

# Medición del campo de velocidades tangencial de un vórtice en un medio cilíndrico y estudio de su superficie libre

Barlari, Martín; Pérez Ipiña, Ignacio

Laboratorio 5, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Junio de 2015

## Resumen

Se caracterizó el campo de velocidades de un fluido en el cual se generó un vórtice estacionario, en un recipiente finito, ajustando la velocidad tangencial a la rotación a los modelos de Rankine y Burgers. En términos generales, el método de filtro blanco-negro usado para la medición de dicho campo implicó grandes dispersiones, pero sin embargo se obtuvieron ajustes satisfactorios con  $R^2 > 0,80$  en todos los casos, a la zona hiperbólica del modelo de Rankine. También se pudieron tomar mediciones para el régimen cuadrático de dicho modelo y ajustar con una alta dispersión ( $R^2 \sim 0,3$ ). Asimismo, se ajustó al modelo de Burgers de manera satisfactoria, obteniendo  $R^2 \sim 0,93$ . Se registró el perfil del vórtice (superficie libre) y correspondió a la forma hiperbólica característica de un vórtice libre estacionario en un recipiente cilíndrico, y el resultado coincide con dicho modelo.

## 1. Introducción

La vorticidad  $\vec{\omega}$  es una propiedad cinemática de los fluidos que mide punto a punto la velocidad angular de las partículas del mismo, definida por  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ , donde  $\vec{u}$  es el campo de velocidades del fluido en cuestión [1]. Cualquier flujo que posea vorticidad y sea de tipo circular, es decir, que esté caracterizado por la rotación de las partículas de fluido alrededor de algún eje, se denomina *vórtice*. En particular, uno de los vórtices más simples consiste en el generado por la rotación de todas las partículas alrededor de un cierto eje en un medio infinito (sin condiciones de borde). Son de interés en particular dos modelos para el campo de velocidades en dichas situaciones: el *modelo de Rankine* y el *modelo de Burgers*. El modelo de Rankine [2] supone que la vorticidad se encuentra uniformemente distribuida en un cilindro de radio  $c$  centrado en el eje del vórtice (que es de velocidad constante) y que el fluido es ideal, i.e., es de viscosidad nula. Si se utilizan coordenadas polares  $(r, z, \phi)$  centradas en el eje de rotación

del vórtice (eje  $z$ ), la velocidad tangencial del fluido es sólo función de la distancia radial a dicho eje:

$$v_t(r) = \begin{cases} k \frac{r^2}{c^2} & \text{si } r < c \\ \frac{k}{r} & \text{si } r > c \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $c$  denota el radio de corte entre los dos regímenes cuadrático e hiperbólico y  $k$  es una constante que depende de las condiciones iniciales. Además son nulas las otras componentes de la velocidad:  $v_r = v_z = 0$ .

En el modelo de Burgers [2] se modeliza un fluido real, tomando en cuenta los efectos de la viscosidad  $\nu$ , que esencialmente suaviza la discontinuidad en la derivada radial de  $v_t$  y además aparecen componentes axial y radial de la velocidad:

$$v_r(r) = -\frac{2\nu}{c^2}r \quad (2)$$

$$v_t(r) = \frac{k}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{c^2}} \right) \quad (3)$$

$$v_z(z) = \frac{4\nu}{c^2}z \quad (4)$$

En el siguiente trabajo se estudió el campo de velocidades de un fluido (agua y leche) en presencia de un vórtice formado en el centro de un recipiente cilíndrico. Se estudio la componente tangencial de dicho campo de velocidades, y se ajustaron los resultados al modelo de Rankine y al de Burgers (ecuaciones 1 y 3). Se estudió la dependencia con la altura de la superficie libre de fluido. También se subió considerablemente la viscosidad del fluido al agregar goma xántica y se realizaron los mismos estudios.

Por último, se estudió la forma del vórtice. El tipo de vórtice generado por la rotación de un imán introducido en el seno de un fluido y sobre el fondo de un recipiente cilíndrico posicionado sobre su eje de simetría corresponde a uno del tipo *libre estacionario* [3]. Esas son las condiciones experimentales del estudio llevado a cabo. El modelo del perfil en cuestión es [3]:

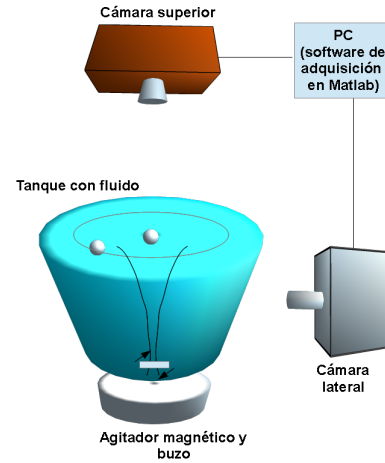
$$z(r) = z_{\infty} - \frac{\omega_0^2 r_0^4}{2gr^2} \quad (5)$$

Donde  $r_0$  y  $\omega_0$  son el radio y la velocidad angular del buzo que genera el vórtice,  $z_{\infty}$  es la altura del fluido lejos del eje de rotación ( $r \gg r_0$ ) y  $g$  es la aceleración de la gravedad. La ecuación 5 indica que en el vórtice libre estacionario, la altura de la superficie libre del líquido decae con una gran pendiente inversamente proporcional al cuadrado de la distancia radial al eje de rotación, hasta que el líquido está esencialmente en reposo para radios grandes. Dicha ecuación supone al fluido incompresible y vale tanto para fluidos viscosos como no viscosos (i.e., ideales o no ideales).

## 2. Desarrollo experimental

Se dispone de un agitador magnético y una cuba de vidrio con forma cilíndrica *Pirex* de 19cm de diámetro. Se propone estudiar la componente tangencial del campo de velocidades al llenar la cuba hasta un cierto nivel con fluido (en un principio, agua) y al generar un vórtice en el centro de la misma. Para hacerlo, se dispuso un imán de forma cilíndrica (de 5mm de ancho y 3,5cm de largo) en el fondo de la cuba (i.e., en el seno del fluido) que rota de manera uniforme y regulable

con el campo magnético aplicado por el agitador. De ésta forma se genera un vórtice libre estacionario [3] en el centro de la cuba (eje de simetría de la misma). Para medir el campo de velocidades se utilizó una cámara web dispuesta sobre el cilindro, y el detalle de los métodos utilizados se explicará a continuación. Se usó una cámara lateral para caracterizar la forma del vórtice generado. En la figura 1 se muestra la disposición experimental:

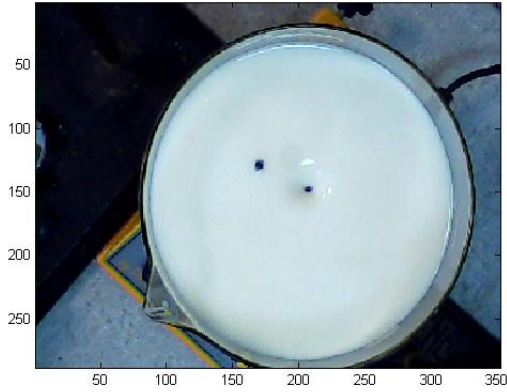


**Figura 1:** Esquema del dispositivo experimental utilizado.

Para caracterizar el campo de velocidades en cuestión se utilizaron dos esferoides pequeños de telgopor que funcionaron como sensores de éste campo. En primer lugar, se generó el vórtice encendiendo el agitador magnético a una cierta frecuencia regulable y se posicionó uno de éstos esferoides en el centro del vórtice. El otro fue lanzado sobre el fluido, y el movimiento de ambos fue registrado por la cámara web: uno permanece en una posición aproximadamente fija (en el vórtice) y el otro gira a merced de dicho vórtice.

*Método de contraste blanco-negro:*<sup>1</sup> Para generar un mayor contraste entre las partículas o esferoides y el fluido de fondo se mezcló el agua con leche y se colorearon dichas partículas de negro. En la figura 2, se muestra una captura típica realizada por la cámara web:

<sup>1</sup>Cabe destacar que se utilizaron otros métodos para realizar el seguimiento de los esferoides, pero su aplicación no resultó fructífera para las mediciones realizadas. Uno de ellos precisaba colorear los esferoides de verde y luego aplicando una separación RGB, y viendo la proporción componentes en verde con respecto al total de cada pixel, poder así distinguir los esferoides respecto del resto. También se utilizó sin éxito el método PTV [4] a partir de un código preescrito de *Matlab*.



**Figura 2:** Captura típica para la cámara web dispuesta normal a la superficie libre del fluido (agua más leche). Se observan las partículas utilizadas para censar el campo de velocidades, coloreadas de negro.

Con la *webcam* se capturaron videos de 30 segundos cada uno y todo el tratamiento posterior fue realizado por un conjunto de programas específicos realizados para *Matlab*. Éstos operaron de la siguiente manera:

1) Se aisló la zona de interés para el cálculo del campo de velocidades, eliminando del análisis los alrededores de la cuba cilíndrica.

2) Se convirtió cada video a escala de grises y se binarizaron los cuadros que lo componen, definiendo previamente un umbral. Utilizando lenguaje de objetos, uno de los programas permite *trackear* la posición en cada cuadro de las 2 partículas señaladas, ahora fácilmente distinguibles del fondo. Si el programa las llegara a perder de vista, ya sea porque se encuentran muy cerca (y son por ende indistinguibles) o porque alguna de ellas se pierde en un reflejo, el mismo repregunta la posición de las partículas <sup>2</sup>. Incluso, se pueden ignorar aquellos cuadros que no son de utilidad, por ejemplo, si una partícula se pegara al borde de la cuba.

3) Se calculó mediante el programa la velocidad tangencial en función del radio (i.e., la distancia entre las partículas), calibrando previamente la cámara web. <sup>3</sup> Se juntaron las mediciones correspondientes a las mismas condiciones físicas: altura de la columna de fluido y velocidad angular del vórtice (i.e., del agitador).

4) Se realizaron los ajustes correspondientes a los modelos de Rankine y de Burgers.

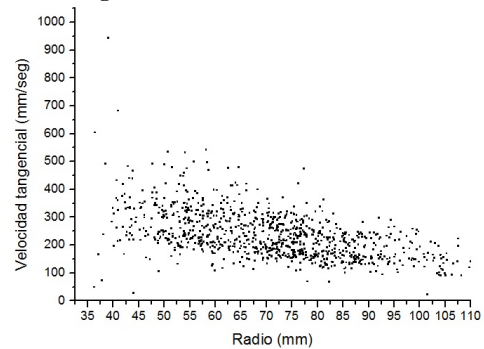
Se realizaron mediciones para alturas de la co-

lumna de fluido desde  $2,5\text{cm}$  a  $8\text{cm}$ , y para diferentes velocidades del vórtice. Además, se propuso ver los efectos de los aumentos de viscosidad en el flujo, agregando goma xántica en concentraciones arbitrarias y realizando los métodos explicados anteriormente.

Por otro lado, posteriormente se posicionó otra *webcam* de forma lateral y se tomaron capturas, siendo el fluido agua pura, para así poder registrar la forma del vórtice generado y luego poder ajustar la misma al modelo hiperbólico precisado por la ecuación 5.

### 3. Análisis y resultados

Para la mezcla de agua y leche (no espesada) se obtuvieron las mediciones de velocidad tangencial en función del radio. Se observó en todos los casos una gran dispersión en las mediciones, como muestra la figura 3:



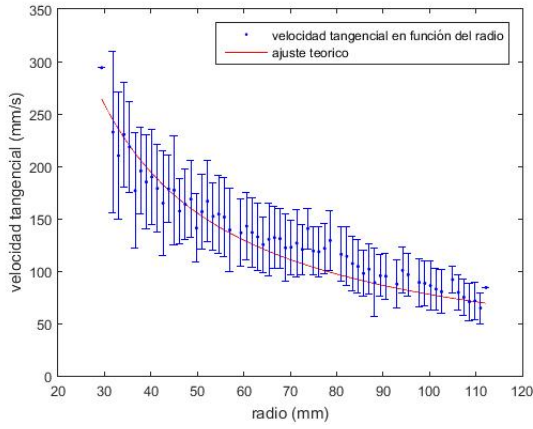
**Figura 3:** Gráfico típico de velocidad tangencial en función del radio, correspondiente a una altura de columna de fluido de  $8\text{cm}$ .

Para tratarla, se promedió en pasos diferenciales los valores de  $v_t$  que caen entre  $r$  y  $r + dr$ , obteniendo en cada caso la barra de error correspondiente. Luego se ajustó al modelo de Rankine. En dicho caso, sólo pudo registrarse el comportamiento hiperbólico (ver ecuación del modelo de Rankine, con  $r > c$ :  $v_t(r) = k/r$ ). Para pequeños radios la velocidad de la partícula era tal que la resolución temporal de la *webcam* (15-30 FPS) no resultó suficiente, generando efecto *blur* y dificultando la localización e identificación de los esferoides cuando éstos se encontraban muy cerca entre sí. Sin embargo, se pudieron obtener algunos datos de velocidad tangencial para radios pequeños (ver cuadro 1). En la figura 4 se muestra

<sup>2</sup>Los reflejos, mayormente blancos, ahora se pierden en gran medida en el fluido, puesto que éste es del mismo color.

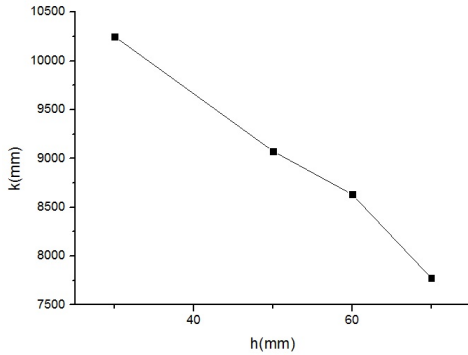
<sup>3</sup>Ésto se hizo tomando con la *webcam* una foto a una altura determinada de un objeto de dimensiones conocidas, y obteniendo luego la relación pixeles-distancias para cada eje.

un gráfico típico de dicha evolución, con el ajuste hiperbólico al modelo (i.e., la ecuación 1 para  $r > c$ ):



**Figura 4:** Mediciones de velocidad tangencial en función del radio con el promediado local y el ajuste hiperbólico (ecuación 1,  $r > c$ ) correspondiente el cual presentó  $R^2 = 0,95$ . La altura de columna de fluido en éste caso fue de  $7cm$ .

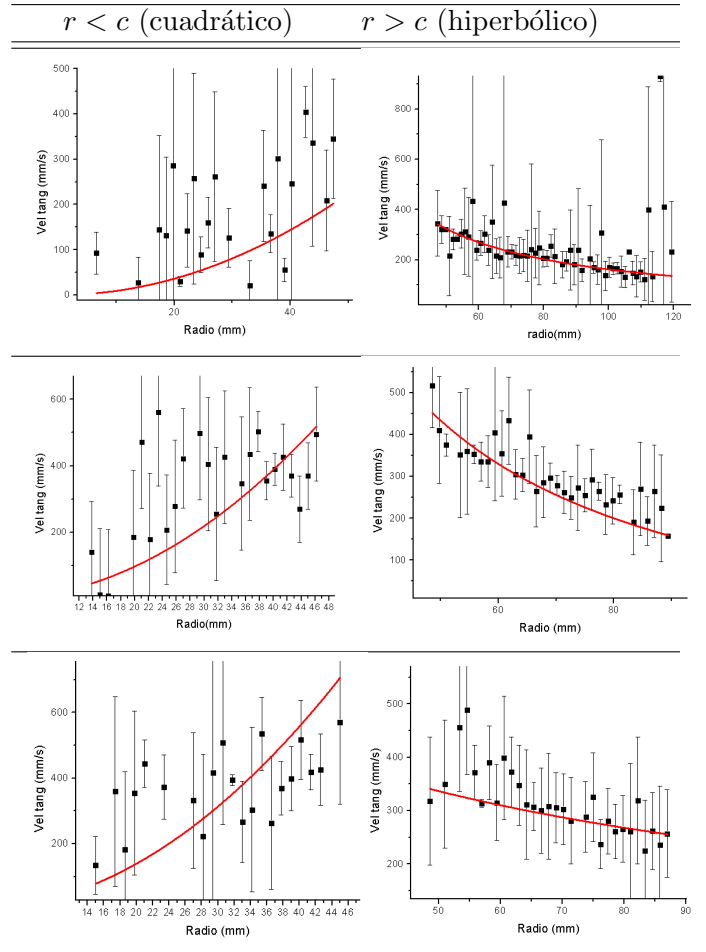
De los ajustes en cuestión, se obtuvieron los coeficientes  $k$  del modelo de Rankine de la ecuación 1 para  $r > c$  en función de la altura de la columna de fluido  $h$ , como muestra la figura 5:



**Figura 5:** Coeficiente  $k$  del modelo de Rankine para  $r > c$ , con  $v_t(r) = k/r$  en función de la altura de la columna de fluido, cuando el mismo no se encontraba espesado.

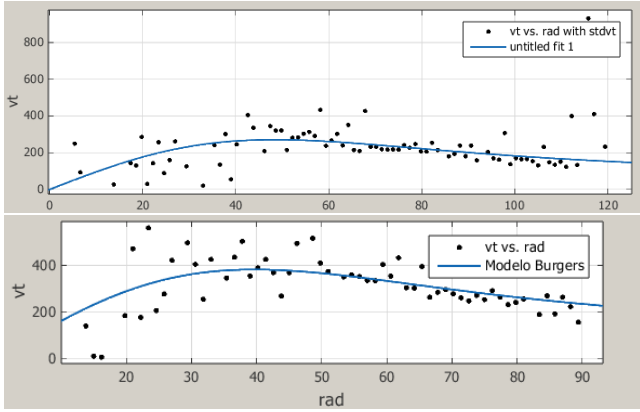
La relación es presumiblemente lineal pero la falta de mediciones para alturas diferentes no permite sacar conclusiones al respecto.

Se muestran a continuación distintos análisis para los modelos Rankine y Burgers de las velocidades tangenciales respecto del radio. En el cuadro 1 figuran 3 ajustes al modelo de Rankine que incluyen el régimen cuadrático para radios pequeños ( $r < c$ ):



**Cuadro 1:** Mediciones de velocidad tangencial en función del radio, con el promediado local y los ajustes para  $r < c$  (columna izquierda) y  $r > c$  (columna derecha) a la ecuación 1 (modelo de Rankine). La primera fila corresponde a fluido (agua más leche) no espesado, con altura de la columna de  $4cm$  ( $R^2 = 0,31$ ). La segunda y tercera fila corresponden al fluido espesado con goma xántica, con una altura de la columna de fluido de  $6,3cm$  ( $R^2 \sim 0,6$ ).

En la figura 6 se muestran 2 ajustes realizados al modelo de Burgers:



**Figura 6:** Mediciones de velocidad tangencial en función del radio, con los respectivos ajustes al modelo de Burgers (ecuación 3). El gráfico superior corresponde a fluido no espesado con altura de la columna de  $4\text{cm}$  ( $R^2 = 0,93$ ) y el inferior al fluido espesado una altura de  $6,3\text{cm}$  ( $R^2 = 0,94$ ).

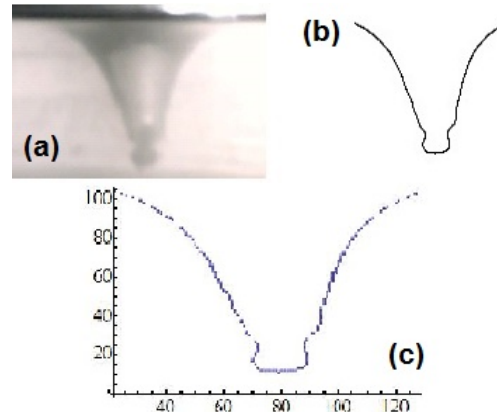
En forma aproximada, de los ajustes de la figura 6 se puede obtener el radio de corte equivalente para el modelo de Burgers, i.e., el correspondiente al máximo local en la curva, obteniendo  $c_{eq} = (43 \pm 3)\text{mm}$  y  $c_{eq} = (35 \pm 3)$  para el gráfico superior e inferior respectivamente, sugiriendo que el espesado del fluido está asociado a un encogimiento del vórtice si se relaciona  $c_{eq}$  con el ancho característico del mismo. Asimismo, se podría esperar a priori que las mediciones con fluido espesado posean una menor dispersión, resultando en columnas de error más cortas, dado que un aumento en la viscosidad podría generar un vórtice más estable y menos turbulento. Ésto se evidencia notando que las columnas de error en los gráficos de la primera fila del cuadro 1 son en general mayores que los de las otras 2. En particular, se obtuvo el  $k$  del modelo de Rankine con un orden mayor de precisión en las mediciones con fluido espesado, reforzando dicha intuición.

En cuanto al estudio del perfil del vórtice, se tomaron imágenes del mismo con la cámara lateral. En la figura 7 se muestra un perfil típico:



**Figura 7:** Captura típica para la cámara web dispuesta en forma lateral. Se observa la forma de la superficie libre del fluido en la zona del vórtice generado y el buzo en la parte inferior. Notar la deformación en el perfil que induce el esferoide colocado en su centro.

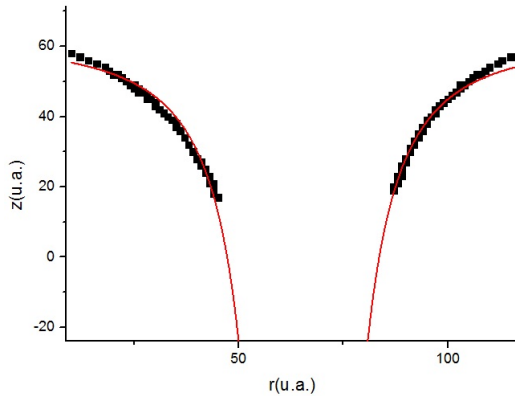
Para la obtención del perfil para cada captura realizada con la cámara se utilizó *Mathematica* en primer lugar para identificar los bordes más relevantes de cada imagen. Luego, se borraron aquellos bordes indeseados dejando sólo el borde correspondiente al perfil. Posteriormente, con *Mathematica* se obtuvo el arreglo de pares de valores numéricos  $(z, r)$  correspondientes a cada punto del borde, para su posterior ajuste y análisis. En la figura 8 se muestra un ejemplo de dicho procedimiento:



**Figura 8:** Procedimiento realizado para obtener la forma del perfil para cada captura de la cámara web lateral. (a): imagen capturada ; (b): imagen con los bordes de la superficie libre del vórtice filtrados; (c): perfil transformado en datos para su postrerior análisis.

En todos los fotogramas capturados resultó evidente el hecho de que el esferoide ubicado para localizar el vórtice deformaba la superficie libre del mismo (ver figura 7). Más aún, los ajustes a la ecuación 5 realizados para los perfiles completos resultaron insatisfactorios, no ajustando dichos perfiles al modelo hiperbólico presentado. Por tal

razón, se borró la zona de los perfiles circundante al esferoide, i.e., se eliminó la parte inferior de cada perfil. Posteriormente se ajustaron estos perfiles modificados a la ecuación 5 y se obtuvo que en medidas generales el modelo de perfil hiperbólico se adapta bien a los vórtices estudiados. A modo de ejemplo, se muestra un ajuste en la figura 9:



**Figura 9:** Perfil con la parte inferior cercana al esferoide recortada y su respectivo ajuste a la hipérbola de la ecuación 5. El ajuste presentó  $R^2 = 0,98$ .

Ésto evidencia que el esferoide colocado en el vórtice induce un cambio en la forma de la superficie libre del mismo, desviando el perfil del modelo hiperbólico.

## 4. Conclusiones

Se pudo ajustar de manera satisfactoria, con un coeficiente de correlación lineal mayor a 0,8 en todos los casos, a la zona hiperbólica ( $r > c$ ) del perfil de velocidades tangenciales predicho por el modelo de Rankine. Limitaciones tanto de la cámara (bajos FPS) como del método blanco-negro para contrastar los esferoides con respecto al fondo no permitieron obtener muchas mediciones para radios pequeños, correspondientes a una dependencia cuadrática ( $r < c$ ), pero se pudo ajustar a los modelos propuestos. Consecuentemente, el uso de una cámara de mayor *framerate* o un refinamiento de los programas utilizados podría me-

jorar los resultados obtenidos, dando lugar a mediciones más completas y con menor dispersión. En cuanto al ajuste al régimen cuadrático de dicho modelo, si bien las mediciones presentaron una alta dispersión (y bajos valores de  $R^2$ ) se obtuvo una mayor precisión en los coeficientes de los ajustes para el caso de fluido espesado, lo cual podría evidenciar una mayor estabilidad del vórtice generado por un fluido de mayor viscosidad (hace al flujo menos turbulento y más estable). Se pudo ajustar al modelo de Burgers en forma satisfactoria con  $R^2 \sim 0,93$ . El ancho característico de vórtice  $c_{eq}$  parece ser inversamente proporcional a la viscosidad del fluido, y además el efecto de ésta última no garantiza una menor dispersión en los datos. Las dependencias con la altura de la columna de fluido podrían ser estudiadas más en detalle si se realizaran más mediciones a alturas diferentes, y las mediciones disponibles no permiten sacar conclusiones al respecto.

Por último, el perfil del vórtice resultó ser el correspondiente al de un vórtice libre estacionario, como predice la teoría. Sin embargo, hubo que recortar las zonas aledañas al esferoide presumiblemente debido a que el mismo induce un cambio en la forma del seno de dicho vórtice, desviándolo del perfil ideal de carácter hiperbólico.

## Referencias

- [1] James A. Fay; *Introduction to fluid mechanics*; MIT: segunda edición, 1998, pág 495.
- [2] *Laboratorio 5. Departamento de Física, UBA: Fluidos.*
- [3] F.J. Manjón, J.M. Villalba et al; *Vórtices no estacionarios en un vaso de agua*; Revista Brasileira de Ensino de Física - vol.35, pág 5, 2013.
- [4] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/41235-ptvlab--particle-tracking-velocimetry-lab->