

# Estudio de bandas prohibidas en cristales sónicos

N. TORASSO\*, A. TROIANO\*\*

Laboratorio 5, Dpto. de Física, FCEyN, UBA

nicolas.torasso@gmail.com\*, aat.2090@gmail.com\*\*

## Resumen

*Se estudia la propagación de ondas de sonido a través de un cristal sónico bidimensional construido con tubos de aluminio. Se hace un estudio preliminar caracterizando el sistema parlante-micrófono y analizando la influencia del ambiente sobre el experimento. Se identifican bandas prohibidas en dos direcciones de propagación para distintas configuraciones de los tubos, y se contrastan los resultados obtenidos con un modelo teórico. El estudio de bandas prohibidas en un cristal permite obtener información acerca de su simetría, por lo que se analizan posibles métodos en base a las experiencias realizadas.*

## 1. Introducción

### 1.1. Cristales sónicos

Un cristal sónico consiste en un medio (fluido, sólido o mezcla de ambos) que presenta una estructuración espacial de la densidad  $\rho$  y/o de las constantes elásticas  $B$  en una escala del orden de la longitud de onda del sonido. En la práctica esto se traduce típicamente en construir un arreglo regular de cuerpos sólidos en un fluido. Por ejemplo, una grilla de  $N \times N$  tubos iguales de aluminio sumergidos en aire. Una estructura de este tipo presenta una gran diferencia entre las densidades  $\rho$  y las velocidades del sonido  $c$  entre uno y otro medio. Como consecuencia resulta un gran cociente de impedancias  $Z_i$  definidas como  $Z_i = c_i \rho_i$ , donde  $i$  indica el medio (en el ejemplo, aire o aluminio). Esta gran diferencia de impedancias implica una alta reflectividad en las interfases, con lo que el problema puede tratarse como si los objetos sólidos fuesen fluidos con gran densidad. Esto permite usar la ecuación de propagación del sonido en un fluido [1]:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) = 0 \quad (1)$$

Donde  $p$  es la presión y  $\tau = ct$  es el tiempo normalizado. De esta manera se simplifica el problema porque la Ecuación (1) es más simple que la ecuación para un sólido. En particular, no genera ondas transversales. En este contexto puede entonces considerarse el fenómeno como scattering de objetos impenetrables. Así, los resultados suelen ser independientes del material que se usa como objeto difusor, siempre y cuando el cociente de impedancias sea alto.

Se define la *función de transferencia* de un cristal como el cociente entre el módulo de la tensión del micrófono dividido el módulo de la tensión de referencia:

$$T = \left| \frac{V_{mic}}{V_{ref}} \right| \quad (2)$$

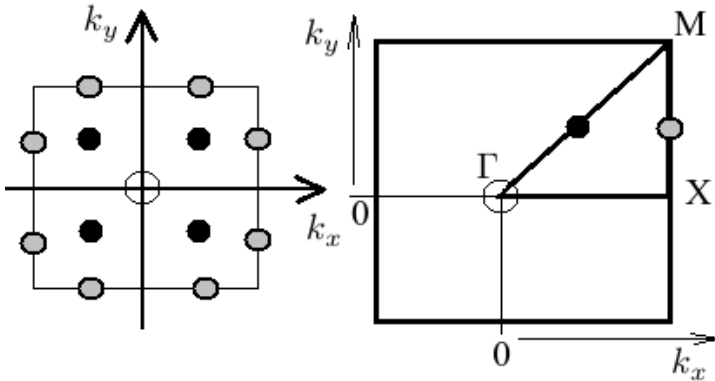
En trabajos con ondas de sonido, conviene definir una tasa de transmisión normalizada ( $T'$ ), medida en decibeles y calculada según:

$$T' = 20 \times \log_{10}(T) \quad (3)$$

### 1.2. Diagramas de bandas

El diagrama de bandas sónico es la relación de dispersión de los modos que se establecen en la estructura

cristalina. Para representar las direcciones de un cristal cuadrado que presenta simetría de reflexión, se trabaja en el espacio recíproco al espacial, donde cada punto del plano es la suma de las componentes  $x$  y  $y$  de los números de onda  $k_x$  y  $k_y$ . Para poder dibujar en un plano la relación de dispersión, se aprovecha la simetría del cristal, que permite mapear cualquier punto del plano de los  $k$ 's en puntos sobre un segmento, como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1:** Representación de las direcciones de propagación en un cristal mediante los lados del triángulo  $\Gamma XM$ . Se mapearon tres puntos del plano a modo de ejemplo.

Los modos presentes en el cristal son soluciones estacionarias de la Ecuación 1, es decir soluciones del tipo  $p(\vec{r}, \tau) = p(\vec{r})e^{i\omega t}$ . Como las constantes  $\rho$  y  $B$  presentan una estructuración periódica, puede escribirse:

$$\rho(\vec{r})^{-1} = \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{G}}^{-1} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (4)$$

$$B(\vec{r})^{-1} = \sum_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^{-1} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}, \quad (5)$$

donde  $\vec{G}$  son los vectores de la red recíproca ( $\vec{R} \cdot \vec{G} = 2\pi n$ , con  $\vec{R}$  los vectores de la red directa). Las soluciones son los llamados modos de Bloch:

$$p(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \sum_{\vec{G}} p_{\vec{k},\vec{G}} e^{i\vec{G}\vec{r}} \quad (6)$$

Donde  $\vec{k}$  es el vector de onda de Bloch, y  $u_{\vec{k}}(\vec{r})$  una función periódica que caracteriza la distribución de

energía del modo. Introduciendo las Ecs. 4, 5 y 6 en 1 se obtiene una ecuación de autovalores para  $p_{\vec{k},\vec{G}}$ :

$$\sum_{\vec{G}'} \left[ \omega^2 b_{\vec{G}-\vec{G}'}^{-1} - \rho_{\vec{G}-\vec{G}'}^{-1} (\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} + \vec{G}') \right] p_{\vec{k},\vec{G}} = 0 \quad (7)$$

Para una red de cilindros resulta:

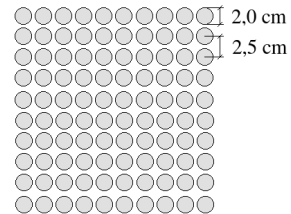
$$\rho_{\vec{G}}^{-1} = \frac{\rho_h}{\rho_c} f + (1 - f), \quad |\vec{G}| = 0 \quad (8)$$

$$\rho_{\vec{G}}^{-1} = \left( \frac{\rho_h}{\rho_c} - 1 \right) 2f \frac{J_1(|\vec{G}|r_0)}{|\vec{G}|r_0}, \quad |\vec{G}| \neq 0 \quad (9)$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de orden 1 y  $f$  el factor de llenado. Para una red cuadrada  $f = \pi r_0^2 / a^2$ . Expresiones idénticas a las Ecs. 8 y 9 se obtienen para  $b_{\vec{G}}^{-1}$ . Para realizar las simulaciones numéricas del sistema físico en cuestión, se utiliza la Ecuación 7.

## 2. Desarrollo experimental

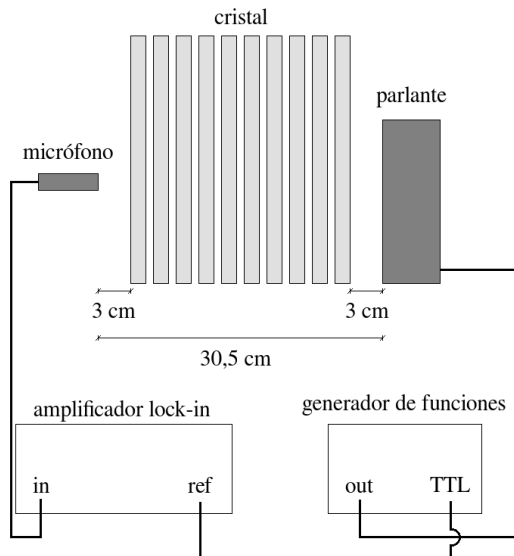
Se trabajó con un arreglo periódico bidimensional de tubos huecos de aluminio de 2 cm de diámetro y 25 cm de alto, atornillados a una mesa óptica. Se pueden construir múltiples estructuras cristalinas con estos elementos; en este trabajo se los dispuso en forma de grilla de 10x10, con una separación entre centros de 2,5 cm (ver Figura 2). También se estudiaron algunas variaciones de esta disposición principal, que se mostrarán más adelante. Se buscó conocer cómo cambia la transferencia del cristal para distintas frecuencias.



**Figura 2:** Cristal sónico construido con 100 tubos de aluminio dispuestos en una grilla de 10x10, vista superior.

## 2.1. Caracterización del instrumental

Para estudiar la función de transferencia del cristal se utilizó un parlante y un micrófono comunes, de los que típicamente se usan en las PC. El parlante se conectó a un generador de funciones (*Tektronix AFG 3021B*), y se midió la señal sobre el micrófono con un amplificador lock-in (*Stanford Research Systems SR830*). Con el mismo generador proporcionó la señal de referencia utilizando la salida TTL. En la Figura 3 se muestra un esquema del montaje experimental. Todos los barridos en frecuencia y la adquisición de datos se realizó mediante un código escrito y ejecutado en MATLAB® y conexión con el lock-in vía puerto GPIB-USB y con el generador vía USB.



**Figura 3:** Esquema del montaje experimental utilizado, vista lateral.

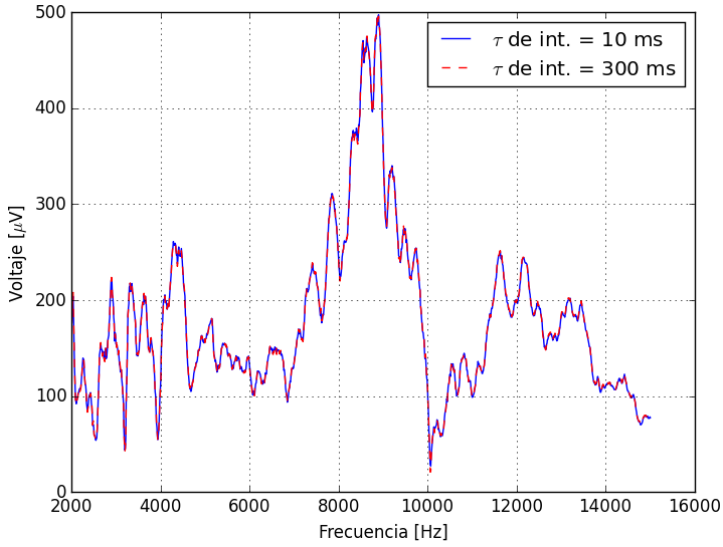
La perilla de volumen del parlante se fijó al máximo y se lo alimentó con una señal armónica de 10 mV. Durante el desarrollo de los experimentos se barrió el rango de 2-15 kHz, pues allí se encuentra la máxima respuesta del sistema parlante-micrófono. Se usó una amplitud pequeña para minimizar las molestias auditivas durante el experimento.

Se propuso ubicar parlante y micrófono a 3 cm de los bordes del cristal, uno de cada lado, como se ve en la

Figura 3, resultando una separación total entre ambos de 30.5 cm. La distancia no fue mayor para evitar efectos de borde. Cabe destacarse que para cada medición realizada en presencia del cristal fue necesario contar con una medición asociada "de calibración", con la misma separación entre el par parlante-micrófono y sin cristal de por medio, a fin de comparar cuánto se atenuó o amplificó una dada frecuencia debido al mismo. Con estas mediciones se obtuvo el voltaje de referencia de la Ecuación 2.

Con esto en mente se levantó una curva de calibración con los pares separados 30.5 cm y 36.3 cm (ver Figura 6), distancias que se corresponden con los parlantes enfrentados en la dirección transversal y diagonal del cristal respectivamente. En este punto surgen ciertas consideraciones acerca de los parámetros del experimento: el ruido del ambiente, el tiempo de integración utilizado en el lock-in, el intervalo mínimo entre dos frecuencias y los puntos donde la respuesta del sistema parlante-micrófono cae abruptamente, todo lo cual se pasa a detallar a continuación. Cabe destacarse que todos los datos de voltaje tomados con el lock-in tienen un error despreciable, motivo por el cual no se graficaron barras de error.

**Tiempo de integración** Para fijar el tiempo de integración  $\tau_{int}$  se hizo la siguiente estimación: pedimos que  $\tau_{int}$  sea mayor a 20 veces la inversa de la menor frecuencia de trabajo, i.e.,  $\tau_{int} \geq \frac{20}{2000\text{Hz}} = 10$  ms. Para verificar si este tiempo de integración era suficiente se midió una vez con  $\tau_{int} = 10$  ms y otra con  $\tau_{int} = 300$  ms. En la Figura 4 se muestran las curvas de calibración con uno y otro valor (con el ruido restado), y se ve que son indistinguibles. Al final se utilizó 300 ms como tiempo de integración para el resto del experimento, pero eventualmente se puede bajar a 10 ms si se desea acelerar el proceso de adquisición.

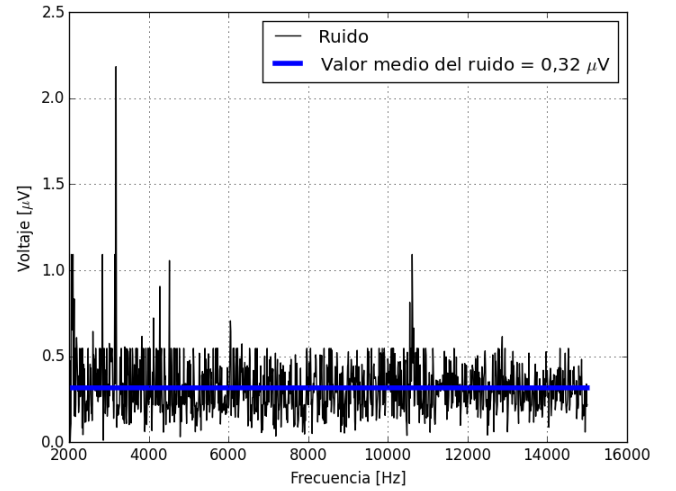


**Figura 4:** *Das mediciones de calibración en las mismas condiciones, con distintos tiempos de integración del lock-in. En azul y línea llena, con  $\tau_{int} = 10$  ms. En rojo y línea punteada, con  $\tau_{int} = 300$  ms. Se observa que ambas son indistinguibles.*

**Ruido de ambiente** Cabe preguntarse sobre la posibilidad de que existan en el ambiente fuentes de ruido en alguna o varias de las frecuencias de trabajo que se sumen a la señal emitida por el parlante (la única de interés). Para responder a esta pregunta se midió la señal sobre el micrófono con el parlante apagado, pero variando la frecuencia de referencia del lock-in en todo el rango de trabajo como se lo haría durante el experimento. El gráfico correspondiente se muestra en la Figura 5. Como se observa en ella, el ruido ambiente presenta picos en ciertas frecuencias. Sin embargo toda la señal está por debajo de  $2.5 \mu\text{V}$ , mientras que, como se verá más adelante, los valores típicos de una medición están varios órdenes de magnitud por encima (ver por ejemplo la Figura 6). Se repitió la medición otro día para ver si, en condiciones en principio diferentes, se observaba un cambio significativo en el ruido. Ambas señales resultaron similares. Se calculó el valor medio de las mismas y su desviación estándar, obteniéndose valores de ruido de  $(0.32 \pm 0.16) \mu\text{V}$  y  $(0.40 \pm 0.20) \mu\text{V}$  respectivamente. Si bien se vio que el ruido ambiente era casi despreciable frente a las mediciones efectua-

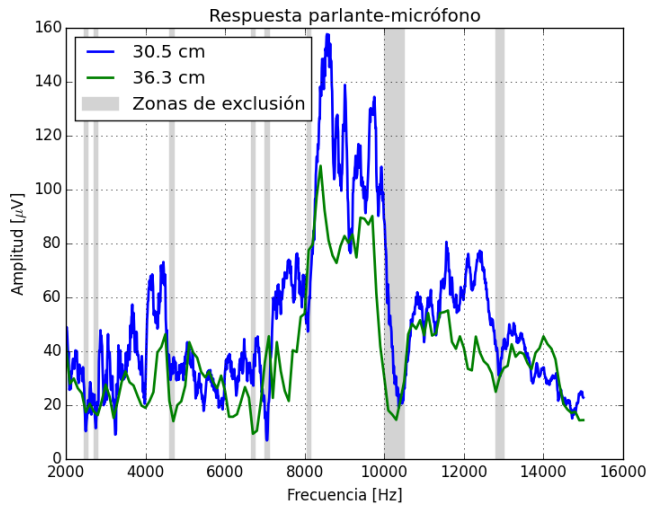
das con el parlante encendido, a todas las mediciones realizadas se les restó el valor correspondiente de ruido (según si se tomaron el primer o el segundo día), con lo cual la función de transferencia  $T$  resulta:

$$T = \left| \frac{\text{señal con cristal} - \text{ruido}}{\text{señal sin cristal} - \text{ruido}} \right| \quad (10)$$



**Figura 5:** *Medición del ruido ambiente. Se observan picos en ciertas frecuencias, pero aun estos valores son despreciables comparados con los típicos de una medición.*

**Respuesta en frecuencia del sistema parlante-micrófono** Mirando la Ecuación (10) se observa que para valores suficientemente cercanos a cero en la curva de calibración  $T$  diverge. En los casos para los cuales no se pueda asegurar una respuesta fiable del sistema parlante-micrófono (como sucede en los valles abruptos de la Figura 6), el sentido físico de la divergencia se desvirtúa, pues proviene de una falencia instrumental y no del cristal cuyas propiedades se desean conocer. Por esto, el alcance de nuestro estudio está condicionado en frecuencias, quedando fuera aquellas para las cuales la curva de amplitud de calibración cae de manera abrupta hacia valores cercanos a cero. En la Figura 6 se indican en gris las zonas descartadas de trabajo.



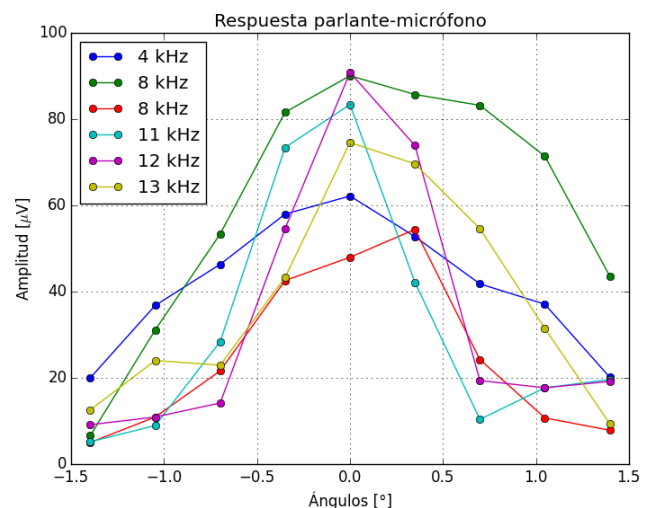
**Figura 6:** Curvas de respuesta en frecuencia del sistema parlante-micrófono. Las zonas grises se descartaron del análisis debido a la baja respuesta.

Se observa en la figura que la respuesta en frecuencia del sistema parlante-micrófono no es plana. Más aún, tiene un comportamiento oscilatorio difícil de explicar. Se supone en el trabajo que dichas oscilaciones provienen del circuito con el que funcionan el parlante y el micrófono y no del mal funcionamiento de los mismos. Para verificar esta hipótesis se recomienda realizar una calibración con otros instrumentos y comparar las respuestas. Se observa también que las oscilaciones son más abundantes en la medición de 30.5 cm. Esto se debe a que se utilizó un paso de 10 Hz, mientras que en la de 36.3 fue de 100 Hz. Existe en ambos casos una zona de máxima respuesta del sistema ubicada entre 8 y 10 kHz. Por último, llama particularmente la atención el hecho de que las curvas realizadas para distintas distancias se crucen. Esto puede deberse a que las mediciones se realizaron en días distintos.

### Frente de ondas del sistema parlante-micrófono

Parte del plan original del trabajo era medir la transferencia del cristal en disposiciones experimentales tales que el micrófono y el parlante no estuviesen necesariamente enfrentados, sino quizás orientados a  $90^\circ$  o  $45^\circ$  uno del otro. Finalmente esto no se hizo, pero por aquel motivo se buscó conocer la forma del frente de

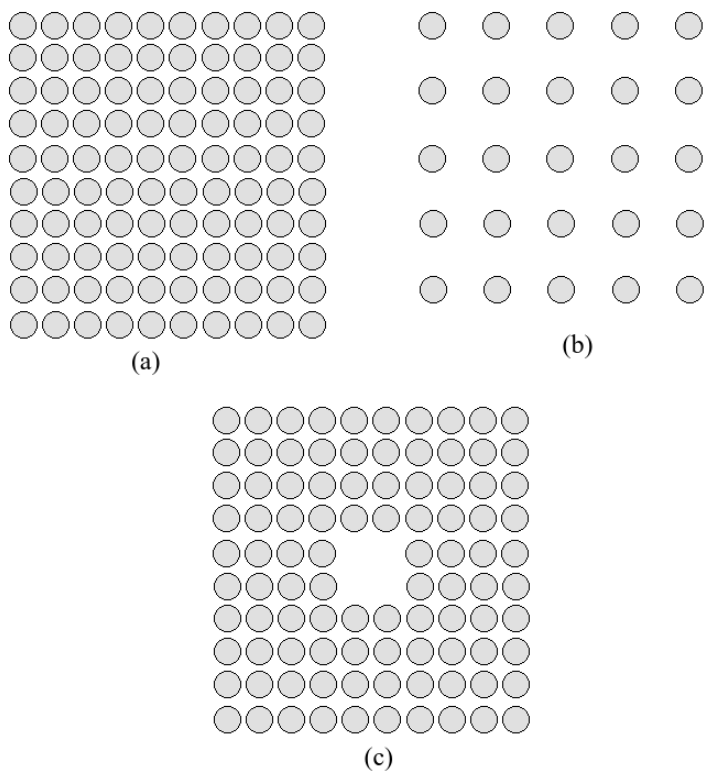
ondas que emite el parlante. Para ello se varió el ángulo  $\alpha$  de orientación entre los pares en el rango  $-80^\circ$  a  $80^\circ$ , cada  $20^\circ$ , considerando que en  $\alpha = 0^\circ$  los pares estaban enfrentados. Se barrió siempre el mismo rango de frecuencias. En la Figura 7 se muestra la respuesta en función del ángulo entre pares para algunas de las frecuencias medidas. Se observa que para todas las frecuencias el frente es asimétrico, tomando valores más altos del lado derecho. Esto es consistente con el hecho de que, en el laboratorio, había una pared de madera de ese lado, mientras que del otro no. Este hecho no había pasado inadvertido: el experimento había sido montado a propósito sobre una mesa lo más alejada posible de esta pared, quedando a aproximadamente 1,5 m. Se concluye que esta distancia no es suficiente y se recomienda cubrir la pared con gomaespuma.



**Figura 7:** Respuesta del par en función del ángulo  $\alpha$  entre ambos, para distintas frecuencias.

## 2.2. Distintos arreglos cristalinos

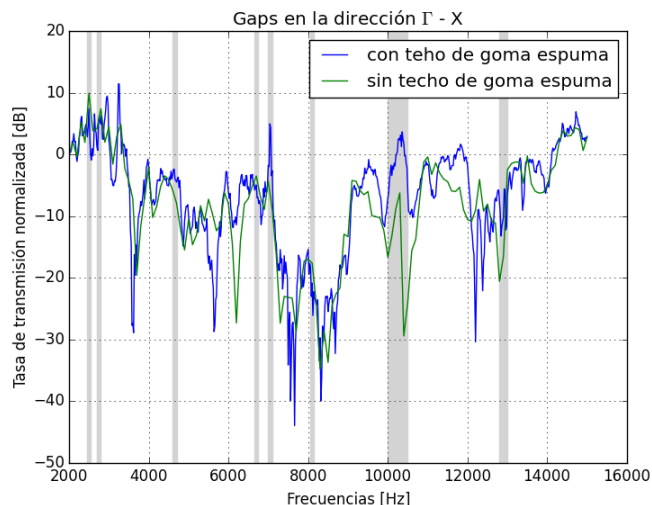
Se estudiaron tres arreglos cristalinos: primero una grilla de  $10 \times 10$  con período 2.5 cm, luego se retiraron tubos alternadamente con el fin de duplicar el período, y finalmente se estudió el cristal original retirando tubos de manera de hacer un hueco de  $2 \times 2$  en el centro del mismo. Los esquemas se muestran en las Figuras 8.a, 8.b y 8.c respectivamente.



**Figura 8:** Esquema de las distintas estructuras cristalinas construidas. a) Grilla de 10x10, separación de 2,5 cm medida desde los centros de los tubos. b) Misma estructura, removiendo filas y columnas alternadamente. c) Misma estructura que en 8.a, con un hueco de 2x2 en el centro.

Al introducir el cristal, se hizo la siguiente observación: como se comentó en la Sección 1, una gran diferencia de impedancias entre medios produce una alta reflectividad. Por ende se supone que hay una alta reflectividad en los planos que separan el cristal del aire que lo circunda, dado que allí está la interfase entre los medios “aire + aluminio” y “sólo aire”. Si esto es cierto, estarían entrando al micrófono ondas reflejadas en las caras internas del cristal, que en principio interferirían con las ondas transmitidas, que son las que se desea observar. Para verificar si se produce algún fenómeno de este tipo se colocó una capa de gomaespuma de unos 15 cm sobre el cristal, a los efectos de minimizar la reflexión sobre esa cara. Luego se comparó con una medición igual sin este material absorbente.

Se trabajó en la dirección  $\Gamma$ -X (ver Figura 1). Los resultados se muestran en la Figura 9. Se observa que la señal registrada cambia mucho, lo cual sugiere que el fenómeno de reflexión se produce y altera apreciablemente el experimento. Por esto se decidió trabajar siempre con aislante. Vale mencionar que con este mismo criterio sería recomendable aislar también las dos caras laterales, sin embargo esto no se hizo.



**Figura 9:** Mediciones de transferencia con y sin aislante de gomaespuma sobre los tubos en el cristal de 10x10.

Para los arreglos a), b) y c) de la Figura 8 se midieron las bandas de transferencia en las direcciones  $\Gamma$ -X y  $\Gamma$ -M (derecho y diagonal). Finalmente, se colocó el micrófono en una varilla para medir la amplitud sonora en los intersticios de los tubos. Esto permite realizar el diagrama de bandas del cristal.

### 3. Resultados y análisis

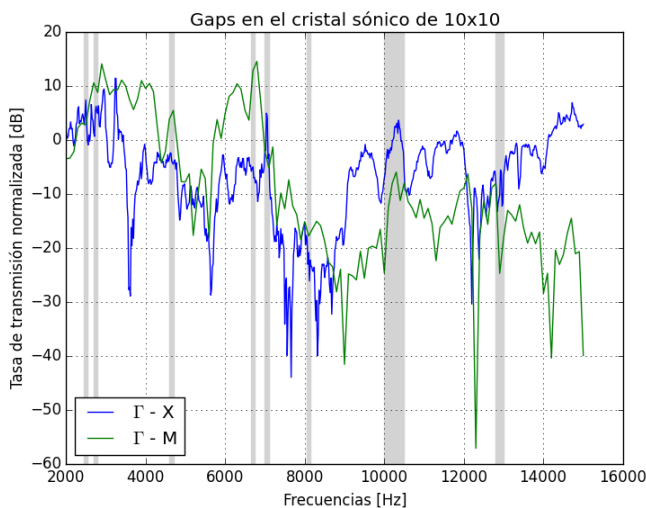
En esta sección se muestran en primer lugar los resultados obtenidos de medir las bandas de transferencia en las direcciones  $\Gamma$ -X y  $\Gamma$ -M para los arreglos de la Figura 8.

Además, se muestra el resultado de haber realizado un diagrama de bandas del cristal sonoro. En las figuras de transferencia se utilizó como criterio para reconocer

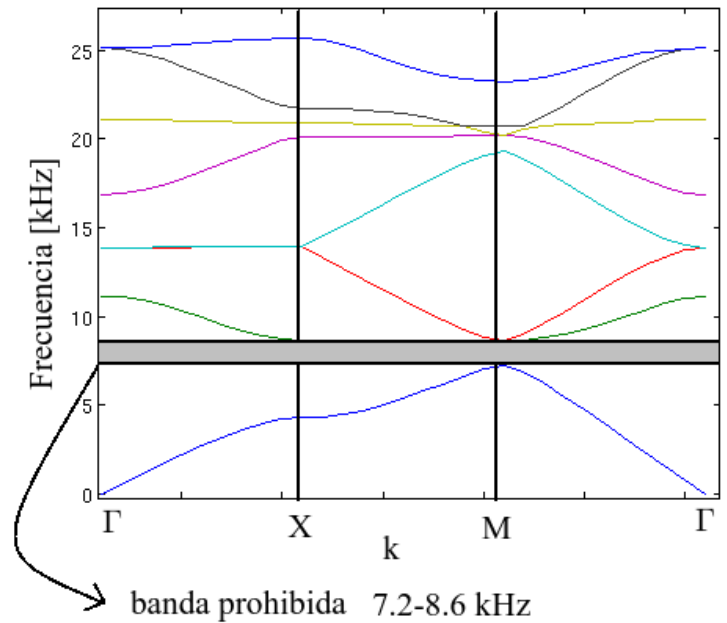
una banda de frecuencias de prohibición total una atenuación menor a -10 dB.

### 3.1. Arreglo de 10x10

La configuración del sistema es la de la Figura 8.a. Los resultados para ambas direcciones se muestran en la Figura 10. En la dirección  $\Gamma$ -X se observan bandas prohibidas en los intervalos: 3.5-3.7 kHz, 4.8-5.8 kHz con interrupciones, 7.1-9.1 kHz y otra pequeña y con interrupciones en 12.1-12.65 kHz. Comparando con la dirección  $\Gamma$ -X, en la dirección  $\Gamma$ -M se observa mayor transferencia para rangos de frecuencia bajas (hasta 11 kHz) y menor transferencia para frecuencias superiores. La banda prohibida central es más ancha, comprendiendo los valores de 7.25-10.15 kHz. Además, se observa que aparece una banda prohibida de 10.6 hasta los 15.0 kHz, es decir, todas las frecuencias altas del rango medido. A continuación se comparan los resultados con el modelo teórico propuesto mediante una simulación numérica del diagrama de bandas (ver Figura 11). Se observa que para todas las direcciones hay una banda prohibida en el intervalo 7.2-8.6 kHz, que coincide con la banda principal obtenida experimentalmente.



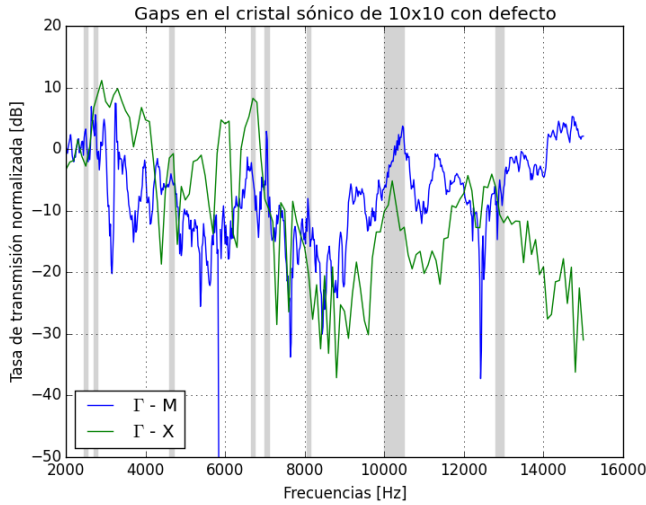
**Figura 10:** Mediciones de transferencia en las direcciones  $\Gamma$ -X y  $\Gamma$ -M del cristal sónico de 10x10. Las bandas grises indican las zonas donde no se puede concluir la presencia de band-gaps.



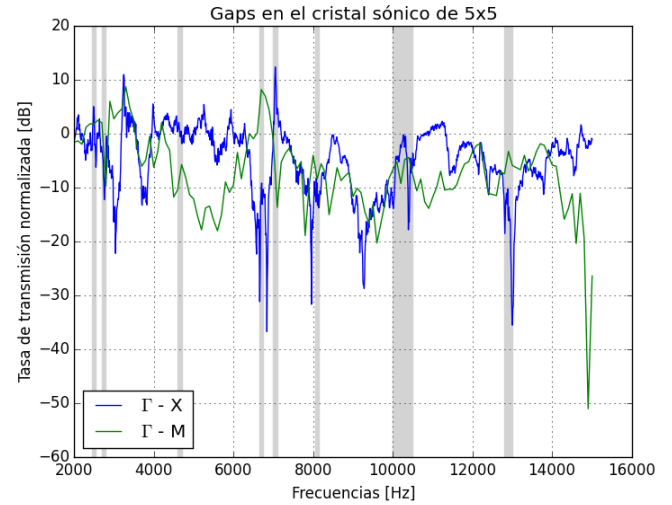
**Figura 11:** Diagrama de bandas obtenido numéricamente de un cristal sónico constituido por una red como la de la Figura 8.a.

### 3.2. Arreglo de 10x10 con defecto de 2x2 en el centro

La configuración del sistema es la de la Figura 8.c. Los resultados para ambas direcciones se muestran en la Figura 12. Con el criterio establecido hasta ahora, las bandas prohibidas son muy estrechas, c para bandas prohibidas de En la dirección  $\Gamma$ -X se observan bandas prohibidas en los intervalos: 3.1-3.2 kHz, 3.6-3.8 kHz, 4.8-6.2 kHz, 7.1-9.1 kHz, 8.15-8.8 kHz y 12.2-12.6 kHz. Al igual que sin el defecto, en la dirección  $\Gamma$ -M se ven atenuadas las frecuencias altas y amplificadas las frecuencias bajas respecto de la dirección  $\Gamma$ -X. No se encuentran diferencias significativas en sentido cualitativo respecto del caso sin el defecto, más allá de pequeños corrimientos en las bandas prohibidas.



**Figura 12:** Mediciones de transferencia en las direcciones  $\Gamma$ -X y  $\Gamma$ -M del cristal sónico de 10x10 con un defecto según la Figura 8.c. Las bandas grises indican las zonas donde no se puede concluir la presencia de band-gaps.



**Figura 13:** Mediciones de transferencia en las direcciones  $\Gamma$ -X y  $\Gamma$ -M del cristal sónico de 5x5 según la Figura 8.b. Las bandas grises indican las zonas donde no se puede concluir la presencia de band-gaps.

### 3.3. Arreglo de 5x5

La configuración del sistema es la de la Figura 8.b. Los resultados para ambas direcciones se muestran en la Figura 13. Utilizando el mismo criterio que en la sección anterior, en la dirección  $\Gamma$ -X se observan bandas prohibidas en los intervalos: 2.9-3.0 kHz, 3.7-3.8 kHz, 6.5-6.85 kHz, 7.9-8.0 kHz, 9.0-10.0 kHz, 8.15-8.8 kHz y 12.8-13.2 kHz. A diferencia de los casos con y sin el defecto, en la dirección  $\Gamma$ -X no se ven señales atenuadas salvo un pequeño rango alrededor de los 7 kHz.

Se puede concluir que, para los tres arreglos propuestos, se pueden distinguir las direcciones  $\Gamma$ -X y  $\Gamma$ -M de la siguiente manera: realizo un barrido en frecuencias en una dirección desconocida (pero sabiendo que se trata de alguna de esas dos) y luego roto el cristal  $45^\circ$ . Basta ver cuál de las dos configuraciones atenúa más las señales por encima de 14 kHz, aquella será la dirección  $\Gamma$ -M. Por otro lado, la diferencia sustancial que existe entre el arreglo de 10x10 y el de 5x5 es la banda prohibida alrededor de los 8 kHz, presente en el primero de ellos. Otra diferencia cualitativa es el hecho de que para frecuencias cercanas a 5 kHz, en el caso de la red de 5x5 la dirección  $\Gamma$ -M presenta mayor atenuación que la dirección  $\Gamma$ -X.

Una de las consecuencias fundamentales del estudio de la transferencia de ondas sonoras en tubos es la posibilidad de crear analogías con cristales fotónicos. Se podría, en principio con los mismos métodos pero mediante ondas electromagnéticas, determinar por ejemplo la alineación de una estructura cristalina microscópica cuyas celdas son conocidas o extraer información de algunos parámetros importantes como defectos dentro de la misma o periodicidad y parámetros de la red.



---

## 4. Conclusiones

Se hizo un estudio de la propagación de ondas de sonido a través de un cristal sónico construido con tubos de aluminio. Se caracterizó el instrumental, y se estudió la forma del frente de ondas del micrófono utilizado. Se vio que existe una región de máxima respuesta del sistema-parlante micrófono y que los objetos circundantes influyen en las mediciones debido a la reflexión de las ondas. Se estudió el ruido ambiente resultando este prácticamente despreciable y se investigó el fenómeno de reflexión en las caras internas del cristal hallando que es relevante. Por último se encon-

traron bandas prohibidas de propagación para las configuraciones propuestas, que permiten predecir la forma y orientación de los arreglos cristalinos. Finalmente se contrastaron estos resultados con un modelo teórico mediante una simulación numérica.

## Referencias

- [1] Toyokatsu Miyashita. Sonic crystals and sonic wave-guides *Meas. Sci. Technol.* 16 (2005) R47–R63.