

Espectros de rayos gamma

Laila Kazimierski Cristian Ferreyra

Laboratorio 5 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

31 de mayo de 2011

Resumen

Se estudió el espectro de radiación de distintos isótopos radiactivos: ^{22}Na , ^{60}Co , ^{133}Ba , ^{137}Cs y ^{207}Bi , usando un detector $\text{NaI}(\text{Ti})$, y se analizó la dependencia de la intensidad con la distancia entre la fuente y el detector. Se pudo verificar la ley de Bourget-Lambert, interponiendo placas de cobre y aluminio entre el detector y la fuente se obtuvo el coeficiente de absorción para estos metales a distintas energías, y se las cotejó con datos tabulados. Se estudió también el comportamiento estadístico del decaimiento radiactivo; se construyeron histogramas de la emisión del Bismuto, con una distribución que no resultó poissoniana como se esperaba. Por último se intentó determinar la masa en reposo del electrón mediante la identificación de fotopicos y borde de Compton en las distintas fuentes utilizadas.

1.-Introducción

1.1- Nociones básicas [1]

La radiación gamma (γ) proviene de transiciones de núcleos atómicos entre diferentes estados energéticos. Cuando un fotón γ atraviesa cierta sustancia luminiscente, pierde su energía al excitarla y se produce luminiscencia de baja intensidad. Para poder detectarla se utiliza un fotomultiplicador. La figura 1.1.1 muestra un esquema del mismo [2].

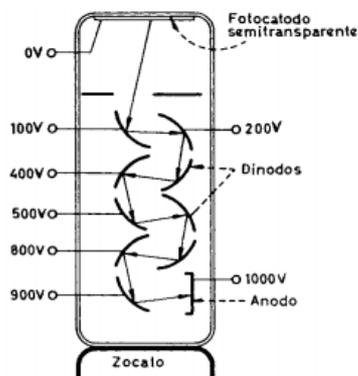


Figura 1.1.1- Esquema de un fotomultiplicador

Los electrones chocan en los dinodos arrancando más electrones (emisión secundaria), acelerados con un factor de multiplicación 10^5 .

Del fotomultiplicador (PMT) se genera un pulso de tensión con amplitud proporcional a la energía, la cual es amplificada y, mediante el analizador multicanal, se convierte la señal de voltaje en números de canal.

1.2- Energía del fotón incidente

En este abordaje se trabajó fundamentalmente con los fotopicos del espectro γ (asociados a la energía del fotón incidente) que corresponden al caso en que la energía del fotón incidente queda en el detector. Este hecho se encuentra asociado a que existe una alta probabilidad de que el electrón desprendido de la interacción fotoeléctrica entre los fotones y el cristal de $\text{NaI}(\text{Ti})$ sea totalmente absorbido por él[2].

La tabla 1.2.1 representa la tabla de valores de energía para las distintas fuentes utilizadas en esta experiencia:

Elemento	Energía (keV)
⁶⁰ Co	1173.24/1332.51
¹³³ Ba	302.86/356.01/383.86
¹³⁷ Cs	661.66
²² Na	502
²⁰⁷ Bi	72.8/569.15/1063.63

Tabla 1.2.1- Valores de energía para las fuentes usadas

En estos rangos de energías la dispersión de Compton es el efecto dominante y puede ser utilizado para medir la masa (en reposo) del electrón .

Midiendo E_γ , energía característica de la fuente que puede apreciarse en el espectro energético como un máximo bien definido denominado fotopico y T, correspondiente a la máxima energía cinética que adquieren los electrones al formar un ángulo de 180° , y planteando la conservación de energía-momento, puede calcularse la masa del electrón en reposo.

Esta energía T es la que corresponde al llamado borde de Compton[1]. La figura 1.2.1 muestra el espectro típico de rayos γ , en la cual se remarca la ubicación del borde Compton y el fotopico.

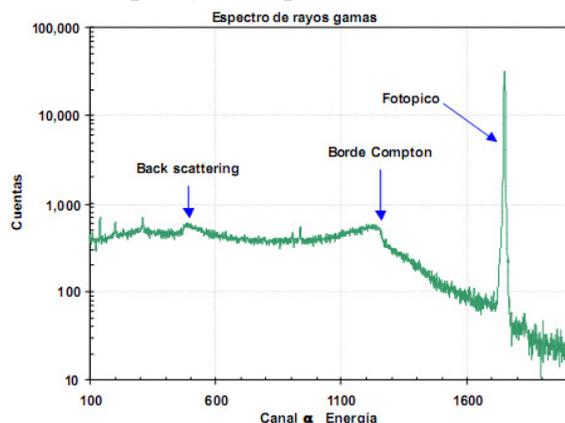


Figura 1.2.1- Espectro típico de rayos γ

Cuando se produce dispersión Compton con un ángulo de 180° , vale la siguiente igualdad:

$$P_e c = 2E_\gamma - T \quad (1)$$

donde P_e es el momento del electrón, c la velocidad de la luz, E_γ y T son los parámetros definidos previamente. Con la ecuación (1) y la relación clásica entre el momento y la energía, puede obtenerse la masa del electrón no relativista m_{nr} en función de estos parámetros:

$$T = \frac{P_e^2}{m_{nr}} \Rightarrow m_{nr} c^2 = \frac{(2E_\gamma - T)^2}{2T} \quad (2)$$

El mismo tratamiento puede hacerse con la relación relativista, obteniendo la masa en reposo del electrón m_0 :

$$T = \sqrt{P_e^2 c^2 + m_0 c^4} - m_0 c^2 \Rightarrow m_0 c^2 = \frac{2E_\gamma(E_\gamma - T)}{T} \quad (3)$$

1.3- Naturaleza estadística del decaimiento radioactivo

Dependencia con la distancia

Al número de desintegraciones nucleares por unidad de tiempo (el cual es proporcional al número de fotones emitidos) se lo denomina actividad A_0 de la fuente radioactiva. Esta magnitud puede expresarse en Becquerels o Curies, donde un Becquerel equivale a una desintegración por segundo y un Curie equivale a 3.7×10^{10} Becquerel. No es posible medir en forma directa la actividad de la fuente, dado que solo una fracción de los fotones es emitida en la dirección del detector. De este modo, la intensidad de emisiones I_0 que recibe el detector proveniente de una fuente ubicada a una distancia d viene dada por:

$$I_0 \propto A_0 \frac{a_d}{4\pi d^2} \quad (4)$$

esto es, la verdadera actividad de la fuente, multiplicada por el cociente entre la superficie efectiva del detector a_d y el área del casquete esférico de radio d .

Atenuación

Cuando la radiación emitida por una fuente atraviesa un medio material, sufre una atenuación en su intensidad original I_0 que depende del coeficiente de

atenuación másico $\frac{\mu}{\rho}$ donde μ es el coeficiente de absorción lineal, según la ley de Bouger-Lambert:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\rho} \rho \cdot x\right) \quad (5)$$

Donde x es el espesor de la barrera

Experimentalmente se puede verificar esta ley, y obtener el coeficiente de absorción lineal μ de un material dado, interponiendo placas homogéneas del mismo ante una fuente radioactiva y midiendo la intensidad de emisión que llega al detector. En este trabajo, se utilizaron láminas de cobre y aluminio.

Distribución de Poisson

La emisión de fotones es un proceso aleatorio, con lo cual, se estudian el decaimiento promedio de los mismos. En este trabajo se estudia el número de cuentas, y los resultados que se obtienen entre una medición y la siguiente a iguales características no son iguales, dada la naturaleza del proceso, anteriormente mencionada.

La probabilidad de que una variable tome el valor n , está dado por la función de distribución de Poisson

$$P_{\lambda}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$$

(6)

donde n toma valores naturales y λ es el valor medio de cuentas en el tiempo de observación, dado por

$$\langle n \rangle = \sum [n \cdot P_{\lambda}(n)] = \lambda$$

(7)

El cuadrado de la desviación estándar (varianza de distribución) está dado entonces por la ecuación 8,

$$\text{Var}(n) = \sigma^2 = \sum [(n - \langle n \rangle)^2 \cdot P_{\lambda}(n)] = \lambda = \langle n \rangle$$

(8)

2.-Descripción del experimento

En esta experiencia se utilizó una fuente regulada de tensión FAP 2.4.P LaserOptics de precisión 0 – 2kV, un centellador de tipo NaI(Tl), un H.V. Power Supply Model 3002D con amplificador 2022, fuentes de radiación gamma, el software Nucleus, y el software Origin.

2.1 – Calibración

La figura 2.1.1 muestra la disposición de los elementos utilizados.

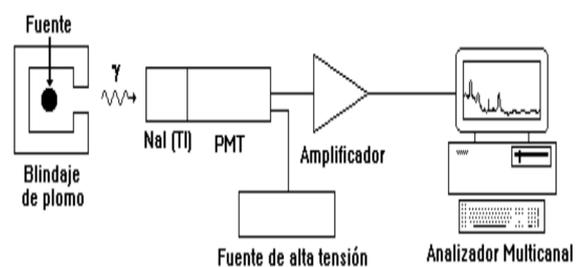


Figura 2.1.1 Disposición de los elementos usados en la experiencia

Primeramente, se buscó obtener la curva de calibración en energía del sistema espectroscópico (hallar la relación entre los canales, información que proporciona el software, y las energías para cada fuente). Debido a que los fotopicos son negativos pero la señal de entrada en la PC debe ser positiva, se seleccionó la polaridad negativa en el amplificador previamente a las mediciones. Asimismo se seleccionó una ganancia máxima de 8192 en el software, un voltaje de la fuente de $(1399 \pm 1)V$, y las siguientes configuraciones en el módulo de Amplificación: Coarse Gain 3K, Fine Gain 1.3, Shapping 1 μ seg.

Una vez establecidos dichos parámetros se realizaron cinco mediciones de actividad (una por cada fuente) y, haciendo uso de los valores de energía tabulados para cada fuente radioactiva utilizada, se estableció la comparación de los canales en que se encontraban los fotopicos con la energía a la que correspondían según la tabla. Se utilizaron fuentes radioactivas de Cesio (^{137}Cs), Bismuto (^{207}Bi), Cobalto (^{60}Co), Sodio (^{22}Na) y Bario (^{133}Ba).

2.2 – Estudio de la dependencia con la distancia

Para estudiar la dependencia de los resultados de la medición con la distancia entre el centellador y la fuente, se utilizaron dos de las fuentes (Ba y Cs) y se realizaron mediciones análogas a las descritas en la Sección 2.1 a distancias (0 ± 0.5)cm, (4 ± 1)cm, (8 ± 1)cm y (12 ± 1)cm.

2.3 – Estudio de la atenuación por el uso de barreras metálicas

Se ubicaron las muestras a estudiar a una distancia de (4 ± 1)cm del detector interponiendo entre estos en cada caso barreras de cobre y aluminio respectivamente variando el espesor de las mismas en cada medición. Se midió durante 400seg cada vez. Las muestras utilizadas fueron (^{207}Bi) y (^{133}Ba). y el espesor de las barreras de ($2 \pm 0,1$)mm, ($5 \pm 0,1$)mm, ($11 \pm 0,1$)mm para las barreras de cobre y ($3 \pm 0,1$)mm, ($5 \pm 0,1$)mm y ($11 \pm 0,1$)mm para el caso de las de aluminio.

2.4 – Estadística del decaimiento radioactivo

Para este estudio, se utilizó el módulo SCA y se configuró el software Nucleus como sistema de adquisición para medir las cuentas que llegan al detector en cierto intervalo de tiempo modificando los parámetros *Dwell Time* y *Passes*, y seleccionando el modo MCS permitiendo realizar una medición después de otra.

Dado que debía hallarse la relación entre la configuración del SCA, que va de 0 a 10V, y los fotopicos de la muestra, se realizó una medición preliminar fijando el *Dwell Time* en 10ms y 1 *Passes* modificando el SCA hasta ubicar los fotopicos.

Modificando dichos parámetros y utilizando la fuente de Bismuto (dado que resultó ser la más radioactiva), se realizaron reiteradas mediciones para construir los histogramas.

3.-Resultados

3.1 – Calibración

El gráfico de la figura 3.1.1 muestra los resultados de las mediciones realizadas con las cinco fuentes de radiación y detectadas.

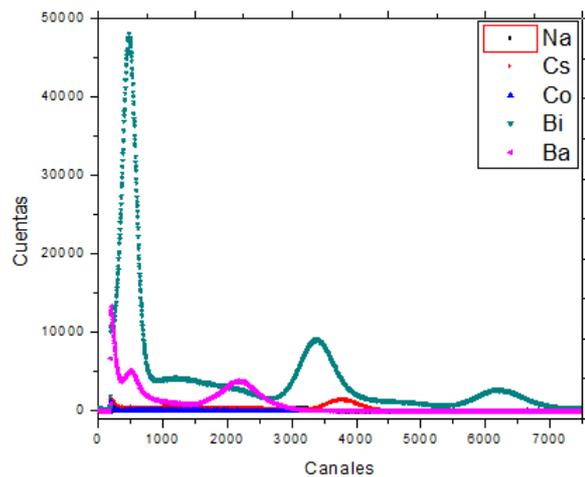


Figura 3.1.1- Gráfico de los fotopicos de cada fuente radioactiva usada

La figura 3.1.1 muestra una clara diferencia entre las emisiones de las fuentes: mucho mayores en el caso del bismuto y el bario en comparación con las restantes. Esto denota un desgaste de las fuentes del sodio, cesio y cobalto, siendo más radioactivas las dos mencionadas anteriormente.

La figura 3.1.2 muestra la relación entre el número de canales y la energía de la muestra. Esta curva fue usada posteriormente para asociar la información proporcionada por el software (canales) en la energía correspondiente.

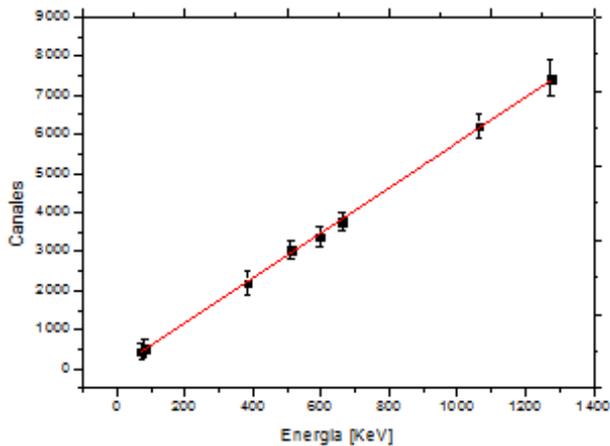


Figura 3.1.2- Curva de calibración entre el número de canales y la energía de la muestra, con el ajuste lineal realizado y sus respectivos errores

Para realizar el gráfico fueron considerados los valores de energía de los fotopicos, según indica la tabla 1.2.1. Dada la tendencia de puntos y la relación aproximadamente lineal, se ajustaron los puntos con una función del tipo

$$y = a \cdot x + b \quad (9)$$

obteniendo como resultado un valor de ordenada $b = (21 \pm 4)$ [canales] y pendiente $a = (5.7 \pm 0.05)$ [canal/KeV].

3.2 – Estudio de la dependencia con la distancia

La figura 3.2.1 muestra la diferencia en los resultados de las mediciones con las distintas distancias entre la muestra y el centellador, realizado a las distancias (0 ± 0.5) cm, (4 ± 1) cm, (8 ± 1) cm, (12 ± 1) cm usando Bario.

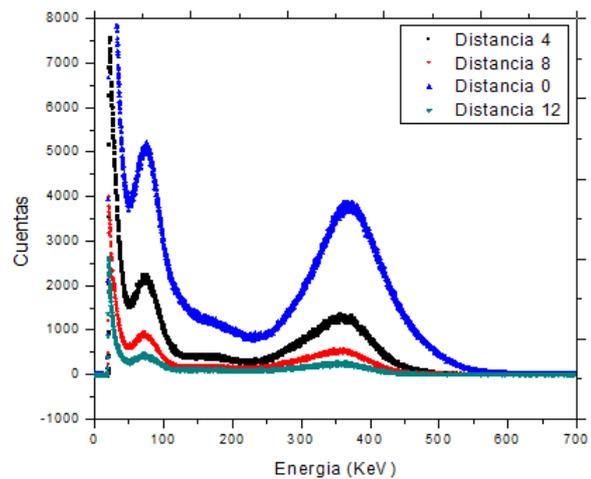


Figura 3.2.1- Relación entre la cantidad de cuentas y energía para las distancias (4 ± 1) cm, (8 ± 1) cm, (12 ± 1) cm, y (0 ± 0.5) cm usando Bario

Es notable la diferencia entre las cuentas leídas por el sistema según los valores de distancia, los cuales resultan mayores a menor distancia, siendo, en términos de cuentas: (3876 ± 55) , (1357 ± 42) , (558 ± 24) , (283 ± 38) .

Esta experiencia se repitió utilizando la fuente radioactiva de Cesio, y los resultados análogos a los que muestra la figura 3.2.1 los muestra la 3.2.2 para distancias (0 ± 0.5) cm, (4 ± 1) cm y (8 ± 1) cm.

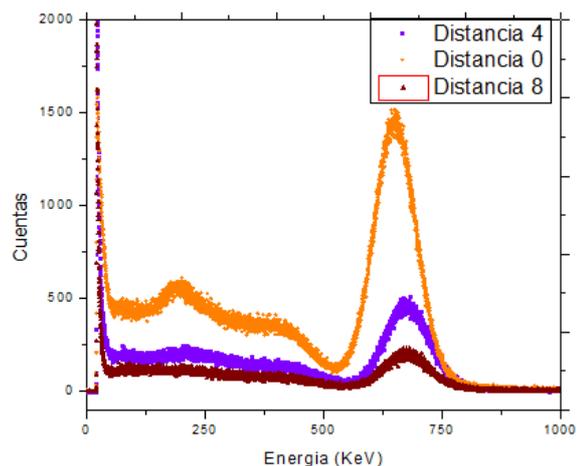


Figura 3.2.2- Relación entre la cantidad de cuentas y energía para las distancias (4 ± 1) cm, (8 ± 1) cm y (0 ± 0.5) cm usando Cesio

En este caso, los valores máximos de números de cuentas para el valor de energía de emisión resultaron ser (1489 ± 51) , (497 ± 31) , (232 ± 39) .

De la observación en el decaimiento de las cuentas en función de las distancias, se realizaron las comparaciones, teniendo en cuenta las mediciones que se hicieron con ambas fuentes. El resultado de la comparación se expone en la figura 3.2.3.

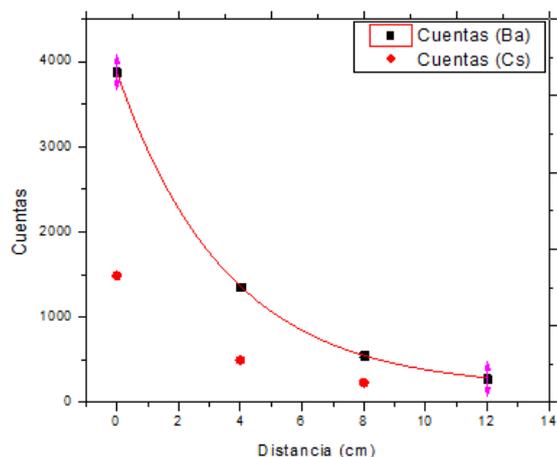


Figura 3.2.3- Número de cuentas en función de la distancia para el Bario (negro) y el Cesio (rojo). Se incluye el ajuste las mediciones con el Bario

Cabe destacar que no logró hacerse la medición para la distancia (12 ± 1) cm con el Cesio debido su baja intensidad. Dado el notable decaimiento de cuentas en función de la distancia, se realizó un ajuste del tipo

$$y = \frac{B}{C \cdot x^D} \quad (10)$$

a los puntos correspondientes al Bario a modo de representación, obteniéndose como resultado el valor $D = (1.98 \pm 0.002)$, muy cercano a 2, del cual puede inferirse que la intensidad decae con el cuadrado de la distancia. La ecuación 4 sirve entonces como modelo para el resultado obtenido.

3.3 – Estudio de la atenuación por el uso de barreras metálicas

De la interposición de barreras metálicas de cobre y aluminio de distintos espesores entre las fuentes radioactivas y el detector se obtuvieron los resultados que se muestran en las figuras 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 y 3.3.4.

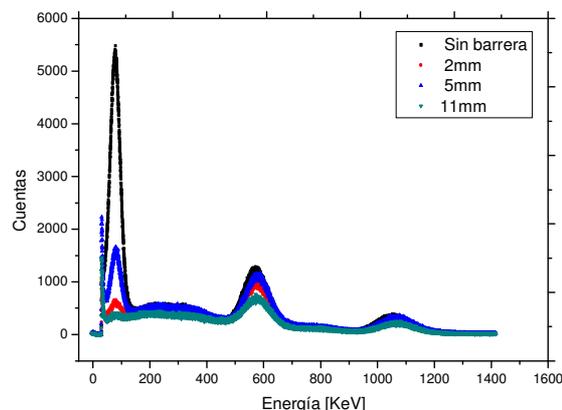


Figura 3.3.1- Atenuación del número de cuentas por el uso de barreras de cobre de (2 ± 0.1) mm, (5 ± 0.1) mm y (11 ± 0.1) mm en el espectro de radiación del Bismuto

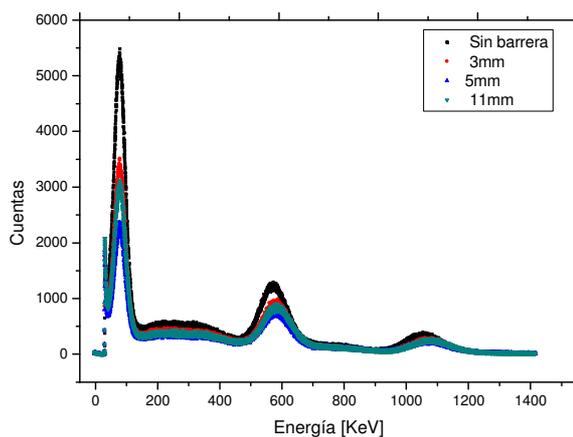


Figura 3.3.2- Atenuación del número de cuentas por el uso de barreras de Aluminio de (3 ± 0.1) mm, (5 ± 0.1) mm y (11 ± 0.1) mm en el espectro de radiación del Bismuto

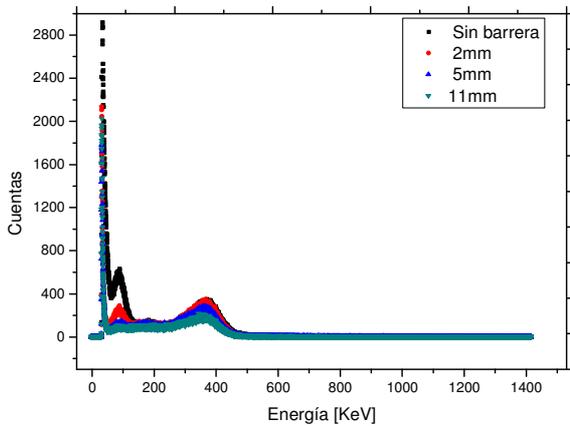


Figura 3.3.3- Atenuación del número de cuentas por el uso de barreras de cobre de (2 ± 0.1) mm, (5 ± 0.1) mm y (11 ± 0.1) mm en el espectro de radiación del Bario

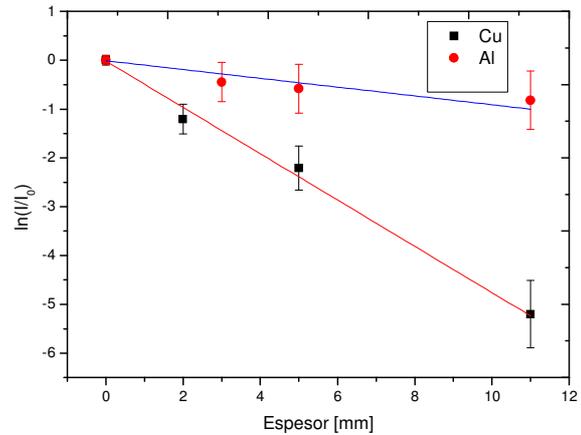


Figura 3.3.5- Comparativa de la atenuación del ^{207}Bi en función del espesor de la placa de Cobre (negro) y aluminio (rojo) para el primer fotopico 78.68 KeV graficado en escala semi-logarítmica

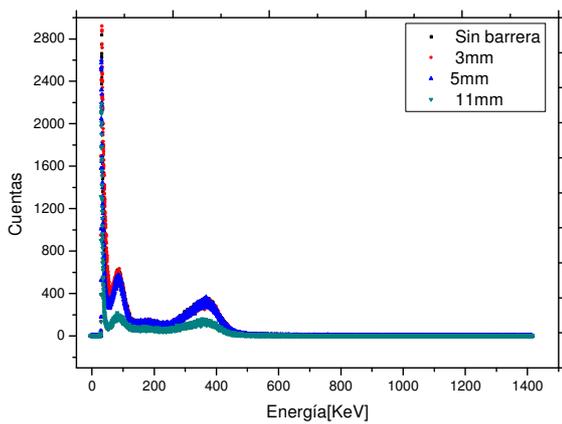


Figura 3.3.4- Atenuación del número de cuentas por el uso de barreras de Aluminio de (3 ± 0.1) mm, (5 ± 0.1) mm y (11 ± 0.1) mm en el espectro de radiación del Bario

En todos los casos se observa cualitativamente que la presencia de obstáculos provocan una atenuación de los fotopicos, la cual se acentúa a medida que el espesor las barreras interpuestas aumenta.

Una forma interesante de comparar y cuantificar este fenómeno es mediante el estudio del coeficiente de absorción lineal de los materiales que componen a las barreras utilizadas. La figura 3.3.5 muestra la comparación de la atenuación de radiación del Bismuto en su primer fotopico (78.68 Kev) en función del espesor de las placas interpuestas.

De las pendientes de los ajustes lineales realizados en la figura 3.3.5 se obtienen los coeficientes de absorción lineal para cobre μ_{Cu} y aluminio μ_{Al} respectivamente, a saber:

$$\mu_{Cu} = (4.7 \pm 0.5) \text{cm}^{-1}$$

$$\mu_{Al} = (1.0 \pm 0.5) \text{cm}^{-1}$$

Se observa que el coeficiente de absorción lineal para el cobre es casi un 500% mayor que el del aluminio, lo que implica que la atenuación que impone el cobre es mucho mayor.

Asimismo este coeficiente de absorción lineal no solo cambia entre los distintos metales sino que también varía en un mismo metal según la energía de radiación a la que esté expuesto. Esto puede ser observado en los gráficos de la figuras 3.3.6 y 3.3.7, donde se calculó dicho coeficiente en base a las relaciones de intensidad (I/I_0) de todos los fotopicos de cada una de las fuentes utilizadas, para distintos espesores de barreras de cobre (figura 3.3.6) y de aluminio (figura 3.3.7). [3]

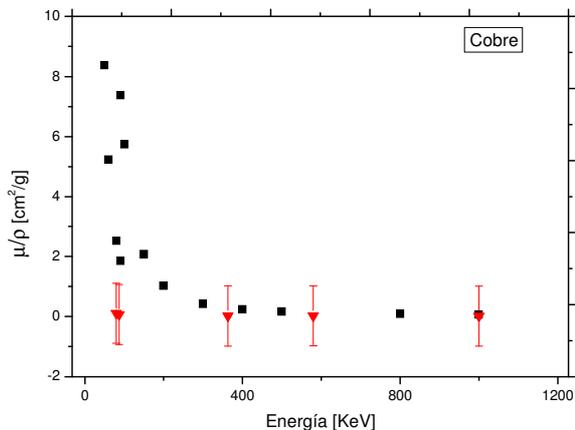


Figura 3.3.6- Evolución del coeficiente de atenuación masico (μ/ρ) para el cobre, en función de la energía. Se comparan los valores experimentales obtenidos con los de tablas proporcionados por NIST (negro)

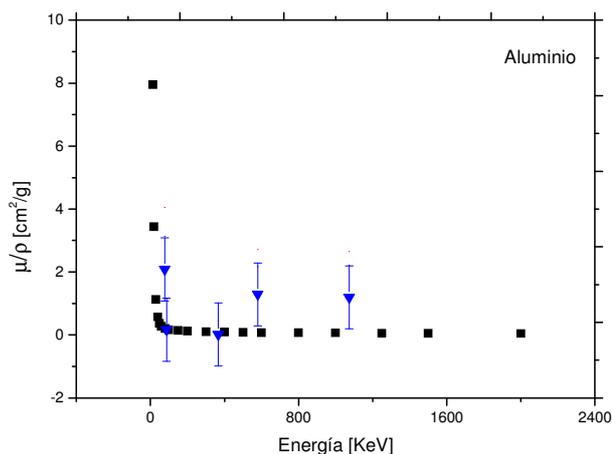


Figura 3.3.7- Evolución del coeficiente de atenuación (μ/ρ) para el Aluminio, en función de la energía. Se comparan los valores experimentales obtenidos con los de tablas proporcionados por NIST (negro)

Los valores experimentales obtenidos fueron comparados con tabulados, tal como se muestra en los gráficos anteriores, observándose correspondencia dentro de los errores experimentales cometidos.

3.4 – Estadística del decaimiento radioactivo

La localización de los fotopicos de la fuente parametrizando el software según se describió en la sección 2.4 requirió el uso del osciloscopio, dado que

lo que se visualiza en la pantalla del software en simultáneo con la medición no es el número de cuentas y, por lo tanto, no se corresponde directamente con máximos de intensidad. Además, la forma alternativa de captar los fotopicos (el encendido del led del módulo SCA) no resultó efectiva, dado que la detección de máximas intensidades no se traducen en un encendido continuo del led, sino en un encendido intermitente que no llega a visualizarse excepto que la luz ambiente sea lo suficientemente tenue.

En el análisis de datos se concluyó que los máximos de cuentas no coincidían con los fotopicos de la fuente, sino que se tenía un máximo en la distribución coincidente con la energía 0. Tras ello se decidió aumentar el *low level* del módulo SCA de modo tal de evitar dicho valor. Los resultados obtenidos en uno y otro caso se exponen en los histogramas de las figuras 3.4.1 y 3.4.2, las cuales se efectuaron con la fuente de Bismuto, parametrizando un *dwell time* de $10\mu s$, 5000 *passes* y 8192 *gain*, pero con una ventana de 0.1 y *low level* de 0.8 en el primer caso y una ventana de 1 y *low level* de 3.66 en el segundo.

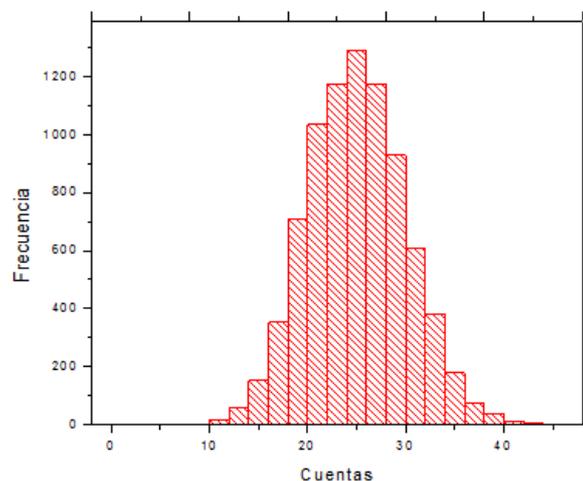


Figura 3.4.1- Histograma con Bi, *dwell time* = $10\mu s$, 5000 *passes*, ventana de 0.1, *low level* 0.8 – sin normalizar

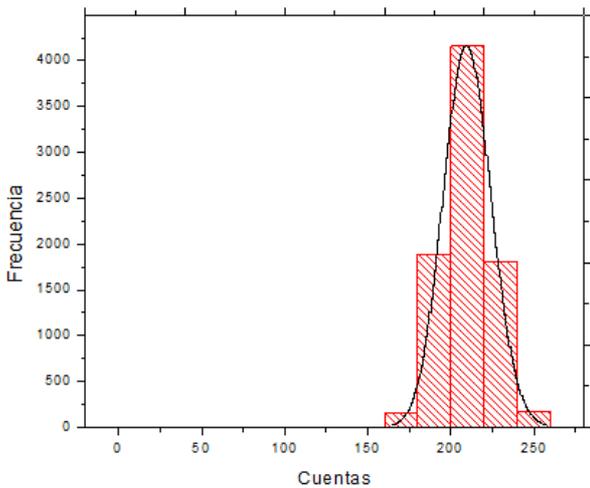


Figura 3.4.2- Histograma con Bi, dwell time = 10 μ s, 5000 passes, ventana de 1, low level 3.66. Contiene la tendencia de la función poissoniana– sin normalizar

El análisis de los datos obtenidos muestra que las distribuciones obtenidas no pueden modelarse satisfactoriamente con una poissoniana. Si bien en la figura 3.4.2 se dibujó mediante el software Origin una tendencia de Poisson, no pueden obtenerse los parámetros de la distribución debido a que no puede ajustarse el histograma con dicha función.

Pese a las reiteradas mediciones utilizando valores diferentes de los distintos parámetros, no se logró ajustar la distribución con una función del tipo poissoniana, lo cual reafirma que las configuraciones del módulo SCA no fueron las correctas, debido a no haber podido hallar los fotopicos de la radiación.

3.5 –Determinación experimental de la masa del electrón

Para la determinación de la masa del electrón en reposo de acuerdo a las ecuaciones (1) y (2), fue necesario determinar el valor de energía de los fotopicos y sus respectivos bordes de Compton. La dificultad al momento de estimar el valor de energía del borde de Compton radica en que este no siempre es notorio como lo es en el caso del Cesio, por ejemplo, lo cual lleva a que los errores de estimación sean muy grandes.

En la figura 3.5.1 se muestra la masa del electrón en función de la energía de acuerdo al modelo clásico (1) y al modelo relativista (2).

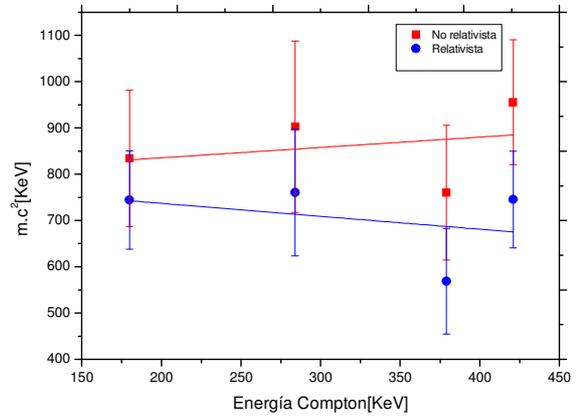


Figura 3.5.1- Comparativa de la masa del electrón por c^2 en función de la energía de Compton para los modelos relativista y no relativista

Los ajustes realizados resultaron dos rectas de pendiente $m = (0.2 \pm 0.77)$, y ordenada al origen $b = (790 \pm 262)$ para el caso no relativista y $m = (-0.3 \pm 0.57)$ y $b = (792 \pm 192)$ para el caso relativista.

De acuerdo al modelo clásico, la masa del electrón tendría que permanecer constante para toda energía. En el gráfico de la figura 3.5.1 se observa que esto no sucede, por lo que el modelo clásico no sería descriptivo del comportamiento observado, aunque los errores propagados son demasiado grandes, del orden del valor medido. Lo mismo sucede con el caso relativista.

La masa del electrón en reposo corresponde a la ordenada al origen del ajuste lineal del modelo relativista que, en este caso, resultó ser $m_0c^2 = (792 \pm 192)$ KeV, lejos del valor real $m_0c^2 = 511$ KeV. Aunque se puede decir que valor obtenido es del orden.

Se tendría que haber considerado algún método sistemático para poder disminuir los errores de T, para que luego estos no condicionen la medición final de la forma que lo hicieron.

4.-Conclusiones

En primer lugar y en relación a la selección de fuentes de radiación con las que se trabajó, se verificó que no todas regían como tales (debido a su uso y antigüedad), lo cual restringió el uso de fuentes a la del Bismuto, Cesio y Bario, fundamentalmente (ver *figura 3.1.1*). Pudo determinarse una relación lineal entre los canales de los fotopicos (información que proporciona el software) con la energía de los mismos (información extraída de tablas), a partir de esto se confeccionó una curva de calibración (fig 3.1.2) utilizada luego a lo largo de toda la experiencia.

El primer resultado notable en el estudio del espectro de radiación de las fuentes se extrajo de las figuras 3.2.1 y 3.2.2, concluyéndose que a medida que la fuente se aleja del centellador, la intensidad decae como $1/d^2$, lo cual pudo modelarse con la ecuación (4) satisfactoriamente. Otro factor que provoca el decaimiento de la intensidad en las mediciones es la interposición de barreras metálicas en el camino de los fotones, lo cual era de esperarse, este decaimiento impuesto depende del material que compone la barrera a través del parámetro llamado coeficiente de absorción lineal, el cual a su vez varía con la energía de los fotones a la cual se exponga dicha barrera. En este trabajo se compararon los resultados obtenidos utilizando cobre y aluminio, resultando en el primer caso un coeficiente de absorción mucho mayor que en el segundo, concluyendo que la atenuación que provoca el cobre es superior a la impuesta por el aluminio.

Del estudio estadístico del decaimiento radioactivo, se recomienda el exhaustivo análisis de la ubicación de los fotopicos de la fuente analizada previamente a la configuración de los parámetros del módulo SCA. No resulta trivial la detección de fotopicos en el modo MCS del software, ni tampoco notable la indicación del led del módulo SCA, llegando fácilmente al error en las mediciones. Las distribuciones obtenidas no corresponden a los fotopicos de la emisión de la fuente y, por lo tanto, no fue posible realizar un estudio de la misma.

El método utilizado para hallar el valor de la masa del electrón en reposo fue eficaz en tanto se halló un valor ($m_0c^2 = (792 \pm 192)\text{KeV}$) del orden esperado, coincidente con el real dentro del error cometido, pero impreciso, debido justamente al error cometido del 25%.

5.- Referencias:

- [1] **Nuclear**, *Guía laboratorio 5*, Dpto. de Física FCEyN, UBA
- [2] **Espectrografía gamma con detector de centelleo y analizador multicanal**, *Prácticas de física nuclear*
- [3] **X-Ray Mass Attenuation Coefficients - Nist**
<http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/ta b3.html>

6.-Apéndices

6.1 - Errores

Propagación del error para el cálculo del coef.de absorción lineal

$$\Delta(\mu \cdot x) = \Delta \left(\ln \left(\frac{I}{I_0} \right) \right) = \frac{I_0}{I} \left(\frac{\Delta I}{I_0} + \frac{I}{I_0^2} \Delta I_0 \right) \quad (11)$$

Donde x es el espesor de la barrera utilizada, I_0 es la intensidad medida sin barreras y I es la intensidad atenuada.

Propagación del error para el cálculo del coef. de atenuación μ/ρ

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\ln(I_0/I)}{\rho x} \quad (12)$$

Donde x es el espesor de la barrera utilizada, ρ es la densidad del metal que compone dicha barrera, I_0 es la intensidad medida sin barreras y I es la intensidad atenuada.

$$\Delta\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = \frac{I}{I_0} \Delta\left(\frac{I_0}{I}\right) \frac{1}{\rho x} + \frac{\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{(\rho x)^2} \Delta(\rho x) \quad (13)$$

$$\Delta(\rho x) = x\Delta(\rho) + \rho\Delta(x) \quad (14)$$

$$\Delta\left(\frac{I_0}{I}\right) = \frac{\Delta I_0}{I} + \frac{I_0}{I^2} \Delta I \quad (15)$$

Propagación del error para el cálculo de la masa del electrón en el caso no relativista

$$\Delta m_0 c^2 = \frac{(2E_\gamma - T)}{T} \left((2\Delta E + \Delta T) + \frac{(2E_\gamma - T)}{2T^2} \Delta T \right) \quad (16)$$

Propagación del error para el cálculo de la masa del electrón en el caso relativista

$$\Delta m_0 c^2 = \frac{(E_\gamma - T)}{T} \left(2\Delta E_\gamma + \frac{2E_\gamma}{T} \Delta T + 2E_\gamma \right) \quad (17)$$