

Estudio de radiación gamma proveniente de fuentes radiactivas

Francisco Blanco
fmblanco@live.com.ar

Juan Manuel Pérez Ipiña
jmperezipinia@gmail.com

Sabrina Zacarías
sabrnamzacarias@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

5 de mayo de 2015

Resumen

En este trabajo se estudió la emisión de rayos gamma de distintos elementos radioactivos como el cesio, el sodio, o el bismuto. En particular, se caracterizó su espectro de emisión en función de la energía y se analizó la naturaleza estocástica del proceso de emisión realizando estadística sobre períodos largos de actividad. También se caracterizó el decaimiento de la intensidad en función del grosor y el número atómico de distintas placas dispuestas entre el detector y la fuente. De esta forma fue posible determinar el coeficiente de decaimiento de los elementos utilizados en cada placa, como plomo, aluminio o cobre.

1. Introducción

1.1. Decaimiento radiactivo

La radiactividad es el proceso asociado a la liberación de energía de un átomo cuando pasa de un estado de energía elevado a uno fundamental (o de menor energía). Ocurre naturalmente en isótopos inestables de diferentes elementos como el uranio, el cesio, el sodio, etc. La liberación de energía puede ocurrir de diversas formas: Variando la configuración de sus electrones (rayos X), variando la energía de su núcleo (rayos gamma) o liberando partículas pesadas, sea electrones, protones, neutrones, etc. Los tipos de radiación más comunes son: alpha (2 protones y 2 neutrones), beta (Electrón y antineutrino o positrón y neutrino) y gamma (fotones de alta frecuencia). Este último es el tipo de radiación que se estudiará. Su importancia radica, entre otros factores, en que la frecuencia del fotón emitido depende tanto de la diferencia de energías entre el estado inicial y final del nucleón como del elemento al cual pertenece el átomo. Es decir, se puede determinar los elementos de una muestra midiendo el patrón que produce la radiación gamma a lo largo del tiempo. La técnica se conoce como espectroscopía de radiación gamma.

La radiación gamma también está relacionada

con los efectos fotoeléctrico y Compton causados por la interacción de ésta con la materia. El efecto fotoeléctrico se caracteriza por la absorción total de un fotón, mientras que en Compton la absorción puede ser parcial (el fotón es dispersado). Luego de la interacción de un fotón gamma con un electrón, éste tendrá más o menos energía dependiendo de si el fotón fue absorbido total o parcialmente.

1.2. Emisión gamma por aniquilación positrón-electrón

Dado que este trabajo se centra en la espectroscopía de radiación gamma es importante tener en cuenta que el origen de las partículas detectadas en el experimento puede ser diverso. Los fotones pueden haberse generado debido al decaimiento de un átomo a un nivel inferior de energía o, por el contrario, a la aniquilación de un positrón emitido por el átomo con un electrón exterior a este[1]. En la figura 1 se muestra un esquema del decaimiento del Na^{22} .

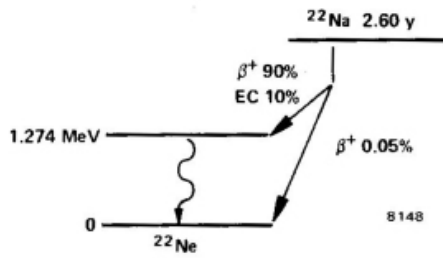


Figura 1: Esquema del decaimiento de un átomo de Na^{22} a uno de Ne^{22} . Puede verse que el decaimiento produce la emisión de un fotón de 1274 keV y un positrón.

Como puede verse en el esquema, el átomo de Na^{22} tiene 90% de probabilidades de decaer a un estado excitado del Ne^{22} emitiendo un positrón y 10% de hacerlo por la absorción de un electrón (electron capture). Este nuevo estado energético tiene una vida media de $3ps$ por lo que rápidamente decae al estado fundamental emitiendo un fotón de 1274 keV.

Por otro lado, si el positrón emitido entra en contacto con un electrón ambos se aniquilarán generando un par de fotones viajando en sentidos contrarios. Como puede verse en la ecuación 1 la energía de cada fotón es igual a la energía en reposo del electrón.

$$E_{\gamma} = m_e c^2 = 511keV \quad (1)$$

1.3. Naturaleza estadística del decaimiento radiactivo.

El decaimiento individual de un núcleo o átomo es un proceso estocástico[4]. La emisión de fotones, por ejemplo, se realiza en forma aleatoria, emitiendo radiación en dirección y tiempos no predecibles microscópicamente. Cada uno tiene probabilidad P de decaer por unidad de tiempo, pero esta probabilidad es casi nula. No obstante, para un ensamble macroscópico de átomos que decaen se detecta una cantidad de decaimientos del orden de la unidad por segundo.

La función de distribución que caracteriza este decaimiento es la distribución *Poissoniana*¹,

¹Ver apéndice

cuya característica principal es que su valor medio (E) coincide con su varianza (V)[2].

$$E = V = \lambda \quad (2)$$

Asintóticamente, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, la distribución de Poisson se vuelve la distribución *Gaussiana*.

El objetivo de este experimento es precisamente estudiar la naturaleza de la distribución estadística asociada al decaimiento radioactivo y obtener la energía liberada al decaer así como la frecuencia media de emisión de los elementos estudiados.

1.4. Atenuación de la radiación a través de diferentes materiales

Los rayos gamma interactúan con la materia principalmente debido a la absorción fotoeléctrica, al efecto Compton o al proceso de aniquilación de pares [3]. En este experimento se determinará el coeficiente de absorción μ , el cual depende de cada material y de la energía que lo esté atravesando.

En particular, para materiales cuyo número atómico Z es grande, la radiación tiene más probabilidad de 'chocar' y por lo tanto más probabilidad de interactuar con la materia a través de efecto fotoeléctrico o Compton. Como consecuencia, la atenuación debería ser mayor. En el caso de materiales cuyo Z es menor, los átomos individuales son más chicos y por lo tanto las chances de interactuar con la radiación es menor, por lo que la atenuación es menor que en el caso anterior.

Con dicha característica presente, se estudia el decaimiento de la radiación al atravesar diferentes grosores de Plomo ($Z=82$), Aluminio ($Z=13$) y Cobre ($Z=29$). De la ley de Beer-Lambert [4] se tiene que la disminución de la intensidad de la radiación al atravesar un material está dada por

$$I = I_0 e^{-\mu \rho x} \quad (3)$$

Donde I es la intensidad luego de atravesar el material, I_0 es la intensidad inicial, μ es el *coeficiente de absorción*, ρ la densidad del material y x el grosor.

2. Armado Experimental

Para la correcta realización del experimento, primero se procedió a establecer los parámetros con los cuales luego mediremos las fuentes. Para esto, se utilizó un pulso de referencia *Canberra 1047*, un amplificador *Canberra 2022* y un osciloscopio *Tecktronik TDS 1002B*. El objetivo es enviar pulsos fijos al osciloscopio a través del amplificador para observar la respuesta al variar parámetros.

2.1. Detección de la radiación gamma

Luego se montó el dispositivo experimental que se observa en la figura 2.

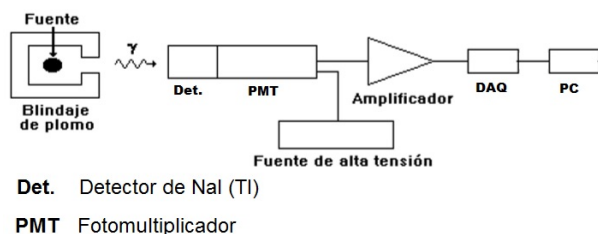


Figura 2: Esquema del dispositivo experimental utilizado para detectar el espectro energético de la radiación

En este caso el objetivo es detectar la emisión gamma de diferentes fuentes radiactivas, utilizando como detector un centellador de yoduro de sodio dopado con talio como activador [Nal(Ti)], cuya eficiencia está entre el 7% y el 8%, dependiendo del material[9], una fuente de alta tensión y la plaqueta de adquisición DAQ. La interacción de la radiación gamma con el centellador ioniza los átomos de sodio generando estados excitados que decaen emitiendo nuevos fotones. Luego, en el fotomultiplicador, éstos interactúan con los dinodos del instrumento desprendiendo una cantidad de electrones proporcional a la energía del fotón incidente. Estos terminan generando una corriente que será proporcional al voltaje medido por el sistema de adquisición. Si el fotón es absorbido totalmente por el centellador, la corriente medida será proporcional a la energía del fotón. En cambio, si se produce efecto Compton en el dispositivo, el voltaje final será menor.

El dato que se utiliza no es la corriente, sino su integral en el tiempo, dado que ésta es la cantidad de electrones generados por el fotón incidente. El amplificador integra la señal en un intervalo temporal definido por el parámetro *shaping time* y amplifica la señal (variando los parámetros *course* y *fine gain*), dado que la señal emitida por el fotomultiplicador es muy baja.

Se tomaron mediciones sin fuentes para probar el funcionamiento del programa de adquisición con el ruido de fondo.

Para optimizar la detección se utilizó más de una fuente durante una misma detección dado que algunas muestras poseían poca actividad. Además se dispuso el centellador a una distancia mínima de la fuente, de $\sim 0,5\text{mm}$ la cual es la distancia permitida por el aislante plástico que poseen las fuentes.

Para asegurar que los espectros se vieran y no saturaran se analizaron pulsos provenientes de las muestras más y menos energéticas. De acuerdo a los valores tabulados, estas fueron el sodio, con un pico en 1274 keV, y el Bario, con un pico de 256 keV (En realidad, la muestra más energética era la de cobalto, pero resultó tener una emisión muy débil por lo que se prefirió utilizar el sodio).

Teniendo en cuenta esto, se decidió setear el *shaping time* en $12\mu\text{s}$, el *course gain* en $3k$ y *fine gain* en 0,8. Se mantuvo durante toda la experiencia esta disposición.

Luego se dispusieron las fuentes radiactivas de Cs^{137} , Ba^{133} , Na^{22} , Co^{60} y Bi^{207} , las cuales fueron aisladas del entorno con plomo por seguridad y a su vez para disminuir el ruido externo. Se realizaron mediciones de dos minutos sobre todas ellas.

Dado que el programa de adquisición mide voltaje, se calibraron las mediciones en referencia a las energías de emisión tabuladas, otorgando a cada voltaje perteneciente a un fotopico de emisión de las fuentes, un valor de energía.

Los datos adquiridos por el centellador fueron procesados por un programa de matlab que contaba los picos de la señal y graficaba el espectro de cada elemento en función del voltaje recibido.

2.2. Análisis estadístico

Para realizar el análisis estadístico de la emisión gamma se estudiaron las mediciones más largas de cada elemento. Fue imposible adquirir una cantidad muy grande de datos debido a que el programa de adquisición disponía de una memoria limitada. Luego se realizó un histograma y se obtuvo la distribución de la frecuencia de emisión para diferentes ventanas temporales.

2.3. Decaimiento por interacción con otros materiales

Para estudiar el coeficiente de atenuación de distintos materiales primero se analizó cómo decae la radiación con la distancia. Para esto se utilizó una configuración experimental como se ve en la figura 3

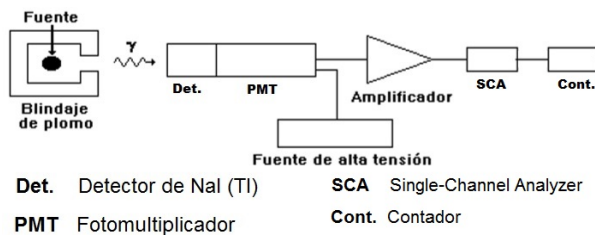


Figura 3: Esquema del dispositivo experimental utilizado para detectar el decaimiento de la radiación gamma.

Como puede verse en la figura previa, se utilizó un Single-Channel Analyzer para filtrar la señal en voltaje y obtener únicamente los fotopicos. Cada vez que el dispositivo recibe un pico que pasa el filtro utilizado, emite un pulso por el canal de salida. Para determinar la frecuencia promedio de estos picos se conectó el SCA a un contador *Universal Counter Protek U1000*. Se ve entonces que la frecuencia que da el contador está directamente asociada a la cantidad de fotopicos que llegan al sistema de detección.

Luego de estudiar el decaimiento de la radiación con la distancia, se colocaron placas de distintos materiales (y distintos grosores) entre la fuente y el detector (fijada una distancia entre éstos) para analizar como decaía la intensidad en función del grosor de las placas y el número atómico de las mismas. Se utilizaron placas de

plomo, aluminio y cobre con grosores de entre 2 y 30mm. Se graficó la frecuencia de los pulsos en función del grosor de las placas, para obtener μ según la ecuación 3.

3. Resultados y análisis

Como primer resultado se obtuvieron picos provenientes del pulso de referencia a 4V durante 1 minuto con una frecuencia de 90Hz, observando que el programa en Matlab adquiría correctamente (figura 4).

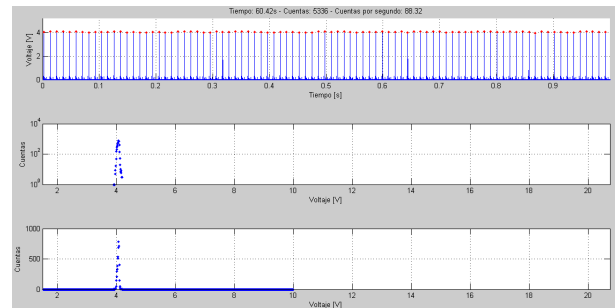


Figura 4: Medición de un pulso de referencia de 4V de amplitud y 90Hz de frecuencia.

Para calibrar el sistema se realizó una curva de energía tabulada en función del voltaje de cada fotopico. Los datos de voltaje se obtuvieron ajustando cada fotopico por una campana gaussiana. En la figura 5 puede verse el ajuste realizado para el cesio a modo ilustrativo.

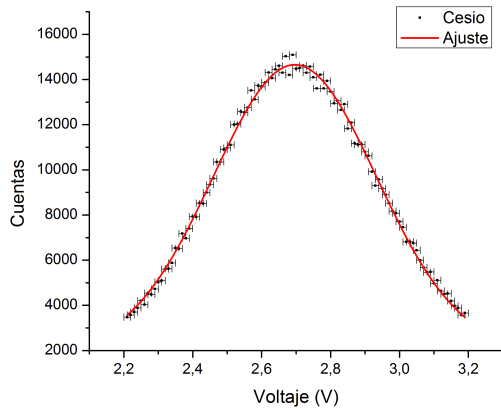


Figura 5: Gráfico de los datos obtenidos para el fotopico del cesio junto con un ajuste por una campana gaussiana en rojo.

Una vez calibrado el sistema, se tomaron los espectros de cada una de las fuentes, obteniendo las curvas plasmadas en las figuras 7 a 11.

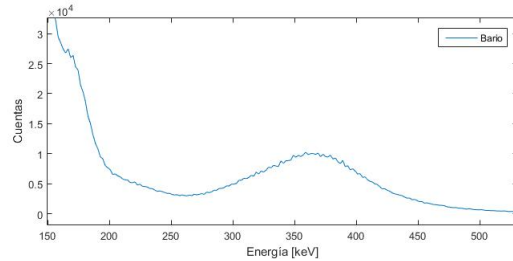


Figura 7: Medición del espectro del *Ba*133 durante 2 minutos.

Una vez obtenidas las energías de cada fotopico junto con su dispersión se hizo un ajuste lineal de los datos, como puede verse en la figura 6.

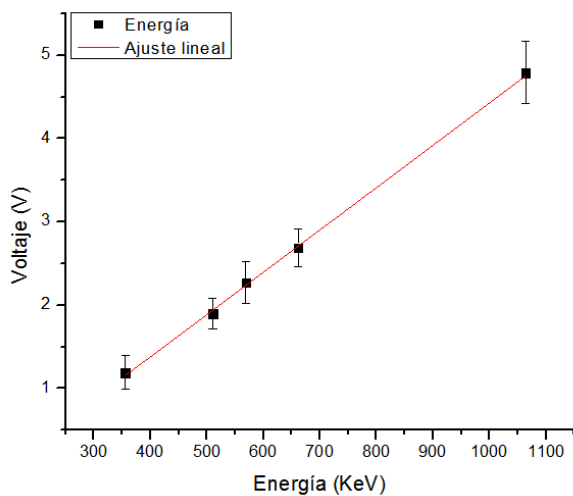


Figura 6: Calibración de la energía en función del voltaje para fuentes radiactivas.

El error considerado es el proveniente de la dispersión estándar σ más el error del valor medio arrojado por el ajuste de los fotopicos con una distribución gausseana. El ajuste lineal arrojó un $R^2 = 0,999$ por lo que se considera un comportamiento lineal entre el voltaje y la energía de cada fotopico.

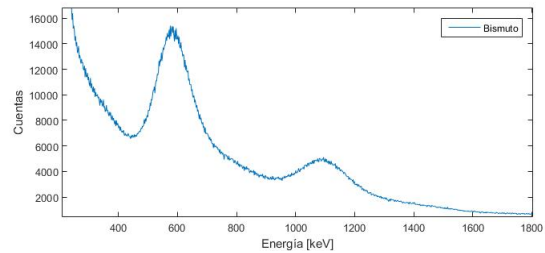


Figura 8: Medición del espectro del *Bi*207 durante 2 minutos.

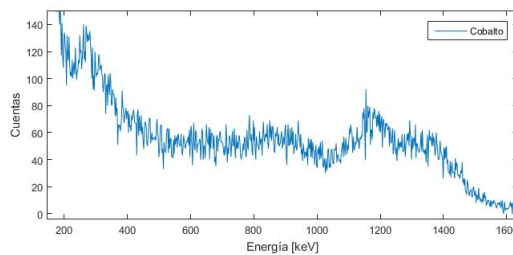


Figura 9: Medición del espectro del *Co*60 durante 2 minutos.

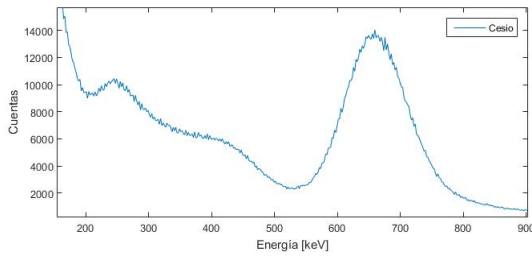


Figura 10: Medición del espectro del Cs^{137} durante 2 minutos.

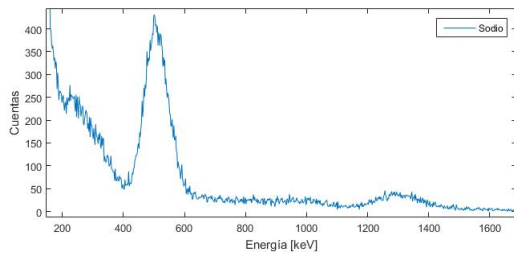


Figura 11: Medición del espectro del Na^{22} durante 2 minutos.

En cada figura puede verse los picos asociados a la energía de los fotones gamma incidentes (fotopico). En particular, en la figura del Cesio y del Bario también puede distinguirse un borde de mayor amplitud para energías menores al fotopico. Esto se denomina borde Compton y representa los fotones gamma que no fueron completamente absorbidos, como fue explicado en la sección anterior.

En la tabla 1 se comparan los valores obtenidos para cada fotopico con los valores tabulados.

	Energía [keV]	Energía [keV]
Elemento	Tabulada	Medida
Ba	356,01	363 ± 8
Bi	569,15	571 ± 4
Bi	1063,63	1070 ± 4
Co	1173,24	1181 ± 20
Co	1271,5	1280 ± 5
Na	511	505 ± 5
Na	1274	1280 ± 5
Cs	661,6	659 ± 4

Tabla 1: Tabla comparativa de los valores medidos y tabulados para los fotopicos de cada elemento.

Es importante considerar que, al ser un proceso estocástico, el error asociado a estas mediciones es del tipo estadístico. Se introduce un error asociado a la dispersión en cada campana y al error del valor medio, el cual está relacionado con la eficiencia del detector.

Al observar los espectros encontramos que en la figura del sodio se ven dos fotopicos. Como se vio en la introducción, el espectro del Na^{22} debía tener un fotopico en 1274 keV generado por el decaimiento al estado fundamental y otro en 511 keV, de acuerdo con la ecuación 1, generado por la aniquilación del positrón emitido con un electrón. Efectivamente en el gráfico obtenido tras el conteo de picos pueden verse dos campanas centradas en los valores esperados.

El espectro del bismuto también presenta dos fotopicos. Sus energías no se corresponden con la de un pico de aniquilación. Por esto, se cree que puede deberse a que el bismuto decae a un estado intermedio antes de llegar al fundamental.

3.1. Estadística

Con los datos obtenidos para el cesio se utilizó un programa de Matlab[8] para realizar un histograma sobre la frecuencia de emisión de la muestra. El funcionamiento del programa consistía en separar la medición en intervalos temporales iguales y contar la cantidad de fotopicos que sucedieron en ellos. En las figuras 12 a 15 se pueden ver algunos de los histogramas obtenidos utilizando distintas ventanas temporales.

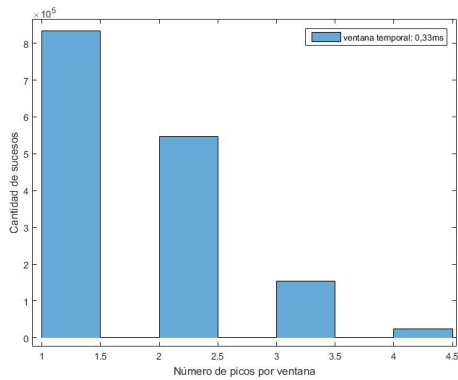


Figura 12: Histograma realizado sobre la muestra de cesio para una ventana temporal de 0,3 ms.

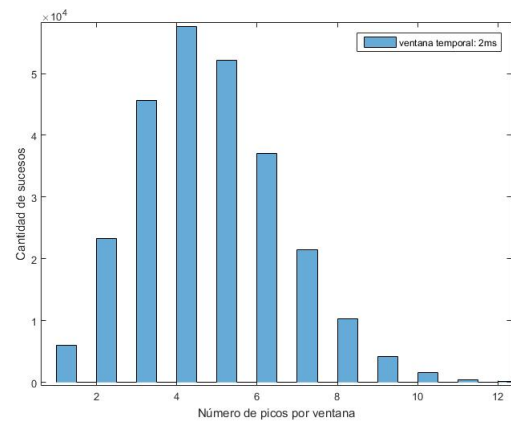


Figura 14: Histograma realizado sobre la muestra de cesio para una ventana temporal de 2ms.

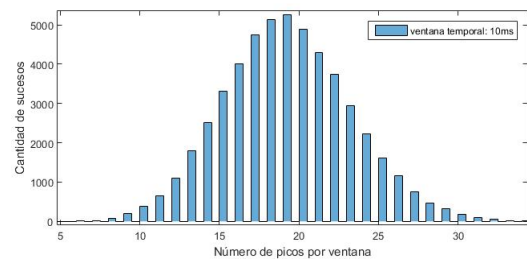


Figura 15: Histograma realizado sobre la muestra de cesio para una ventana temporal de 10ms.

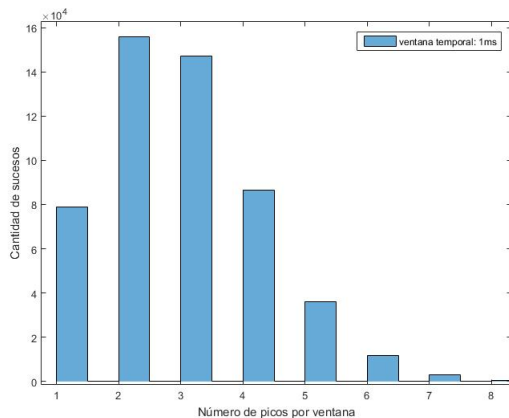


Figura 13: Histograma realizado sobre la muestra de cesio para una ventana temporal de 1ms.

Como puede verse en las figuras anteriores, el histograma es más asimétrico cuanto más chica es la ventana. Esto tiene que ver con que la cantidad de picos que caen por ventana es cada vez menor por lo que la campana se acerca al cero. Estadísticamente, a medida que crece la ventana temporal, la distribución de la figura 13, que parecería ser poissoniana, se convierte en una gaussiana en la figura 15, lo cual es coherente con la predicción del modelo mencionado en la introducción

Para corroborar que la distribución de los picos tiene un comportamiento poissoniano, se graficó la varianza en función del valor medio para distintas ventanas temporales. Esto se realizó para los elementos cuyas mediciones tuvieron la mayor cantidad de datos.

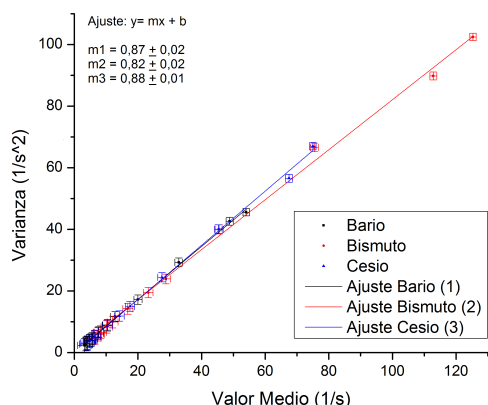


Figura 16: Gráfico de la varianza en función del valor medio para las muestras de *Ba*, *Bi* y *Cs*. La pendiente fue, respectivamente, de $(0,87 \pm 0,02) \frac{1}{s}$, $(0,82 \pm 0,02) \frac{1}{s}$ y $(0,88 \pm 0,01) \frac{1}{s}$.

Los tres ajustes lineales tuvieron un R^2 de 0.999, 0.997 y 0.998 respectivamente por lo que se cree que los datos se comportan de forma lineal. De acuerdo a la ecuación (2), las curvas deberían tener pendiente 1. Como puede verse en la figura anterior, la pendiente obtenida para cada gráfico fue respectivamente, de $(0,87 \pm 0,02) \frac{1}{s}$, $(0,82 \pm 0,02) \frac{1}{s}$ y $(0,88 \pm 0,01) \frac{1}{s}$.

Los resultados obtenidos no concuerdan con lo esperado teóricamente. Se cree que esto se debe a la necesidad de una mayor cantidad de datos para hacer un mejor estudio estadístico.

Una vez obtenidos los histogramas, se realizaron ajustes gausseanos para obtener el valor medio y la dispersión. El valor medio de cada histograma representa la cantidad media de picos que cayó por ventana temporal. Este, obviamente, es menor cuanto más chica es la ventana temporal. Al dividir el valor medio por el ancho de la ventana temporal se obtiene la frecuencia media de emisión del elemento. Este valor es constante para cualquier ventana temporal utilizada. Los resultados pueden verse en la tabla 2.

Elemento	Frecuencia (Hz)	Dispersión (Hz)
Ba	1200	250
Bi (1ero)	2870	500
Bi (2do)	1060	200
Co	32	10
Na (1ero)	89	30
Na (2do)	14	1
Cs	1680	400

Tabla 2: Tabla con la frecuencia media de emisión de fotones gamma de cada elemento junto con la dispersión estándar σ asociada a dicho valor.

Como puede verse en la tabla 2, el Bario, el Bismuto y el Cesio tienen una frecuencia de emisión alta, lo cual puede comprobarse en la buena resolución de los espectrogramas de dichos elementos. En cambio, las fuentes de Cobalto y Sodio presentan una actividad un orden de magnitud menor que las otras. Por esto resultó difícil hacer estadística sobre estos elementos ya que había pocos datos. Hay que tener en cuenta que se usó una distinta cantidad de fuentes de cada elemento (2 para el cesio, 4 para el cobalto, 1 de bismuto, 2 de sodio y 1 de bario).

3.2. Decaimiento por interacción con materiales

Con sólo el centellador y la fuente, se fue alejando el primero para medir la dependencia de la radiación con la distancia. Los resultados se observan en la figura 17.

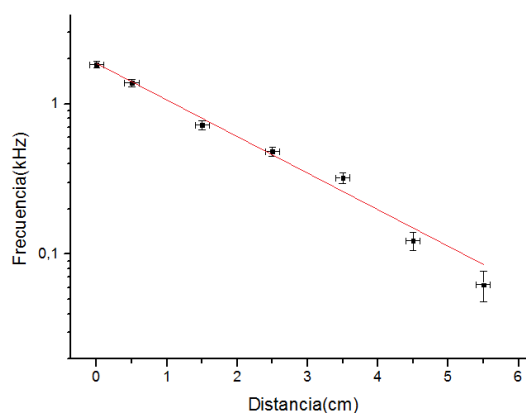


Figura 17: Decaimiento con la distancia.

En la figura 17 se ve como se linealizaron las mediciones y se ajustó por una función $y = ax + b$. Se obtuvo un $R^2 = 0,98$, de modo que se concluye que los datos originales parecerían tener un comportamiento exponencial. Se ve que el decaimiento es muy rápido, no se puede alejar demasiado el centellador sin perder una parte considerable de la radiación original. Observando este gráfico se eligió una distancia óptima para el análisis con materiales, en la que no hubiese decaído considerablemente y a la vez hubiese espacio para poner suficientes placas.

Con una distancia entre el centellador y la fuente de $d = (2,5 \pm 0,1)cm$, se introdujeron varias placas de aluminio ($Z = 13$) y se observó la frecuencia de los picos para distintos grosores de este material. Primero se midió el fondo (el 'cero' a esas energías) del sistema removiendo la fuente y midiendo con el contador. No se encontró ningún pulso, así que se procedió con el experimento. Los resultados se observan en la figura 18.

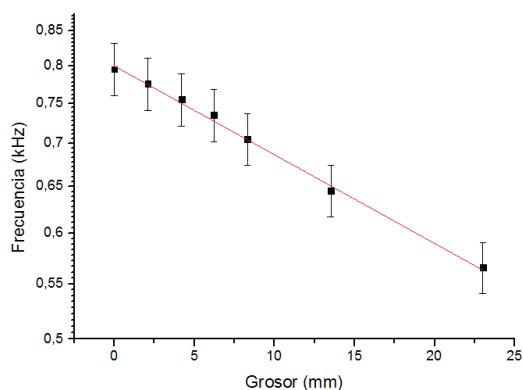


Figura 18: Decaimiento al atravesar placas de aluminio.

Nuevamente se linealizaron los datos y se vio que presentan un comportamiento exponencial (debido a la confianza que se tiene de $R^2 = 0,997$ en el ajuste lineal). Del ajuste se obtuvo un coeficiente de absorción $\mu = (0,054 \pm 0,004) \frac{cm^2}{g}$, que no coincide en intervalos de error, pero sí en orden de magnitud con el valor tabulado de $\mu = 0,073 \frac{cm^2}{g}$ [5] (las densidades de los materiales se pueden encontrar en cualquier libro de química elemental).

Se repitió el experimento con placas de cobre ($Z = 29$), a la misma distancia que antes. Tampoco se encontró un fondo apreciable en el sistema. Los resultados se observan en la figura 19.

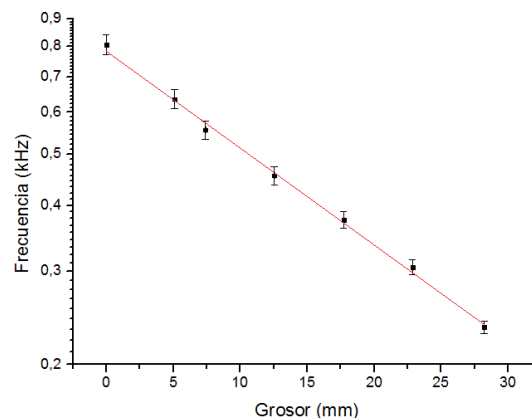


Figura 19: Decaimiento al atravesar placas de cobre.

El ajuste luego de linealizar otorgó un $R^2 = 0,997$, por lo que se tiene confianza en que las mediciones presentan un comportamiento exponencial. Se obtuvo un $\mu = (0,056 \pm 0,003) \frac{cm^2}{g}$, que está en orden de magnitud con el tabulado de $0,075 \frac{cm^2}{g}$ [7].

Luego se introdujeron bloques y placas de plomo ($Z = 82$) en el sistema. Se trabajó en la misma distancia y tampoco se observó un fondo antes de introducir las placas. Los resultados se observan en la figura 20.

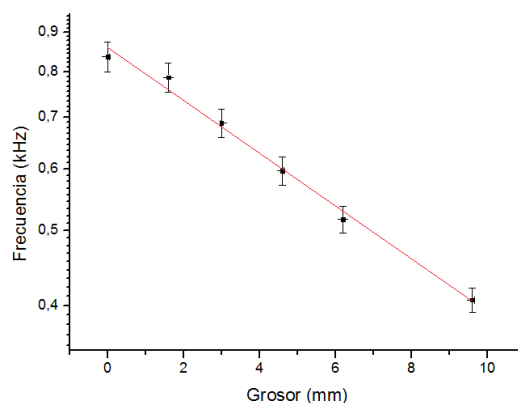


Figura 20: Decaimiento al atravesar placas de plomo.

También se linealizaron los datos, obteniéndose un $R^2 = 0,99$ y un $\mu = (0,13 \pm 0,01) \frac{cm^2}{g}$, que coincide en orden de magnitud con el valor tabulado de $\mu = 0,105 \frac{cm^2}{g}$ [6].

4. Conclusiones

Se lograron medir los espectros de distintas fuentes radioactivas. Para todas se pudo distinguir el fotopico (los dos fotopicos para el bismuto), el borde compton para el Cesio y el Bario y el pico de aniquilación para el sodio.

Se realizó un análisis estadístico de la fuente de cesio y se observó que la distribución de probabilidad presentaba un comportamiento poissoniano. Se vió como ésta se aproximaba a una gaussiana al aumentar la duración de las ventanas temporales. También se determinó la frecuencia media de emisión de cada elemento. Se propone que los sucesivos grupos que realicen esta práctica estudien esta frecuencia para analizar el decaimiento en la emisión con el tiempo.

Se analizó el decaimiento de la radiación detectada al alejar el centellador de la fuente. Entre estos componentes se pusieron placas de distintos materiales y se observó cómo interactuaban los rayos gamma con éstos según el número atómico. Para todos los materiales analizados se encontró que el comportamiento parecía ser exponencial y se obtuvieron todos los μ en orden de magnitud con los tabulados.

5. Referencias

- [1] Ortec Experiments *Positron-Annihilation-Lifetime-Spectrometry*. Experimento 27, p.2
- [2] Frodsen A., Skjeggstad O. *Probability and statictics in particle physics*. Cap 4, ec (4-22)
- [3] S. M. Shafroth *Scintillation Spectroscopy of Gamma Radiation*. Gordon and Breach, London (1967).
- [4] G. F. Knoll *Radiation Detection and Measurement*. John Wiley and Sons, New York (1979).

[5] <http://faculty.mint.ua.edu/pleclair/PH255/templates/formal/formal.pdf>

[6] Ortec Experiments *Gamma ray spectroscopy using NaI(Tl)*. Experimento 3, p.12

[7] P. LeClair *Gamma Ray Attenuation*. Enero de 2010

[8] *Medicion_ DAQ_detector_picos_histograma_Dinanico*.

[9] Canberra Detectors *Gamma-Xray-Detection*.p.3

Apéndice

La función de distribución Poissoneana surge como límite de la distribución binomial. Ésta es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de N ensayos independientes entre sí, con una probabilidad fija p de tener k éxitos entre los ensayos y una probabilidad $q = 1 - p$ de que ocurra un fracaso.

$$B(k, N, p) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k} \quad (4)$$

En el caso de la emisión radiactiva, la probabilidad de que un átomo decaiga (‘obtenga éxito’) es casi nula, por lo tanto $p \rightarrow 0$. Sin embargo, la cantidad de átomos en una muestra es muy grande, por lo que el ensayo es repetido infinitas veces: $N \rightarrow \infty$, con $Np = cte = \lambda$.

Tomando dichos límites, lo que se obtiene es la distribución de Poisson

$$\frac{N!}{k(N-k)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{N^k}{k!} \quad (5)$$

$$q^{N-k} = (1-p)^{N-k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty; p \rightarrow 0} e^{-pN} \quad (6)$$

$$B(k, N, p) \xrightarrow{pN \rightarrow \lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \equiv P(k, \lambda) \quad (7)$$

La cual, para $\lambda \rightarrow \infty$, tiende a la distribución normal.