

Cristales sónicos

Daniela Zahn
daniela@tarzahn.com

Gabriel Scoccola
gabos94@hotmail.com

Manuel Szewc
manuelasz24@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

3 de junio de 2015

Resumen

En este trabajo se estudió la propagación de ondas de sonido a través de un cristal sónico. Se caracterizó la respuesta en frecuencia propia del par microfono-parlante para comparar los resultados siguientes. Se encontró el band gap del cristal para la dirección de propagación perpendicular a las paredes, pero se verificó que, debido a rebotes en el cristal y otros desperfectos, interferían otras componentes de propagación. Se introdujeron defectos en el cristal y se midió la respuesta en frecuencia, observándose nuevos picos, y cierta repuesta donde antes estaba el band-gap. Al colocar el micrófono dentro de la cavidad también se encontraron picos de resonancia en el band gap. Otra medición fue estudiar los efectos de las guías de ondas. Se encontró que una parte considerable de la onda se propagaba por ese camino, aumentando la amplitud medida y alterando completamente la respuesta en frecuencia del sistema.

1. Introducción

Un cristal sónico es un objeto que tiene una densidad y/o elasticidad periódica. Por ejemplo, un cristal sónico típico consiste en barras montadas periódicamente en una placa (ver figura 1). Este set up se utilizó en los experimentos.

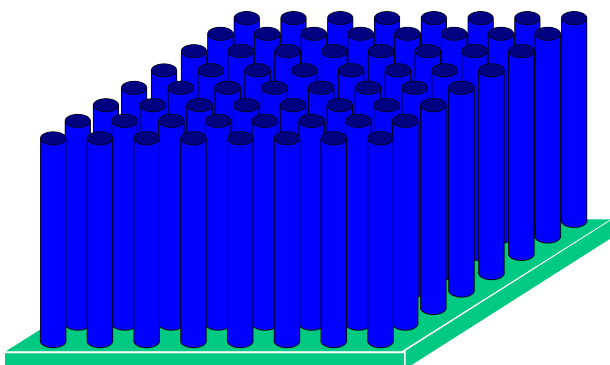


Figura 1: Un cristal sónico 2D. Las ondas incidentes son reflejadas a las interfases entre el aire y las barras. Reflexiones múltiples resultan en una estructura de banda del cristal

Debido a los cambios de impedancia en las interfases entre los materiales, las ondas son reflejadas allí. El resultado es que el cristal muestra

una estructura de bandas con bandas prohibidas. En el caso de cristales sónicos, la periodicidad de la estructura está en el orden de las longitudes de onda de sonidos. Sin embargo, existen estructuras similares con periodicidades en el orden de la luz visible, llamados cristales fotónicos. Parte del interés en los cristales sónicos surge de su similitud con los cristales fotónicos.

Si la reflectividad en las interfases es alta¹, los objetos sólidos en el cristal se pueden tratar como fluidos de gran densidad [1]. La ecuación de propagación de ondas sónicas en un fluido se ve en la ecuación 1:

$$\frac{1}{B(\vec{r})} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} - \vec{\nabla} p \right) = 0 \quad (1)$$

donde B es la constante elástica, ρ es la densidad, c es la velocidad del sonido en el medio y p es la presión. Este tratamiento, mucho más simple que estudiar la propagación de ondas elásticas en un sólido, no permite la generación de ondas transversales, por lo que las vibraciones transversales del sistema físico deben ser minimizadas. Sólo habrá, entonces oscilaciones lon-

¹La reflectividad es alta si la impedancia del material de las barras es mucho más grande que la impedancia del entorno, lo que se cumple para barras de acero en aire.

gitudinales. Está ecuación tiene soluciones estacionarias de la forma $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) \exp^{i\omega t}$. Estas soluciones son los modos normales del sistema y su relación de dispersión nos permite obtener el diagrama de bandas del cristal sónico. El diagrama de bandas indica que frecuencias están permitidas en las distintas direcciones del cristal. Como $B(\vec{r})$ y $\rho(\vec{r})$ son funciones periódicas con la misma periodicidad que el cristal, se pueden escribir como una suma de Fourier sobre los vectores recíprocos \vec{G} de este. Esto se ve en las ecuaciones 2 y 3

$$\rho(\vec{r})^{-1} = \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{G}}^{-1} \exp^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (2)$$

$$B(\vec{r})^{-1} = \sum_{\vec{G}} b_{\vec{G}}^{-1} \exp^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (3)$$

Los vectores recíprocos son los componentes de la base de Fourier obtenida a partir de la red directa compuesta por los vectores \vec{R} y cumplen la relación 4:

$$\vec{R} * \vec{G} = 2n\pi \quad (4)$$

Los vectores de la red directa expresan la estructura periódica de esta. Es decir, $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R} = t\vec{a}u$ donde $t\vec{a}u$ es un vector del espacio dado por el cristal sónico (si uno lo piensa como una red cristalina). Utilizando esto puede llegarse a la ecuación 5 para $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \exp^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_k(\vec{r}) = \exp^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{k}, \vec{G}} \exp^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (5)$$

Donde \vec{k} es el vector de onda de Bloch. Esta solución es una de onda de Bloch (obtenida al multiplicar una onda plana por una función periódica u_k) y cumple el teorema de Bloch, por lo que la teoría de bandas, que describe la estructura electrónica a través de las bandas de energía, se aplica. Reemplazando 2, 3 y 5 en 1, se obtiene la ecuación 6:

$$\sum_{\vec{G}'} (w^2 b_{\vec{G}-\vec{G}'}^{-1} - \rho_{\vec{G}-\vec{G}'}^{-1} (\vec{k} + \vec{G}')(\vec{k} - \vec{G}')) \rho_{\vec{k}, \vec{G}'} = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación es ni más ni menos que la ecuación de autovalores del sistema y se puede resolver

numéricamente, sabiendo que para una red de cilindros se cumple las ecuaciones 7 y 8

$$\rho_{\vec{G}}^{-1} = \frac{\rho_m a t}{\rho_m e d} f + (1 - f) \text{si } |\vec{G}| = 0 \quad (7)$$

$$\rho_{\vec{G}}^{-1} = \left(\frac{\rho_m a t}{\rho_m e d} - 1 \right) 2f \frac{J_1(|\vec{G}| r_0)}{|\vec{G}| r_0} \text{si } |\vec{G}| \neq 0 \quad (8)$$

Donde r_0 es el radio de cada cilindro (asumiendo que todos tienen el mismo radio), $\rho_m a t$ y $\rho_m e d$ son las densidades del material de los cilindros y del medio donde están inmersos respectivamente, J_1 es la función de Bessel de orden 1 y f es el factor de llenado (que para una red cuadrada de separación a entre cilindros es $\frac{\pi r_0^2}{a^2}$). Las expresiones obtenidas para b^{-1} son idénticas a las ecuaciones 7 y 8. Para una red cuadrada de cilindros de acero en aire con 0,85cm de radio y 2,5cm de separación entre tubos, utilizando 529 ondas planas se obtuvo la figura 2 [1].

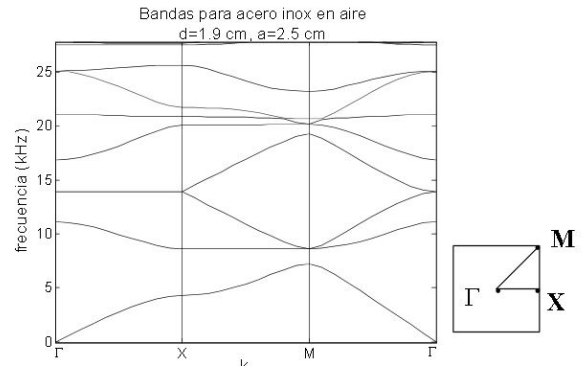


Figura 2: Simulación del diagrama de bandas para una red cuadrada de radio 0,85cm y separación 2,5cm utilizando 529 ondas planas.

Donde el rango de frecuencias prohibidas, cuando la transmisión tiende a cero, depende de la dirección en la que se mide la onda. En este sistema pueden introducirse defectos que cambian el diagrama de bandas. Esto abre la puerta para que, a partir de la transmisión de las ondas de sonido a través del cristal, se pueden estudiar dichos defectos.

2. Armado Experimental

El cristal sónico consistió en una disposición de 100 tubos de acero, fijados verticalmente a una base cuadrada de 10 filas y 10 columnas. Cada tubo tenía un diámetro de 1.7 cm y la distancia entre el centro de dos tubos adyacentes era 2.5 cm. Para generar las ondas acústicas, se usó un parlante conectado a un generador de funciones. Para medir las ondas, se utilizó micrófono conectado directamente al Lock-In. Se utilizó el modo *single-ended* (A) para la entrada de la señal del micrófono al Lock-In y se usó la configuración *ground*. Como referencia se utilizó la salida TTL del generador. Para disminuir las influencias de las reflexiones del sonido en las paredes y otros objetos del entorno, todos los experimentos lo más apartados posibles de las paredes y se colocó bloques de goma espuma alrededor del set up. Además, se fijó lo más posible las barras de hierro para evitar oscilaciones transversales, que no son contempladas por la teoría.

2.1. Respuesta en frecuencia del sistema micrófono-parlante

Para poder analizar los datos obtenidos, se caracterizó el sistema micrófono-parlante en ausencia del cristal. Se comenzó por la respuesta en frecuencia, por lo que se colocaron micrófono y parlante enfrentados sobre la mesa y a 30 cm de distancia (ver figura 3), distancia similar a la que se utilizó en experimentos con el cristal.

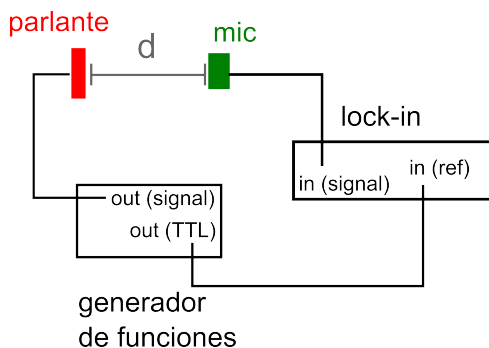


Figura 3: Esquema del armado experimental para la caracterización de la respuesta del sistema micrófono-parlante y el entorno.

Se alimentó el micrófono con una señal sinusoidal y de amplitud constante, y se realizó un barrido de frecuencia entre 2 kHz y 12 kHz. Entre cada salto de 50 Hz, se esperó un periodo de 10 ms y se registró el voltaje de salida del micrófono usando un tiempo de integración de 10 ms en el Lock-In.

La respuesta en frecuencia obtenida se ve en la figura 4.

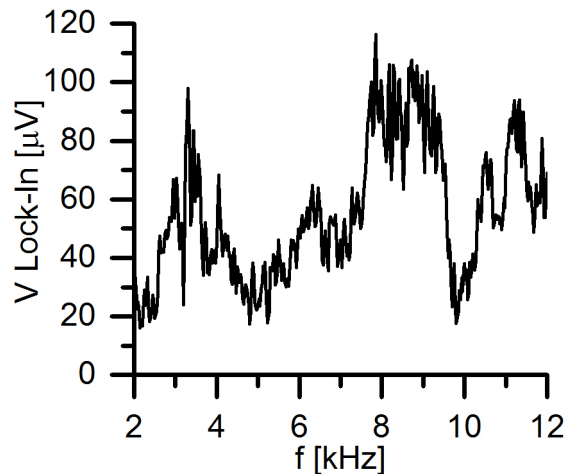


Figura 4: Respuesta en frecuencia para sistema micrófono-parlante a 30 cm de distancia.

Se puede ver que la respuesta del sistema no es homogénea. Existen gamas de frecuencia con sensibilidad alta (por ejemplo de 7.8 a 9.5 kHz) mientras que en otras gamas la sensibilidad es mucho más baja (por ejemplo alrededor de 5 kHz). Al hacer un barrido de frecuencias a través del cristal, van a participar simultáneamente la dependencia del sistema micrófono-parlante y los índices de transmisión del cristal, por lo que el gráfico obtenido va a ser la multiplicación entre ambos. Para obtener solamente los coeficientes de transmisión del cristal para cada frecuencia, se puede normalizar los resultados dividiendo cada voltaje por el valor obtenido en ausencia de cristal. Es importante notar que en las zonas de baja respuesta del sistema micrófono-parlante el error relativo es significativo, por lo que podría llevar a errores grandes al normalizar. Las regiones donde el sistema mi-

crofono parlante no tiene respuesta (y su sensibilidad es baja) no pueden tomarse en cuenta a la hora de medir ya que no puede establecerse con seguridad si existe un nodo o solamente la respuesta es baja.

2.2. Dependencia angular de la emisión del parlante

A continuación se estudió la distribución angular del frente de onda emitido por el parlante. Para esto se lo mantuvo fijo sobre la mesa, y se movió el micrófono a lo largo de un semicírculo, manteniéndolo siempre a una distancia constante y enfrenteado al parlante (figura 5). Se

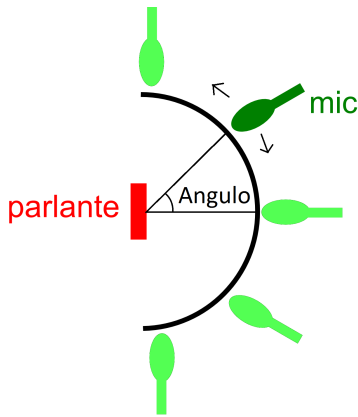


Figura 5: Esquema del armado experimental para medir la dependencia angular de emisión del parlante

midió el voltaje de salida del micrófono en función del ángulo, para tres valores de frecuencia: $f = 2\text{ kHz}$, $f = 6\text{ kHz}$ y $f = 12\text{ kHz}$. El resultado es mostrado en la figura 6. La primera observación es que la dependencia angular difiere para cada frecuencia, y no solamente por una constante de proporcionalidad. Esto implica que la forma de la respuesta en frecuencia del sistema micrófono-parlante que se obtuvo previamente solo sirve como comparación para experimentos futuros donde el micrófono y el parlante estén enfrentados. Luego se nota que aunque la dependencia angular sea aproximadamente simétrica, los máximos están un poco corridos, particularmente para 2 kHz y 12 kHz. Esto puede deberse a incertezas en la posición y orientación del micrófono, siendo esta última particularmente di-

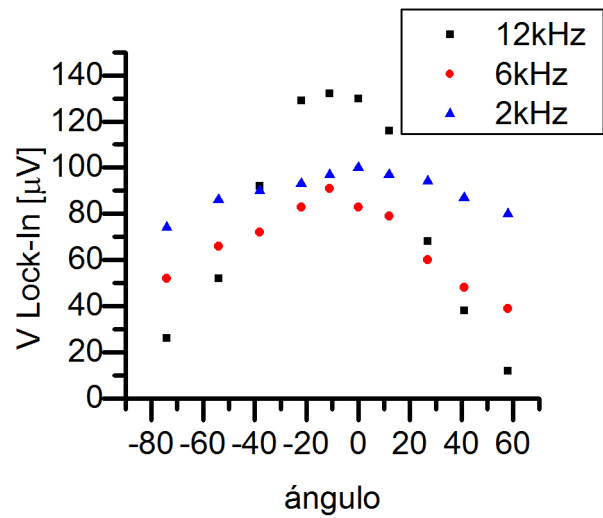


Figura 6: Dependencia angular de la emisión del parlante

ficil de estimar. Otras explicaciones para el corrimiento de los máximos, y más en particular para la leve asimetría, son los desperfectos del parlante o ñas reflexiones en las paredes (pues una pared estaba más cerca que la otra).

Para comprobar los efectos de este último fenómeno, se hizo la misma medición con el micrófono y el parlante más cerca de la pared, alrededor de 40 cm, y se obtuvo una dependencia angular más asimétrica comparado a la medida para aproximadamente 2 m (ver figura 7).

Puede verse como la cercanía a la pared definitivamente afecta las mediciones, aunque esto no descarta defectos del parlante que causen asimetrías en el frente de onda.

2.3. Medición del bandgap del cristal

Para medir la transmisión en la dirección X, se colocaron micrófono y parlante enfrentados, en caras opuestas del cristal (ver figura 8). Además, se cubrió el resto del cristal con goma-espuma para disminuir reflexiones en los márgenes, que también presentan cambios de impedancia. Se realizó un barrido de frecuencias, y la respuesta del sistema se ve en la figura 9.

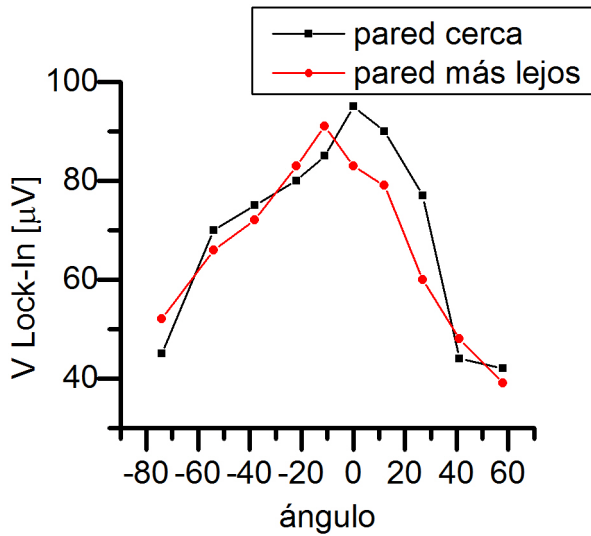


Figura 7: Dependencia angular a 40 cm y a 2 m de la pared, para una frecuencia de $f = 6$ kHz.

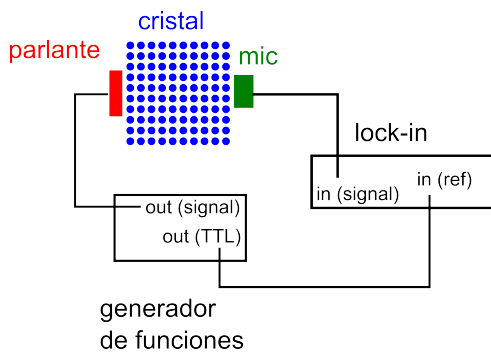


Figura 8: Esquema del armado experimental para medir la banda prohibida del cristal en la dirección X.

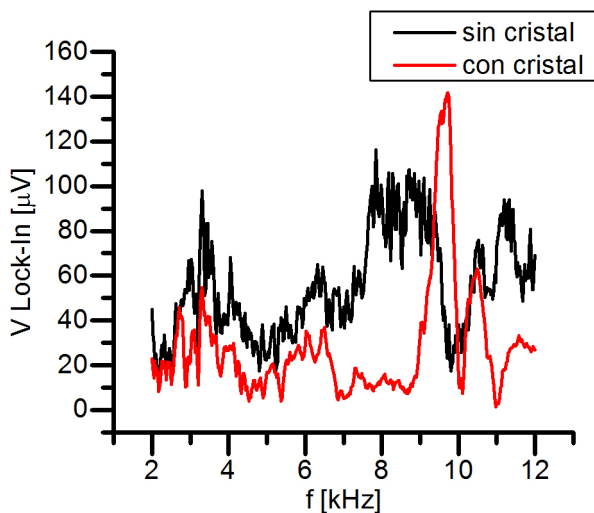


Figura 9: Respuesta en frecuencia del sistema con cristal en dirección X, comparado con la respuesta del sistema sin cristal.

La respuesta en frecuencia normalizada gracias a la respuesta del sistema micrófono-parlante se ve en la figura 10.

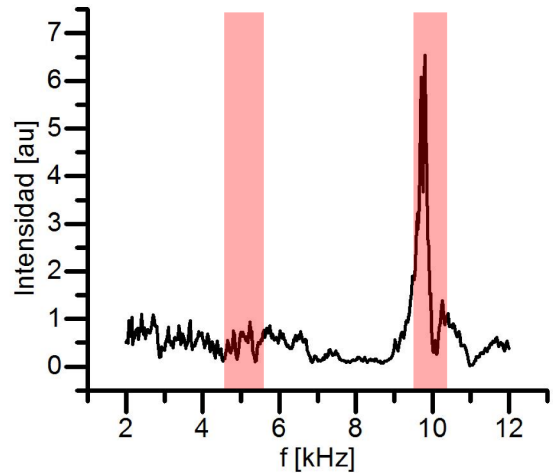


Figura 10: Respuesta en frecuencia normalizada para la onda a través del cristal. Los rangos de frecuencia marcados corresponden a zonas de baja respuesta del sistema micrófono-parlante y consecuentemente la precisión del espectro normalizado es baja.

Hasta aproximadamente 6.8 kHz, la respuesta del cristal es casi idéntica a la correspondiente a la medición sin cristal (excepto que la intensidad es un poco más baja). De 6.8 kHz a 9.4 kHz la transmisión del cristal es significativamente más baja que lo medido sin cristal, por lo que se establece este rango de frecuencias como el band gap. A frecuencias más altas se puede ver un pico en el que la amplitud es mayor que la del sistema sin cristal. No hay en nuestro modelo teórico una explicación para esto, pero se podría atribuir al cristal funcionando como caja de resonancia, en parte porque el cristal es finito y hay efectos de bode a tener en cuenta. Si se compara el band gap experimental con el resultado de la simulación numérica (figura 2), se nota que en la dirección X se esperaría un band gap más amplio (aproximadamente de 4 a 8.5 kHz). El band gap medido se parece más al band gap en la dirección M. Esto podría explicarse con que los \vec{k} que conectaban micrófono y

parlante no estaban unicamente en la direccion X, sino que habia otros “rayos” que se propagaban en otras direcciones, y llegaban al microfono posiblemente rebotando en los bordes del cristal.

Para comprobar la existencia de estos \vec{k} reflejados en la dirección M del cristal, se giraron el micrófono y el parlante unos 45° en sus respectivos lugares (ver figura 11).

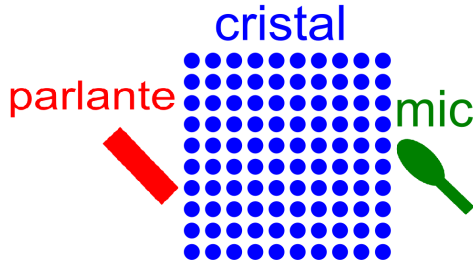


Figura 11: Armado experimental para medir \vec{k} reflejados .

El resultado del barrido de frecuencia se ve en figura 12.

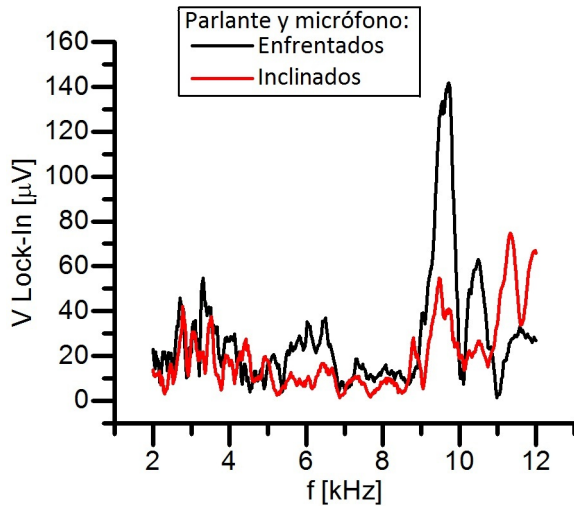


Figura 12: Respuesta en frecuencia del sistema con el micrófono y el parlante rotados, comparado con el caso micrófono y el parlante enfrentados.

Aunque se ve cierta disminución de la intensidad, es menor que la atenuación del frente de ondas a 45° en ausencia de cristal (6). Esto indica que hay algún efecto de reflexión dentro del

cristal, que desvía los vectores de propagación y permite que lleguen “rayos” que no estaban inicialmente direccionados hacia el micrófono. Se concluye entonces que en los experimentos con el cristal nunca se mide solamente una dirección de \vec{k} , sino una superposición de direcciones.

2.4. Cavidades en el cristal

Se introdujeron defectos en el cristal, removiendo tubos en el centro de la disposición. Con el fin de ver si cambiaba la respuesta en frecuencia, se realizó primero el barrido con el micrófono y el parlante en los extremos del cristal, como en el experimento anterior. Esto se repitió con dos cavidades diferentes, una de 4X4 tubos, y otra de 4X2, que se pueden ver en la figura 13.

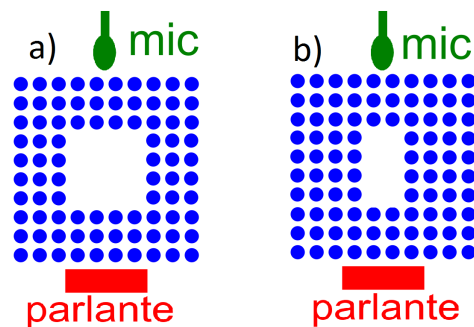


Figura 13: Armado experimental para transmisión a través de dos cavidades diferentes.

Los resultados se ven la figura 14.

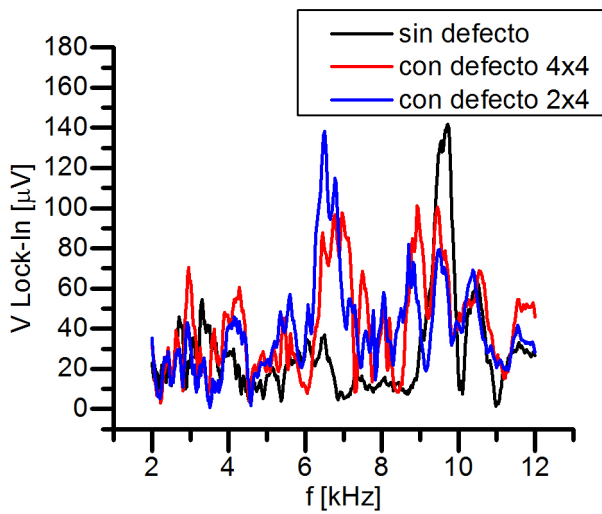


Figura 14: Resultado para la transmisión del cristal con defectos.

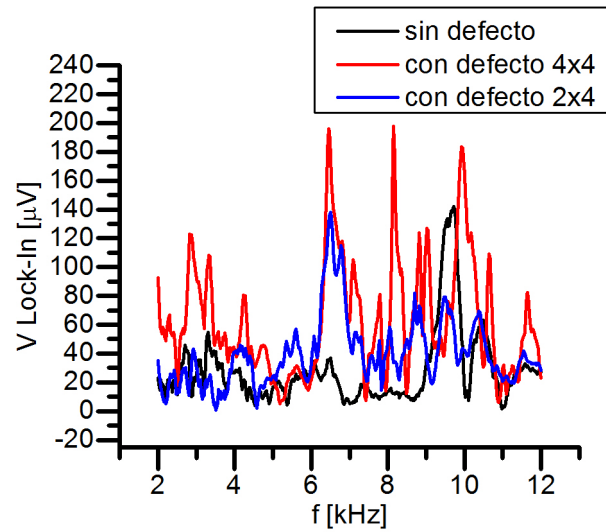


Figura 16: Resultado para los dos defectos en el caso del micrófono dentro del cristal en dirección (100).

Se nota que la introducción de defectos genera, además de un aumento de la amplitud en general, varios picos alrededor del band gap, y cierta respuesta adentro. La respuesta de ambos defectos es bastante similar, lo que es plausible ya que la dimensión del defecto en la dirección X es la misma para ambos (4 tubos). El ancho de cada defecto debería afectar solamente los \vec{k} en otras direcciones, que sabemos que están presentes pero en menor cantidad.

Luego se introdujo el micrófono dentro de la cavidad, apuntando todavía hacia al parlante (como se ve en la figura 15) y se realizó otro barrido para ver si alguna frecuencia resonaba en la cavidad.

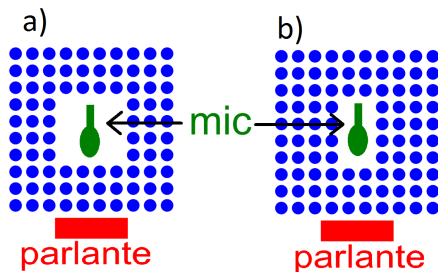


Figura 15: Armado experimental para resonancia en dos cavidades diferentes.

Los resultados se pueden ver en la figura 16.

A diferencia del caso anterior, las mediciones dentro de los defectos son considerablemente diferentes entre sí: La cavidad 4X4 genera consistentemente una mayor amplitud de respuesta que la cavidad 4X2, particularmente dentro del band gap.

Esto se explica por las diferencias entre los defectos, que sí influyen al medir dentro de la cavidad. Para el defecto de 4x4, las paredes están más lejos en ambas direcciones (además de ser simétrico) por lo que los aportes de ondas reflejadas que puedan interferir con las mediciones son menores. La amplitud mayor registrada puede explicarse por esta diferencia.

2.5. Guías de ondas

Se estudiaron los efectos de las guías de ondas en la transmisión. Para construir una guía de ondas se sacaron tubos de forma tal que se abrió un “camino” para las ondas. Se compararon los espectros de transmisión con y sin guía de ondas dejando al micrófono y al parlante fijos. Se examinaron dos guías de ondas diferentes (como se ve en la figura 17). Se midió la transmisión del cristal sin y con guía de ondas, dejando la posición del micrófono y del parlante inalterada. El resultado para las dos guías de ondas se ve en las figuras 18 y 19.

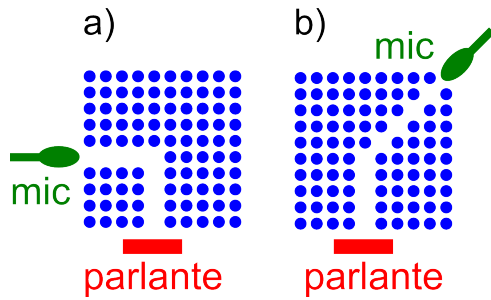


Figura 17: Las dos diferentes guías de ondas que se examinaron.

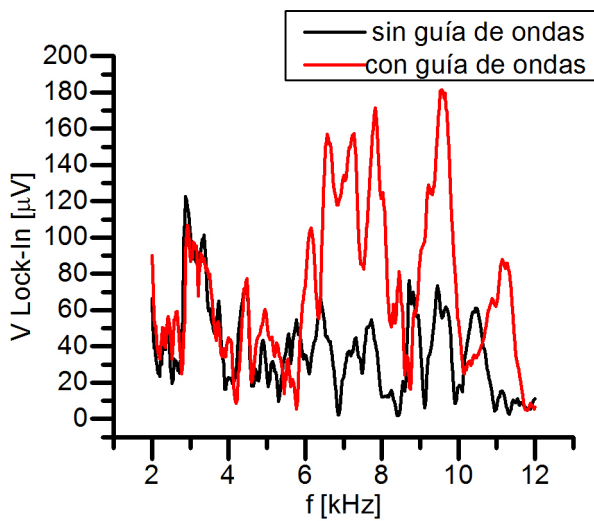


Figura 18: Comparación de la respuesta en frecuencia con y sin guía de ondas para la guía de ondas tipo a.

Se puede ver como ambas guías aumentan significativamente la transmisión, en particular para el band gap. Esto era esperable pues las guías permiten que parte de la onda se transmita puramente por el aire (que tiene menor impedancia y no tiene frecuencias prohibidas) rebotando en los bordes del cristal. Para la guía a), la geometría resulta en un rebote con poca pérdida de energía, casi como un espejo, por lo que la respuesta en frecuencia es casi igual a la del sistema micrófono-parlante en ausencia de cristal. Para la guía b) por otra parte, la respuesta es bastante distinta, obteniendo un pico pronunciado para frecuencias entre 8 y 9 kHz. Aparece un nodo para una frecuencia cercana a los 6 kHz. El porque exacto de este tipo de respuesta no puede

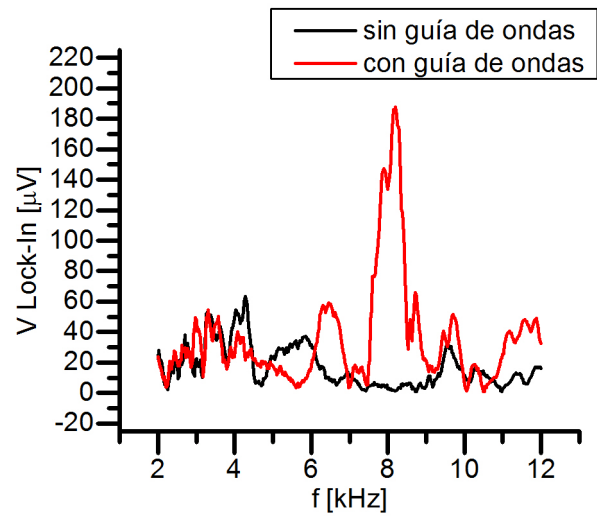


Figura 19: Comparación de la respuesta en frecuencia con y sin guía de ondas para la guía de ondas tipo b.

explicarse aunque la superposición de distintos vectores de onda y los efectos de borde contribuyen a que sea distinto a lo observado anteriormente. Aún así, la transmisión es mayor que sin guía de ondas.

3. Conclusión

En este trabajo se estudió la propagación de ondas de sonido a través de cristales sónicos. Primero se caracterizaron el micrófono y parlante usados para generar y medir las ondas. Luego se midió la respuesta en frecuencia con el cristal en el medio. Se encontró un band gap que, aunque no coincidía con el predicho por el modelo, era coherente si se contemplaba la existencia de rebotes e imperfecciones del sistema, que dificultaban la posibilidad de medir la propagación de ondas en una única dirección. Además, se midió la transmisión de la amplitud al introducir defectos en el cristal. Para la transmisión a través del cristal, no se encontraron diferencias entre ambos defectos pero sí con respecto a la medición sin defecto alguno. Al medir dentro de la cavidad del cristal, por otro lado, se encontraron diferencias entre los dos defectos y estas fueron explicables por la geometría del sistema. Otro aspecto estudiado fueron las guías de onda, que

muestran como un camino” de aire relativamente angosto permite pasar a una gran componente de la onda de s3nido, y alterar completamente la respuesta en frecuencia del cristal. En particular, para el caso de un camino con entra perpendicular y gira a 90° hacia la izquierda, se da una reflexi3n similar a la de un espejo a 45° por lo que la respuesta en frecuencia es casi igual a la del sistema sin cristal.

4. Referencias

- [1] Alejandro Giacomotti. *Pr3ctica de Laboratorio 5. Cristales S3nicos 2D*
http://users.df.uba.ar/bragas/Labo5_1er2011/Practica%20de%20Cristales%20Sonicos.pdf