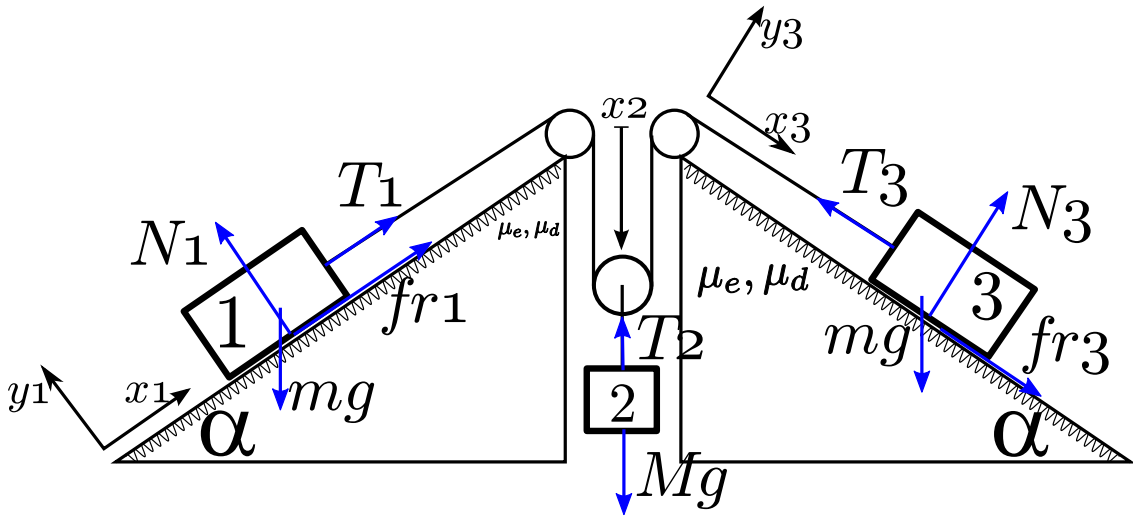
Resolución (breve) del Primer Parcial de Física 1 (Físicos)

2do Cuatrimestre 2010 - Cátedra C. Nuñez

Problema 1

a)

Comencemos analizando las fuerzas que actúan sobre los cuerpos. Los tres bloques sienten su fuerza peso dirigida hacia el centro de la Tierra y de valor $m_i g$ con m_i el valor de cada una de las masas. Sus respectivos pares de interacción están en el centro de la Tierra que es quien les ejerce la fuerza peso. Además los bloques 1 y 3 al estar apoyados sobre planos inclinados sienten la fuerza que este les hace. La misma tiene dos partes: por un lado la fuerza normal al plano, N_i, y por el otro lado una fuerza de rozamiento tangencial a la superficie f_r. Ambas fuerzas son producto de la interacción con el plano y por lo tanto los pares de interacción de estas fuerzas están en los respectivos planos inclinados, con la misma dirección y sentidos opuestos. Finalmente, todos los bloques al estar unidos por sogas estiradas sienten una tensión en la dirección de las sogas. Estas fuerzas tienen sus pares de interacción sobre la sogas que ejercen cada una de la fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos son así:



b)

Para escribir las ecuaciones de Newton primero necesitamos elegir un sistema de coordenadas apropiado: como el movimiento de cada bloque es en una sola dirección (inclinada a veces); voy a elegir para cada cuerpo un eje x positivo en la dirección del movimiento y otro y en la dirección perpendicular. Así descomponiendo las fuerzas en esas direcciones las ecuaciones me quedan:

$$\textbf{Bloque 1}\ \hat{x}: \quad T_1 - mg\sin\alpha + fr_1 = m\ddot{x}_1 \qquad \hat{y}: N_1 - mg\cos\alpha = m\ddot{y}_1 \tag{1a}$$

$$\textbf{Bloque 2}\ \hat{x}: \quad Mg - T_2 = M\ddot{x}_2 \qquad \hat{y}: \text{No hay fuerzas} \tag{1b}$$

$$\textbf{Bloque 3}\ \hat{x}: \quad fr_2 + mg\sin\alpha - T_3 = m\ddot{x}_3 \qquad \hat{y}: N_3 - mg\cos\alpha = m\ddot{y}_3 \tag{1c}$$

En donde ya usé que $m_1 = m_3 = m$ y $m_2 = M$. Además como las poleas son ideales y la sogas tienen masa cero, podemos decir que $T_1 = T_3$ (polea pequeña) que llamaremos T y $T_2 = 2T$ (polea de masa cero) en función de una sola T incógnita. Además como las sogas son inextensibles la posición entre las distintas masas está relacionada. Si ℓ_1 es la longitud de la soga larga que pasa por la polea móvil, la podemos escribir como

$$\ell_1 = L - x_1 + x_3 + 2(x_2 - \ell_2)$$

donde ℓ_2 es la longitud de la soga corta que une la polea móvil con el bloque 2. Derivando dos veces la relación de arriba respecto al tiempo encontramos que las aceleraciones se relacionan según $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_3 + 2\ddot{x}_2$[1]. También, como los bloques 1 y 3 no se levantan de los planos inclinados tenemos que $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_3 = 0$. Lo único que nos falta para terminar de cerrar el sistema de ecuaciones son las fuerzas de rozamiento, pero para esto necesitamos decir algo acerca de la cinemática de los bloques.

c)

Si todo el sistema está en reposo quiere decir que las aceleraciones son cero: $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = 0$, reemplazando en (1) obtenemos cuanto deben valer las fuerzas de rozamiento en este caso

$$fr_1 = mg\sin\alpha - \frac{Mg}{2} \qquad fr_2 = \frac{Mg}{2} - mg\sin\alpha$$

Dado que los módulos de ambas fuerzas están acotados por el mismo valor $\mu_e mg\cos\alpha$ al tener igual coeficientes de rozamiento e igual masa los bloques 1 y 3. Tenemos que

$$\left|\frac{Mg}{2} - mg\sin\alpha\right| \leq \mu_e mg\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$-2m\mu_e\cos\alpha \leq M - 2m\sin\alpha \leq 2m\mu_e\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{2m(-\mu_e\cos\alpha + \sin\alpha) \leq M \leq 2m(\mu_e\cos\alpha + \sin\alpha)} \tag{2}$$

Por lo tanto, si M está fuera de este rango, el sistema no podrá estar en reposo.

d)

Si M toma el doble del máximo valor en c) quiere decir que $M = 4m(\mu_e\cos\alpha + \sin\alpha)$ y que el sistema se pondrá en movimiento. Al suceder esto, las fuerzas de rozamiento no serán más estáticas sino que dinámicas y sus módulos valdrán, $|fr_{1,2}| = \mu_d mg\cos\alpha$. Los sentidos serán opuestos al movimiento, por lo cual si inicialmente los bloques 1 y 3 descienden, las fuerzas de rozamiento irán hacia arriba y las ecuaciones quedarán (incorporando las condiciones de vínculos y poleas)

$$\text{Bloque 1 } \hat{x}: \quad T - mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x}_1 \tag{3a}$$

$$\text{Bloque 2 } \hat{x}: \quad Mg - 2T = M\ddot{x}_2 \tag{3b}$$

$$\text{Bloque 3}\hat{x}: \quad -\mu_d mg\cos\alpha + mg\sin\alpha - T = m\ddot{x}_3 \tag{3c}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_3 + 2\ddot{x}_2 \quad \text{(vínculo)} \tag{3d}$$

Despejando las aceleraciones, llegamos a

$$\ddot{x}_1 = g\,\frac{M + 2m(\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha)}{2m + M}$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_3 = -\ddot{x}_1$$

Reemplazando el valor de M en cuestión, llegamos a que

$$\boxed{\ddot{x}_1 = g\frac{(\mu_d + 2\mu_e)\cos\alpha + \sin\alpha}{1 + 2\mu_e\cos\alpha + 2\sin\alpha}},$$

que es claramente positiva mientras que la velocidad inicial es negativa (ver ejes). El bloque por lo tanto se va a desacelerar hasta alcanzar velocidad cero, y una vez ahí, no quedará en reposo ya que es M es muy pesado y sino que se acelerará para el otro lado con una aceleración distinta que habría que calcular nuevamente ya que el sentido de las fuerzas de rozamiento (dinámicas) ha cambiado.

[1] Notar que si derivamos solo una vez lo que obtenemos es una relación idéntica pero para las velocidades

Problema 2

a)

Para encontrar la condición de vínculo entre la posiciones escribimos la longitudes de las sogas que son inextensibles en función de las coordenadas de los cuerpos. Así primero fijamos el origen de coordenadas en la pared y colocamos un eje $\hat{x}$ curvo como se muestra en la figura. La longitud de la soga 1, ℓ_1 (ver dibujo), se escribe $\ell_1 = 2x_P - x_1$ donde x_p es la posición de la polea móvil y x_1 la del bloque; por otro lado la longitud de la soga 2, ℓ_2, la podemos escribir $\ell_2 = x_2 - x_p$ donde x_2 es la posición del bloque 2. Combinando ambas expresiones y derivándolas dos veces respecto al tiempo tenemos la relación entre las aceleraciones [2]

$$\boxed{\ddot{x}_1 = 2\ddot{x}_2}$$

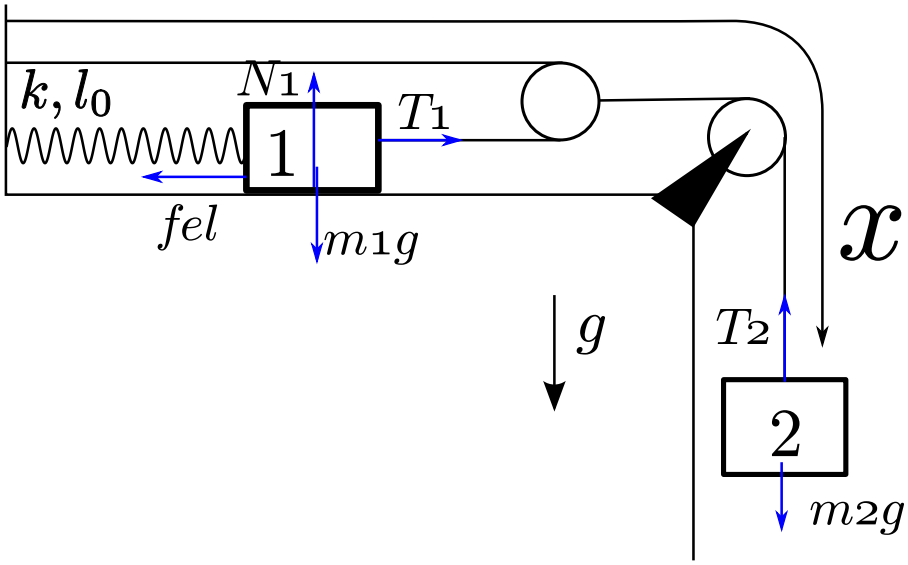
Ahora pasemos a escribir las ecuaciones de Newton; para lo cual primero tenemos que individuar todas las fuerzas actuando sobre cada cuerpo. Sobre el bloque 1, actúan la fuerza peso y la normal con la superficie en la dirección perpendicular al movimiento; y la fuerza elástica y la tensión de la soga en la dirección del movimiento. De acuerdo con la elección de nuestro eje $\hat{x}$ la longitud del resorte es x_1 y la fuerza elástica, $f_{el} = -k(x_1 - l_0)$. Así la ecuación de Newton es

$$\boxed{\hat{x}: \quad -k(x_1 - l_0) + T_1 = m_1\ddot{x}_1 \qquad \hat{y}: \quad N - m_1 g = 0 \quad \text{(No hay movimiento.)}}$$

Para el bloque solo tenemos su peso y la tensión. Así la ecuación de Newton es

$$\boxed{m_2 g - T_2 = m_2\ddot{x}_2.}$$

Finalmente, dado que las poleas son ideales y las sogas tienen masa cero, la tensión sobre la masa 2 es el doble que la tensión sobre 1, i.e., $T_2 = 2T_1$.



[2] NB: $\dot{\ell}_1 = \dot{\ell}_2 = 0$ pues las sogas son inextensibles.

b)

Combinando las ecuaciones de movimiento de las dos masas teniendo en cuenta la relación de vínculo entre las aceleraciones, tenemos

$$-2k(x_1 - l_0) + m_2 g = (2m_1 + \frac{m_2}{2})\ddot{x}_1 \quad \Rightarrow$$
$$\ddot{x}_1 + \underbrace{\frac{2k}{2m_1 + m_2/2}}_{\omega_0^2} x_1 = \frac{m_2 g}{2m_1 + m_2/2} + \frac{2kl_0}{2m_1 + m_2/2} \tag{4}$$

La ecuación de arriba tiene como solución una oscilación armónica simple con un punto de equilibrio distinto de cero. El factor del término proporcional a x_1 es ω_0^2 y por lo tanto $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{2m_1 + m_2/2}}$. Mientras que el punto de equilibrio x_{eq} se obtiene sabiendo que es una posición en donde la aceleración se anula. Así de la ecuación (4) obtenemos que $x_{\text{eq}} = \frac{m_2 g}{2k} + l_0$ y entonces la solución general del movimiento es

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{eq}}$$

Donde A y φ son la amplitud y fase inicial de la oscilación que dependen de las condiciones iniciales del problema. En nuestro caso, sabemos que inicialmente ($t = 0$) tenemos que el bloque 2 baja con velocidad v_0 y por lo tanto por la relación de vínculo, el bloque 1 tendrá inicialmente una velocidad $2v_0$, así:

$$x_1(t=0) = l_0 = A\cos\varphi + \frac{m_2 g}{2k} + l_0, \qquad \dot{x}_1(t=0) = 2v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi, \quad \Rightarrow$$
$$A\cos\varphi = -\frac{m_2 g}{2k}, \quad A\sin\varphi = -\frac{2v_0}{\omega_0}$$

Sumando los cuadrados y haciendo el cociente obtenemos A y $\tan\varphi$.

$$A = \left(\frac{4v_0^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{m_2 g}{2k}\right)^2\right)^{1/2}, \qquad \tan\varphi = \frac{4v_0\, k}{\omega_0 m_2 g} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4k\, v_0}{\omega_0 m_2 g}\right)$$

Con lo cual la expresión para $x_1(t)$ queda completa sin datos desconocidos:

$$\boxed{x_1(t) = \left(\frac{4v_0^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{m_2 g}{2k}\right)^2\right)^{1/2} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{2m_1 + m_2/2}}\, t + \varphi\right) + l_0 + \frac{m_2 g}{2k}}$$

c)

De la ecuación de Newton para m_2 podemos despejar T_2

$$\begin{aligned} T_2 &= m_2 g - m_2 \ddot{x}_2 \overset{\text{vínculo}}{=} m_2 g - m_2 \frac{\ddot{x}_1}{2} \\ &= m_2 g + \frac{m_2}{2} A\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &= m_2 \left\{ g + \left[\left(\frac{2v_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{m_2 g}{2k}\right)^2\right]^{1/2} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \right\} \end{aligned}$$

El mínimo valor de T_2 será entonces cuando el coseno tome el valor -1,
$T_2^{\text{Minima}} = m_2 \left\{ g - \left[\left(\frac{2v_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{m_2 g}{2k}\right)^2\right]^{1/2} \omega_0^2 \right\}$

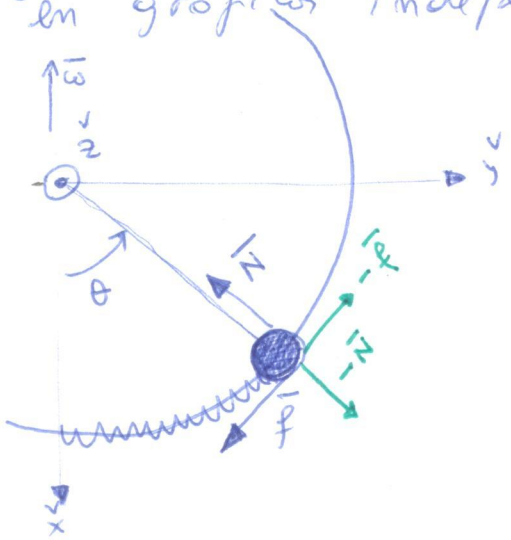
Si este valor de tensión mínima es negativa o cero, significa que en algún momento la soga no estará tensionada si no que se arrugará. Como v_0 aparece restando, el valor para el cual la tensión mínima calculada arriba es cero, determina el máximo valor de v_0 que puede tener en este caso. Así obtenemos una expresión para v_0 que puede simplificarse para llegar a:

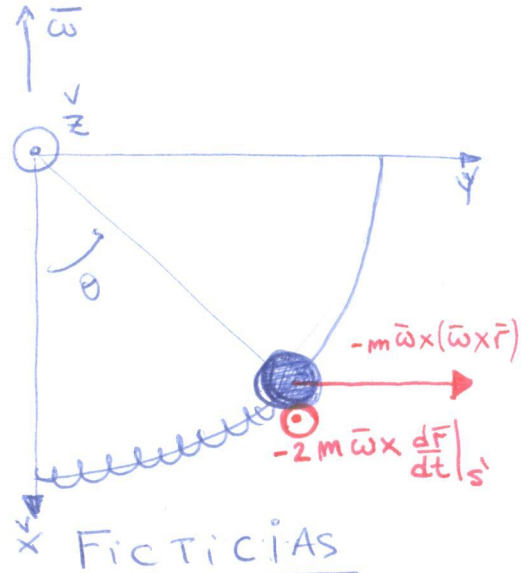
$$v_{0\text{maxima}}^2 = g^2 \, \frac{16\, m_1^2 + 8 m_1 m_2 + 5 m_2^2}{16k(4m_2 1 + m_2)}$$

Finalmente, como vemos de esta expresión es siempre positiva o sea que siempre le puedo dar una velocidad inicial tal que se arrugue. Notar que esto es así porque elegí darle esa velocidad cuando el resorte media l_0, bajo otras condiciones iniciales habría que ver si el sistema sí puede oscilar sin que se arrugue la soga.

Problema 3

a) Por estar en un sistema no inercial, tendremos fuerzas reales y ficticias. Para que se vean mejor las pongo en gráficas independientes:





Reales

Son la fuerza del resorte $\bar{f}$ y la normal $\bar{N}$. Los pares de interacción son $-\bar{N}$ y $-\bar{f}$ que están actuando sobre el alambre y sobre el resorte respectivamente. Aquí por simplicidad no se dibujó la componente $\hat{z}$ de $\bar{N}$, pero ella existe. (Notar también que los sentidos pueden cambiar, ver (b) para más detalle).

Sólo las fuerzas reales tienen pares de interacción.

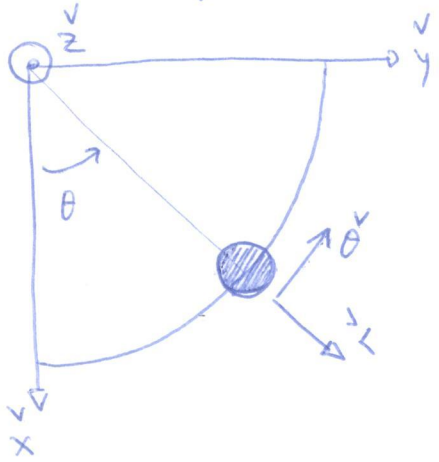
FICTICIAS

Son la centrífuga $-m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ y la de Coriolis: $-2m\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\Big|_{S'}$. Notar que la centrífuga apuntará siempre hacia afuera y en $\hat{y}$. Por otro lado por ser $\vec{\omega}$ y $\frac{d\bar{r}}{dt}\Big|_{S'}$ vectores en el plano $xy \Rightarrow$ Coriolis siempre tendrá su única componente en $\hat{z}$, la componente puede ser + o − según el sentido del movimiento (se la dibuja + por simplicidad, ver (b))

Por lo tanto la ecuación de Newton, con la aceleración escrita en el sistema no inercial será:

$$\boxed{m\vec{a}_{S'} = \vec{N} + \vec{f} - m\,\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - 2m\,\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\Big|_{S'}}$$

(b) para obtener la ecuación dinámica necesitamos escribir la ecuación de Newton en componentes. Son los versores definidos en el dibujo:



$$\vec{\omega} = -\omega \cos\theta\, \check{r} + \omega \operatorname{sen}\theta\, \check{\theta}$$

Luego, los 4 términos son:

- $\vec{N} = N_r\, \check{r} + N_z\, \check{z}$
- $\vec{f} = -kR\theta\, \check{\theta}$
- $-m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = m\omega^2 R \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \check{\theta} + m\omega^2 R \operatorname{sen}^2\theta\, \check{r}$
- $-2m\bar{\omega}\times \left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{S'} = 2m\omega\dot{\theta}R\cos\theta\, \check{z}$

} hecho en clase para el problema nº 12 28/09/10

pero entonces, recordando que $\vec{a}_{S'} = \ddot{\theta}R\check{\theta} - \dot{\theta}^2 R\check{r}$ tenemos que:

$$\begin{cases} (\check{z})\quad 0 = N_z + 2m\omega\dot{\theta}R\cos\theta \\ (\check{r})\quad -m\dot{\theta}^2 R = N_r + m\omega^2 R\operatorname{sen}^2\theta \\ (\check{\theta})\quad m\ddot{\theta}R = -kR\theta + m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{cases}$$

} determinan los vínculos N_r y N_z

} ¡Determina la dinámica!

luego, la ecuación que describe la dinámica de la bolita es

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\theta + \omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

(C) Las posiciones de equilibrio y la estabilidad se van a poder deducir de la ecuación que nos da la dinámica:

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2\theta + \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad ; \quad \Omega^2 = k/m$$

$\Rightarrow$ siendo esta ecuación de la forma $\ddot{\theta} = f(\theta)$, como ya hemos demostrado, los puntos de equilibrio son tales que $f(\theta^*) = 0$, y la estabilidad se obtiene del signo de $f'(\theta^*)$ ($\oplus$ inestable, $\ominus$ estable)

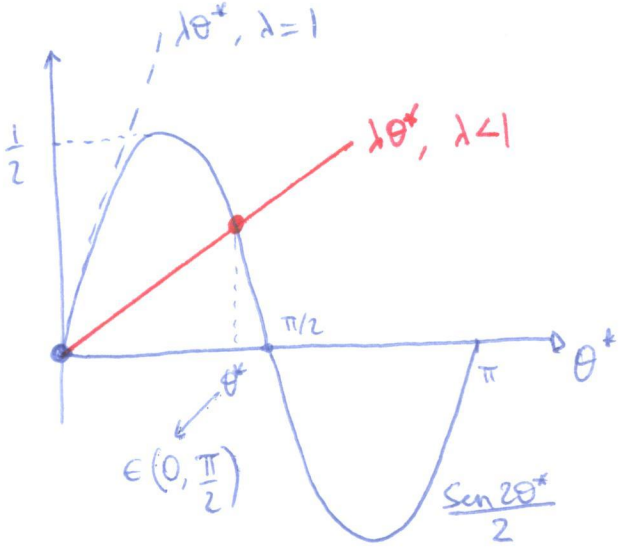
$\Rightarrow$ $0 = -\Omega^2\theta^* + \omega^2 \operatorname{sen}\theta^* \cos\theta^*$, notar que $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}$

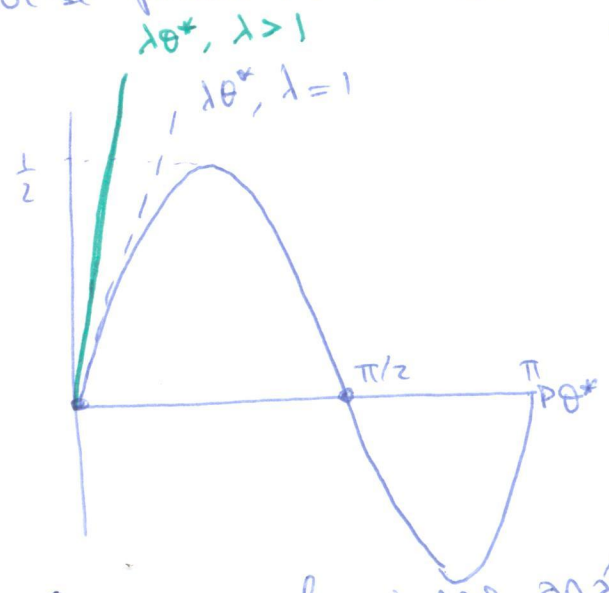
$0 = -\Omega^2\theta^* + \omega^2 \frac{\operatorname{sen}2\theta^*}{2}$; luego $\boxed{\theta^* = 0}$ siempre

es una raíz. Es más, siendo que $\omega \neq 0 \Rightarrow$

$0 = -\frac{\Omega^2}{\omega^2}\theta^* + \frac{\operatorname{sen}2\theta^*}{2}$; luego la existencia o no de soluciones solo depende de $\lambda = \frac{\Omega^2}{\omega^2}$. Por lo que podemos analizar $\lambda\theta^* = \frac{\operatorname{sen}2\theta^*}{2}$, con $\theta \in (0, \pi]$ (ver $\theta \in (0, 2\pi]$ en hoja 6) $\lambda\theta^*$ claramente es una recta por el origen de pendiente λ. Por otro lado $\frac{\operatorname{sen}2\theta^*}{2}$ puede obtenerse del gráfico de $\operatorname{sen}\theta$ (con modificaciones sencillas). Gráficamente estamos resolviendo las

intersecciones de ambas funciones. si estamos en el caso en el que $\theta \in (0, \pi]$ (el que se pidió en el examen)



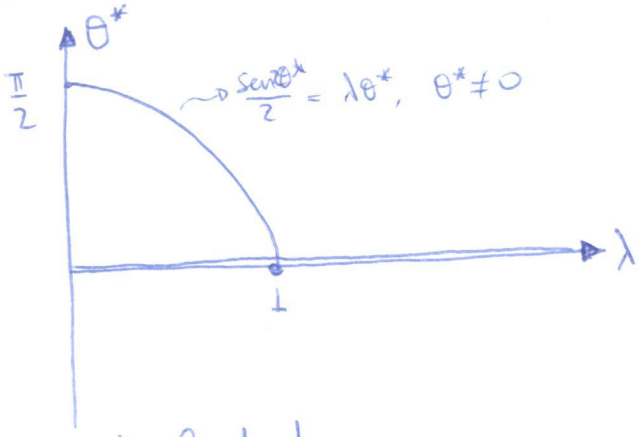


(Notar que el mismo análisis se aplica en el caso $\theta<0$, podemos omitirlo)

notar q' $\left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta^*}{2}\right)' = \cos 2\theta \Rightarrow$

$\left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta^*}{2}\right)'(0) = 1 \Rightarrow$ $\lambda\theta^*$ corta

θ no (fuera de $\theta^*=0$ según sea $\lambda>1$ o $\lambda<1$) $\Rightarrow$ los puntos de equilibrio se pueden representar por:



Resta aún hallar la estabilidad.

<u>Estabilidad</u>

Calculamos: $f'(\theta) = \omega^2(-\lambda + \cos 2\theta)$

$\Rightarrow$ si $\theta^*=0$ $\quad f'(0) = \omega^2(-\lambda+1) \Rightarrow$ $\lambda<1$ $\oplus$ inestable, $\lambda>1$ $\ominus$ estable

$\Rightarrow$ los que nos quedan son:

$f(\theta^*) = 0 \Rightarrow \quad \lambda\theta^* = \dfrac{\operatorname{sen}(2\theta^*)}{2}$
$(\theta^* \neq 0)$

$f'(\theta^*) = \omega^2(-\lambda + \cos 2\theta^*)$; pero entonces (como

$\theta^* \neq 0)$ $\lambda = \dfrac{\operatorname{sen}(2\theta^*)}{2\theta^*} \Rightarrow f'(\theta^*) = \omega^2\left(-\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta^*}{2\theta^*} + \cos 2\theta^*\right)$

$\Rightarrow$ (si $\cos 2\theta^* \neq 0$) $f'(\theta^*) = \cos(2\theta^*)\omega^2\left(1 - \dfrac{tg(2\theta^*)}{2\theta^*}\right)$

pero entonces si $2\theta^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\dfrac{tg(2\theta^*)}{2\theta^*} > 1$ y $\cos(2\theta^*) > 0$

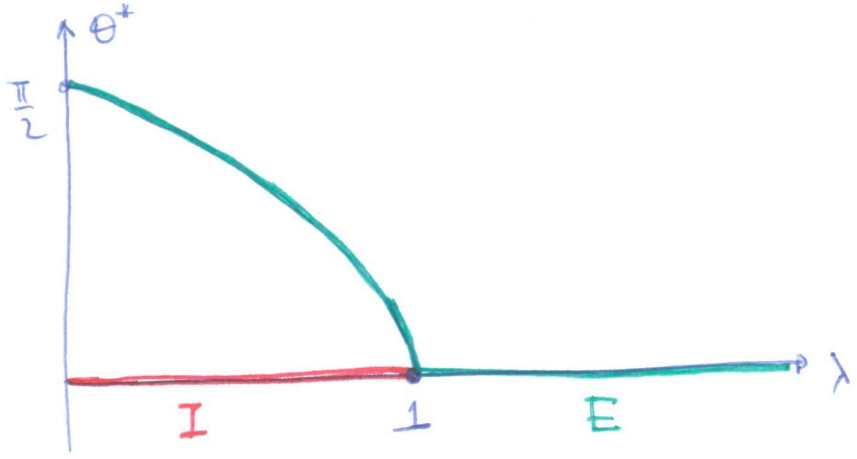
$\Rightarrow f'(\theta^*) < 0$. por otro lado si $2\theta^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos(2\theta^*) < 0$

y $\dfrac{tg(2\theta^*)}{2\theta^*} < 0 \Rightarrow f'(\theta^*) < 0$. Finalmente si $\cos 2\theta^* = 0$

(o sea $\theta^* = \frac{\pi}{4}$) $f'(\theta^*) = -\lambda\omega^2 < 0 \Rightarrow$ todas las solu

ciones $\lambda\theta^* = \dfrac{\operatorname{sen}(2\theta^*)}{2}$, con $\theta^* \neq 0$ son estables.

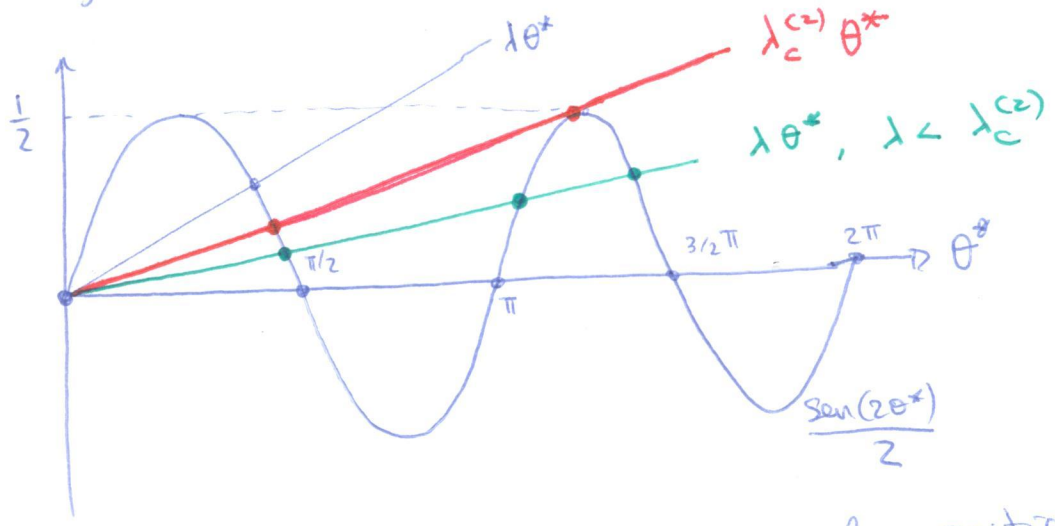
$\Rightarrow$ el diagrama de los puntos de equilibrio, con su estabilidad es:



Notar que físicamente es lo que uno espera. λ grande es: resorte le gana a la centrífuga solo $\exists$ $\theta^* = 0$. En los otros casos $\exists$ una compensación. además, cuando $\omega \to \infty$ (o sea $\lambda \to 0$) $\theta^* \to \frac{\pi}{2}$, como uno debe esperar.

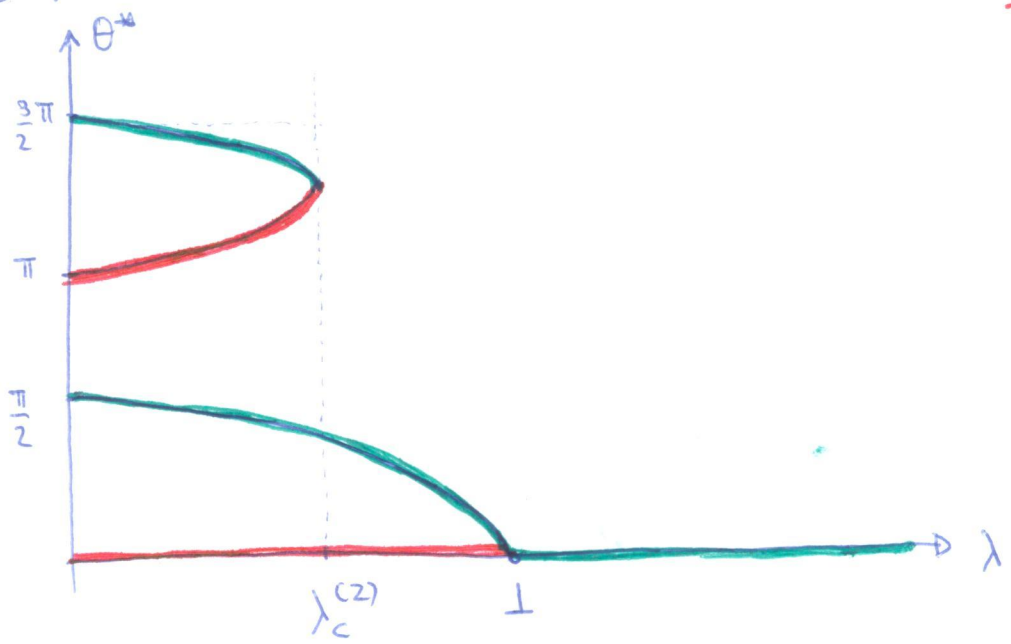
EXTRA* ¿Que pasa si permitimos $\theta \in (0, 2\pi)$?

Analizamos $\lambda\theta^* = \frac{\operatorname{sen}(2\theta^*)}{2}$ en ese intervalo:



Aparece, en este caso, un nuevo valor critico de λ, llamemoslo $\lambda_c^{(2)} < 1$ tal que si $\lambda < \lambda_c^{(2)}$ tenemos 4 soluciones en total, "nacen" 2 soluciones en el intervalo $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. $\Rightarrow$ ahora tenemos:

Inestable
Estable

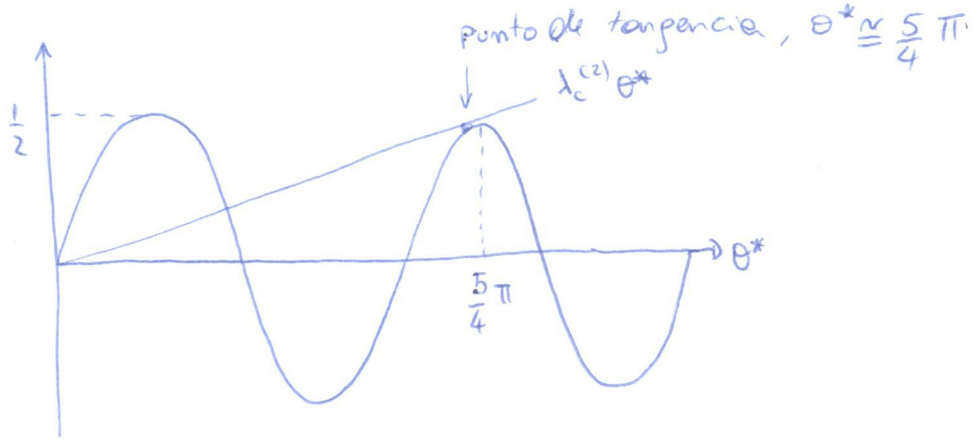


(Notar que la estabilidad tambien se puede sacar gráficamente viendo si $\lambda\theta^* \gtrless \frac{\operatorname{sen} 2\theta^*}{2}$ del dibujo $\Rightarrow$ no define si $-\lambda\theta^*\omega^2 + \omega^2\frac{\operatorname{sen} 2\theta^*}{2}$ es creciente o decreciente.)

---

* esto formaba parte del ejercicio original. pero si lo hacian bien en $(0, \pi)$ obtenían todo el puntaje, como se indicó en el examen

no se esperaba que pudieran calcular $\lambda_c^{(2)}$ de manera exacta (bastaba con que hicieran el análisis cualitativo), de todas formas notar que $\lambda_c^{(2)}$ se puede obtener de manera aproximada del gráfico:



$$\Rightarrow \quad \lambda_c^{(2)} \cong \frac{1/2}{\left(\frac{5}{4}\pi\right)} \cong 0.1273$$

Si les interesa como hacer el cálculo exacto me pueden preguntar en clase, el resultado que se obtiene es $\lambda_{c\,exacto}^{(2)} = 0.12837\ldots$

o sea que $\lambda_{c\,exacto}^{(2)} = (1.0084..)\ \lambda_{c\,aprox.}^{(2)}$

(Notar que el $\lambda^{(2)}_{aproximado}$ es muy bueno), de la misma forma el θ^*_{exacto}, donde se hacen tangentes ambas curvas, es $\theta^*_{exacto} \cong 0.983 \cdot \theta^*_{aprox.}$