mucho a una elipse, si se pudiera cuadro a cuadro ajustar una elipse podría obtenerse el área y la dirección y vincularlos con la velocidad como vector y no solo como módulo como es en este caso. Queda para futuras investigaciones profundizar en ello.

Medición de la forma del vórtice

En esta sección, se busca determinar la forma del perfil del vórtice estudiado en los anteriores casos. Se observa que cuando el líquido es de un color claro, la intensidad con la que la cámara registra una determinada parte del fluido esta relacionada con la profundidad en esa zona. Para ello, en vez de teñir el agua con tinta negra, se la disolvió con leche en polvo, para que ahora el líquido quede de color blanco.

Primero se determinó que la relación intensidad-profundidad era lineal. Para ello, se capturó una fotografía de un recipiente rectangular que contenia la leche, pero el recipiente, en vez de estar apoyado verticalmente, fue inclinado, como se observa en la Figura 7. De esta forma, se asegura que la profundidad del fluido este linealmente relacionada con la distancia medida sobre la fotografía (en pixeles). Mediante el programa ImageJ, se calculó la intensidad de luz, medida en escala de grises (greyscale) a lo largo del recipiente, donde se sabe que la profundidad aumenta linealmente con la distancia. La Figura 8 muestra los resultados, sobre los cuales se realizó un ajuste lineal.

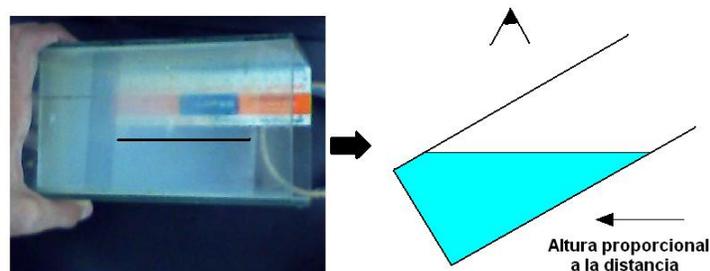


Figura 7: Dispositivo experimental utilizado para ver relación entre profundidad y distancia. Durante toda la experiencia se miden distancias en pixeles en la superficie del fluido y con ellas se desea inferir la profundidad del fluido en cada punto del vórtice.

El siguiente paso consiste en analizar la forma del vórtice. La Figura 11 muestra una fotografía al fluido mientras el agitador magnético está encendido,

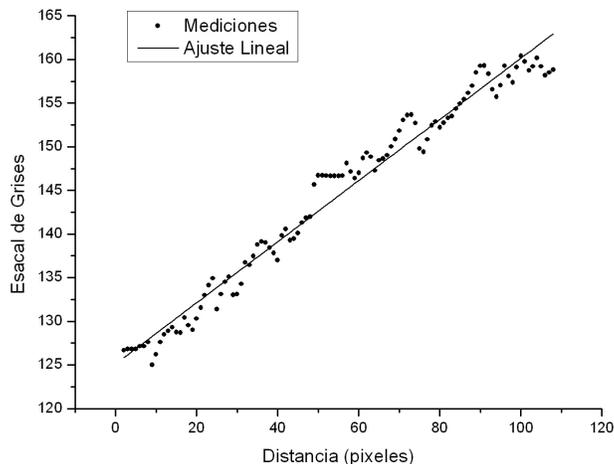


Figura 8: Intensidad (medido en escala de grises) en función de la distancia. La medición se realiza sobre la línea negra indicada en la Figura 7. Sobre las mediciones se realiza un ajuste con una función lineal.

induciendo la vorticidad. Los resultados de la medición son expuestos en la Figura 9 donde se ve la intensidad de luz de la fotografía a lo largo de una traza que pase por el vórtice.

Mediante el ajuste de la Figura 8 se determina que la relación entre profundidad e intensidad es lineal. Por lo tanto, el gráfico de la Figura 9 es proporcional a la forma del vórtice inducido. Sobre el mismo se realizó un ajuste mediante una función gaussiana. Si bien en ninguno de los trabajos que encontramos respecto a vorticidad encontramos una fórmula cerrada para la forma del vórtice en el modelo de Burgers, en base a que la solución para la vorticidad $\vec{\omega}$ es una gaussiana (Ecuación 3) nos pareció adecuado suponer que la forma del vórtice también iba a ser gaussiana. El ajuste parece ser bastante acertado, si bien no se pueden tener mediciones de la base del vórtice.

El hecho de que no se tengan mediciones de la parte inferior del vórtice se debe a que en dicho punto se observan picos de intensidad por los reflejos de la luz en el líquido. Dicha dificultad puede verse en el gráfico de la Figura 10. Los picos de intensidad se corresponden a las posiciones del fluido donde la luz del ambiente se refleja. En la Figura 11 se observa la fotografía utilizada para confeccionar el gráfico. La misma se encuentra llena de reflejos que impiden obtener un perfil claro del vórtice.

Consideramos que dicha dificultad podría ser superada por futuros grupos que realicen la práctica. Obstruyendo los reflejos de manera adecuada consideramos que debería obtenerse la forma del vórtice con mayor claridad. Sin embargo, nos pareció bastante interesante e ingenioso el método utilizado para poder me-

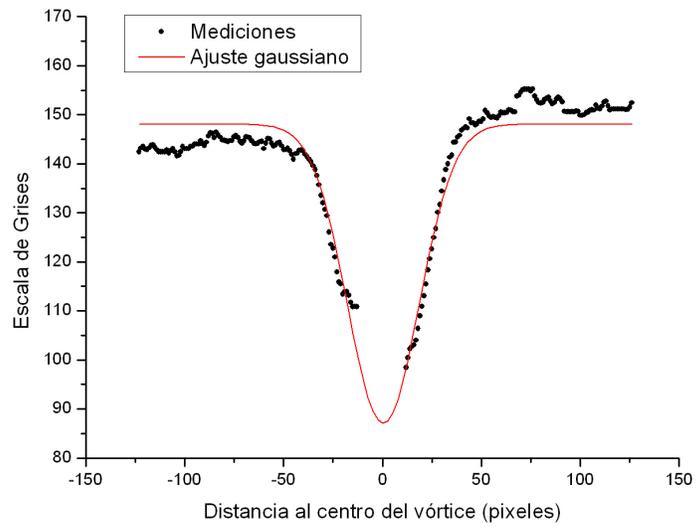


Figura 9: Intensidad de luz, medida en escala de grises, en función de la posición, medida en píxeles. Dado que la intensidad está relacionada linealmente con la profundidad (Figura 8), lo que se obtiene es la forma del vórtice.

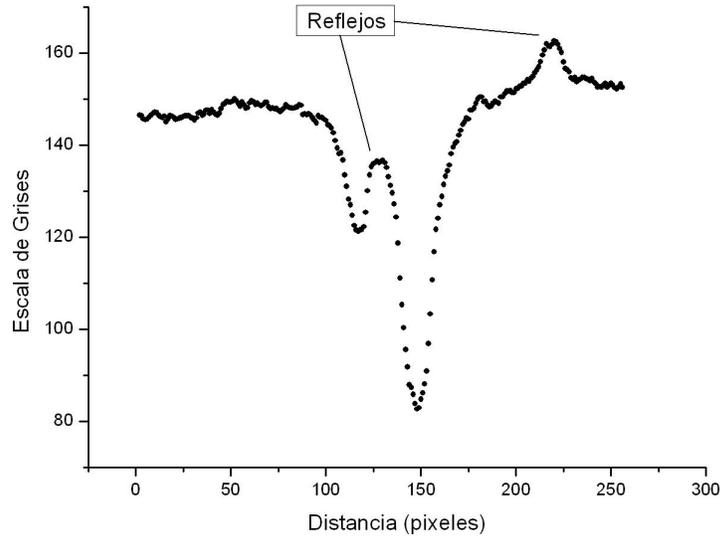


Figura 10: Intensidad en función de la posición. Se pueden observar dos picos de intensidad correspondientes a los reflejos de luz. Dichos reflejos impiden tener un perfil claro del vórtice.

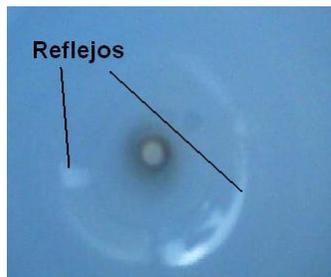


Figura 11: Fotografía del vórtice donde se observa con claridad los reflejos de luz que son medidos como picos de intensidad en el gráfico anterior.

dir la forma del vórtice. Se habían mencionado otras posibilidades, como poner la cámara fotográfica de costado, pero las dificultades para el análisis de datos eran mayores. Por otra parte, estaría bueno buscar más bibliografía para dar fé de la forma del vórtice en el modelo de Burgers.

Conclusiones

Esta práctica es muy rica en cuanto al análisis de datos que se pueden realizar y por ello además de presentar los resultados recomendaremos posibles ampliaciones que se pueden realizar al trabajo. Fue posible caracterizar el campo superficial de velocidades en el fluido evidenciándose para la componente tangencial un decaimiento con la distancia que fue satisfactoriamente ajustado por una hipérbola equilátera. En relación a la correspondencia con el modelo de Burgers, si bien no fue posible confirmar este comportamiento para el vórtice tratado, al menos para radios mayores al orden de los 3 cm se puede apreciar que el decaimiento sigue al término dominante de la ecuación que es la hipérbola equilátera. Del ajuste realizado para otras mediciones con otros volúmenes se obtuvo el parámetro Γ y se lo utilizó para compararlas entre sí a fin de ver la dependencia del campo de velocidades con el volumen. No se encontró, apra las 4 mediciones que pudieron obtenerse, relación alguna. Se sugiere ampliar el rango de volúmenes a medir y estudiar más a fondo la relación entre estas magnitudes.

También se encontró que existe una correlación lineal entre el módulo de la velocidad de la pelotita y el área que esta muestra en al imagen. Los parámetros encontrados son propios del tamaño de la bolita y de la cámara utilizada y se relacionan con el tiempo de exposición a la luz que necesita para tomar la imagen. Este método correctamente calibrado, teneindo en cuenta la discrepancia entre cantidad de pixeles y milímetros entre los ejes x e y de la imagen, puede ser una forma alternativa válida para obtener la velocidad en cada cuadro.

Con respecto a las mediciones del perfil del vórtice, luego de cuantificar la respuesta que la cámara entregaba en intensidad en relación a la profundidad detectada, dadas por el análisis y calibración de la escala de grises, y luego de obtener una relación lineal para la mezcla de agua con leche en polvo, se procedió a estudiar las características de la superficie del fluido, en las cercanías del centro-vórtice, obteniéndose una dependencia que se aproximó por un ajuste gaussiano, resultando esto coherente con las predicciones del modelo de Burgers, que identificaban con la misma dependencia el rotor del campo de velocidades del fluido.

A partir de los inconvenientes y de los análisis de datos que no pudieron llegarse a realizar se sugieren varios caminos posibles para continuar con la investigación.

Se sugiere, a partir de las mediciones realizadas con agua y leche en polvo, utilizarla en preferencai a la tinta china como colorante reemplazando als bolitas blancas por unas pintadas de negro. Coneste método se evitan los problemas de reflexiones y no es necesario cubrir el dispositivo con nada en especial pues la

aplicar le binarizado todos los reflejos quedaran con intensidades similares a las del propio fluido quedando solo las bolitas negras para ser analizadas.

Detrás de todo lo que se realizó yace la hipótesis de que la bolita de telgopor es suficientemente liviana como para no alterar la dinámica del fluido de modo que midiendo su velocidad se esta midiendo la del fluido. Sin embargo esta hipótesis valdría en principio para tamaños pequeños. Un análisis que sería necesario realizar es el de ver la dependencia del campo de velocidades medido como función de la masa y del tamaño de la bolita para hallar las dimensiones y peso adecuados.

También se sugiere medir el campo de velocidades variando la viscosidad, para ello recomendamos utilizar algunos gramos de goma xántica.

Al medir se observaron ondas superficiales generadas por el giro del iman y la forma limitada del recipiente, de modo que sus reflexiones producían perturbaciones en el movimiento de la bolita. Intentar modelar esas ondas superpuestas al fluido rotante es otra sugerencia.

Referencias

- [1] <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:205082/FULLTEXT01.pdf>

Agradecimientos

- A Nahuel, por darnos la idea de hallar al forma del vórtice por contraste de intensidades usando leche en polvo en agua. También por su disposición a prestarnos el difusor y traernos la goma xántica. Además de las útiles recomendaciones y ayudas.
- A Mariela, por tenernos paciencia y sentarse a explicarnos lo que no entendíamos, por sarandearnos y empujarnos a pensar y superar las dificultades.
- A John Lenon por sus canciones que acompañaron las arduas horas de programación y análisis de datos, sin sus mensajes de paz y alegría este trabajo hubiera sido imposible.