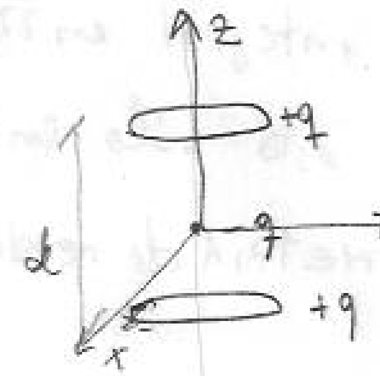
Probleme 1



Para calcular el campo $\bar{E}$ de esta distribución voy a superponer los campos de los 2 anillos y la carga.

Para eso primero voy a calcular el campo eléctrico de un solo anillo ubicado en $z = +d/2$. (Notar que tomo $z=0$ donde se encuentra la carga puntual).

$$\bar{E}_{\substack{Anillo\\ d/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \lambda(\bar{r}')\,\frac{(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\,dl'$$

donde $\lambda(\bar{r}')$ es la densidad de carga del anillo, que en este caso al ser uniforme y contener carga total q, vale

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} = \frac{q}{\text{Perímetro del Anillo}}.$$

$\bar{r}'$ son los puntos donde está el Anillo, o sea

$$\bar{r}' = (R\cos\theta', R\,\text{sen}\,\theta', d/2)$$

donde θ' va de 0 a 2π

$dl' = R\,d\theta'$ → el arco de la circunferencia.

$\bar{r}$ lo voy a tomar sobre el eje, pues es lo que me piden, $\bar{r} = (0,0,z)$.

$$\bar{E}_{\substack{Anillo\\ d/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{q}{2\pi \cancel{R}}\cdot\frac{(-R\cos\theta', -R\,\text{sen}\,\theta', z-d/2)}{[R^2+(z-d/2)^2]^{3/2}}\,\cancel{R}\,d\theta'$$

En ppio tengo q' hacer 3 integrales, pero las integrales (2)
en $\hat{x}$ e $\hat{y}$ se anulan pues la ÚNICA dependencia con θ'
está en los $\sin(\theta')$ y $\cos\theta'$ cuya integral en 2π
se anula. O sea que $\bar{E}$ sobre el eje está sólo en $\hat{z}$.

Esto mismo podía justificarse x la SIMETRIA de revolución
del problema alrededor de $\hat{z}$.

$$\bar{E}_{\substack{\text{Anillo}\\ d/2}}(0,0,z) = \hat{z}\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{\cancel{2\pi}}\,\cancel{2\pi}\,\frac{(z-d/2)}{\left[R^2+(z-d/2)^2\right]^{3/2}}$$

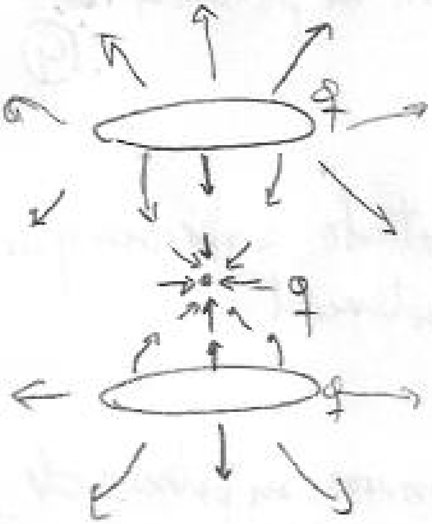
donde la integral en θ' es 2π.

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(z-d/2)}{\left[R^2+(z-d/2)^2\right]^{3/2}}\,\hat{z}$$

Para ver el CAMPO total sumo las 3 contribuciones
donde el campo del Anillo en $-d/2$ se obtiene directamente
reemplazando $d \rightarrow -d$ en la expresión de arriba.

$$\bar{E}_{Total}\Big|_{eje} = \frac{q\,\hat{z}}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{(z-d/2)}{\left[R^2+(z-d/2)^2\right]^{3/2}}}_{\text{Anillo en } d/2} + \underbrace{\frac{(z+d/2)}{\left[R^2+(z+d/2)^2\right]^{3/2}}}_{\text{Anillo en } -d/2} - \underbrace{\frac{z}{|z|^3}}_{\text{CAMPO de la CARGA puntual}}\right]$$

Para dibujar las líneas de CAMPO qualitativamente
tenemos en cta las cargas (sus valores) y la
simetría del problema



b- Para el cálculo del potencial. ③
podemos proceder de 2 MANERAS
· Por un LADO ya conocemos $\bar{E}$ y
como $-\nabla V = \bar{E}$ podemos integrarlo

$$\frac{dV}{dz} = -E_z \Rightarrow$$

$$\int_{\infty}^{z} dV = \int_{\infty}^{z} -E_z \, dz$$

$$V(z) = -\int_{\infty}^{z} E_z \, dz$$

donde ya elegí que $\underline{V(\infty) = 0}$.

La integral es hacible y está en tablas, pero es más fácil directamente superponer potenciales de los 2 anillos y de la carga puntual, ya que el potencial del anillo se calcula muy fácil.

$$V_{\text{Anillo } d/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda(r')\, dl'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} R\, d\theta' \, \frac{q}{2\pi R} \, \frac{1}{\left[R^2 + (z - d/2)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{1}{\left[R^2 + (z - d/2)^2\right]^{1/2}}$$

(Miran el cálculo de $\bar{E}$)

pues la integral es 2π

Superponiendo

$$V(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\left[R^2 + (z - d/2)^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + (z + d/2)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{|z|} \right]$$

Noten q' es IMPORTANTE MANTENER $|z|$ en el potencial de carga. ④

Como la distribución de cargas está acotada sabemos que existe un desarrollo multipolar del potencial

$$V(\bar{r}) = \overset{\swarrow \text{MONOPOLO}}{\frac{Q_{total}}{4\pi\epsilon_0 r}} + \overset{\swarrow \text{Dipolo}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{r^3}} + \text{otros términos en potencias de } r^{-3} \text{ o +}$$

Para encontrar Q_{TOT} y $\bar{P}$ voy a desarrollar la expresión que encontré de $V(z)$ en potencias de z

Así,

$$\frac{1}{[R^2+(z-d/2)^2]^{1/2}} = \frac{1}{[R^2+z^2+(d/2)^2-2zd/2]^{1/2}} = \frac{1}{|z|}\Big[1+\underbrace{\frac{R^2}{z^2}+\frac{(d/2)^2}{z^2}-\frac{d}{z}}_{\varepsilon}\Big]^{1/2}$$

Ahora uso la aproximación de taylor para $\frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \simeq 1-\frac{1}{2}\varepsilon$ donde ε es chico ($\varepsilon \ll 1$). En nuestro caso

$$\frac{1}{[R^2+(z-d/2)^2]^{1/2}} \simeq \frac{1}{|z|}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}-\frac{(d/2)^2}{2z^2}+\frac{d}{2z}\right)$$

y por lo tanto para el otro Anillo

$$\frac{1}{[R^2+(z+d/2)^2]^{1/2}} \simeq \frac{1}{|z|}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}-\frac{(d/2)^2}{2z^2}-\frac{d}{2z}\right)$$

(5)

$$V(z) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|z|}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}-\frac{(d/2)^2}{2z^2}+\frac{d}{2z}\right)+\frac{1}{|z|}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}-\frac{(d/2)^2}{2z^2}-\frac{d}{2z}\right)-\frac{1}{|z|}\right]$$

Se cancelan.

Agrupando potencias

$$V(z) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} + \text{cosas con } \frac{1}{z^3}\right]$$

De la expresión general del desarrollo multipolar en el eje

$$V_{Multip}(z) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 |z|} + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 z^2} + \frac{\text{cosas}\ldots}{z^3}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{Q_T = q}$ la carga total $(q+q-q)$

$\boxed{p_z = 0}$ componente z del dipolo.

(Por simetría las componentes x e y son cero)

$\boxed{\bar{p} = 0}$

C. Para calcular la fuerza que la carga puntual le hace a cada anillo voy a usar el ppio de acción y reacción para calcular la fuerza q' el anillo le hace a la carga. (y luego tendré que cambiarla de signo). Esto lo hago porque es + fácil evaluar el campo del anillo sobre la carga que viceversa.

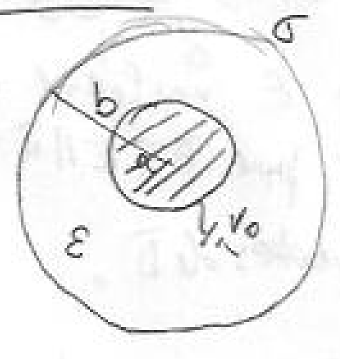
$$\bar{F}_{q \to \underset{d/2}{Anillo}} = -(-q)\ \bar{E}_{\underset{Anillo\ d/2}{}}(z=0) = \frac{-q^2 d}{8\pi\varepsilon_0 [R^2+(d/2)^2]^{3/2}}\hat{z}$$

Accion/Reaccion q

Similarmente

$$F_{q \to \underset{-d/2}{Anillo}} = \frac{q^2 d}{8\pi\varepsilon_0 [R^2+(d/2)^2]^{3/2}}$$

Problema 2



a.

Las fuentes de $\bar{E}$ y $\bar{D}$ los identificamos a partir de las ecs que CUMPLEN, así

$\nabla \cdot E = \rho_T/\varepsilon_0$
$\nabla \times E = 0$ $\Rightarrow$ las cargas totales (en volumen, superficie y puntuales) son las fuentes de $\bar{E}$. En este problema tenemos una densidad de carga libre igual a σ (conocida) en $r=b$. Una densidad de carga libre inducida σ_c en la superficie del conductor $r=a$, que todavía NO conocemos su valor, y las cargas de polarización en el dieléctrico, Estas todavía son desconocidas pero sabemos que como el Medio es L.I.H. las cargas en volumen de polarización $\rho_{pol} = -\nabla \cdot \bar{P} = -\nabla \cdot \left(D \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$

$$= -\rho_L \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} = 0$$

pues NO hay carga libre distribuida en volumen.

Para averiguar la carga en superficie de pol $\sigma_p = \bar{P} \cdot \hat{n}_{ext}$ sobre la superficie del dieléctrico, como $\bar{P} \parallel \bar{E} \parallel \hat{r} \parallel \hat{n}_{ext}$ $\Rightarrow$ tendremos σ_p sobre $r=a$ y $r=b$. El valor lo determinamos más adelante una vez que CONOCEMOS $\bar{E}$.

Las fuentes de $\bar{D}$ están dadas por

$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho_L$ ← CARGA LIBRE

$\bar{\nabla} \times \bar{D} = \nabla \times \bar{P}$ → $\nabla \times P$ en volumen
→ $P \times \hat{n}$ en superficie.

La carga libre se encuentra en $r=b$ (σ CONOCIDA) y $r=a$ (σ_c, sobre el CONDUCTOR, todavía desconocida)

Además como $\nabla\times\bar{P} = \nabla\times(\varepsilon-\varepsilon_0)\bar{E}) = (\varepsilon-\varepsilon_0)\underbrace{\nabla\times\bar{E}}_{=0} = 0$ ②

Por ser un material L.I.H. con ε uniforme.

también en superficie $\bar{P}\times\hat{n}_{ext} = 0$ pue $P \parallel E \parallel \hat{r} \parallel \hat{n}_{ext}$.

Osea q' solo las cargas libres son las fuentes de $\bar{D}$.

b.

Debido a que conozco + cargas libres que de polarización voy a empezar con el cálculo de $\bar{D}$. Sin embargo hay que ~~notar~~ que todavía no conozco la carga Q_c del conductor conectado a la batería por lo cual hasta su determinación lo dejaré expresado.

Como todo el sistema tiene SIMETRIA ESFÉRICA ya sí que tanto $\bar{D}$ con $\bar{E}$ serán radiales y dependerán solo de r, así $\bar{D} = D(r)\hat{r}$, $\bar{E} = E(r)\hat{r}$.

Como $\nabla\cdot\bar{D} = \rho_L$ puedo aplicar una ley de gauss

$\oint \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q_{L\,encerrada}$; haciendo esto uno encuentra

$$D(r)\underbrace{4\pi r^2}_{Area} = Q_L(r)$$

↑ encerrada en un radio r

$$\Rightarrow D(r) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{Q_c}{4\pi r^2} & a<r<b \\ \dfrac{Q_c + 4\pi b^2\sigma}{4\pi r^2} & r>b \end{cases}$$

donde en $r<a$ $D=0$ pues no hay carga (es un conductor Ideal)

y en $r>b$ incluí la carga de la esfera con σ, $Q_\sigma = 4\pi b^2\sigma$

a partir de $\bar{D}$ el $\bar{E}$ se escribe directamente con $\frac{\bar{D}}{\varepsilon}$ donde hay dieléctrico y $\frac{\bar{D}}{\varepsilon_0}$ donde no. (3)

$$\bar{E} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} & a<r<b \\ \dfrac{Q_c+Q_\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r>b \end{cases}$$

todavía me falta determinar la carga del conductor en función de los datos del problema, para esto usaré que $V(r=a)=V_0$ es el de la batería. La manera más directa es calcular la variación de potencial desde ∞ (que tomo $V=0$) hasta $r=a$. Así

$$\bar{E} = -\nabla V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\int_\infty^a dV = -\int_\infty^a E\,dr$$

$$V_0 = V(a) = -\int_\infty^b \frac{Q_c+Q_\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_b^a \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon r^2}dr$$

$$= \frac{Q_c+Q_\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\cancel{\frac{1}{\infty}}\right) + \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$V_0 = \frac{Q_c}{4\pi}\left[\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\varepsilon a}\right] + \frac{Q_\sigma}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{Q_c = \left(V_0 - \frac{Q_\sigma}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)\frac{4\pi}{\left[\frac{1}{\varepsilon}(1/a-1/b)+1/(\varepsilon_0 b)\right]}}$$

Así tanto $\bar{D}(n)$ como $\bar{E}(n)$ quedan en términos de los datos.

Otra manera análoga para obtener Q_c es escribir explícitamente el potencial electrostático $V(n)$ en cada una de las zonas y empalmarlo x continuidad en $n=a$ y $n=b$. Ambos resultados son equivalentes.

c – Como mencionamos en a) las cargas de polarización están solamente en las superficies externas del dieléctrico ($n=a$, y $n=b$).

en $n=a$; $\sigma_p^a = \sigma_p(n=a) = \bar{P}\Big|_{n=a^+} \cdot (-\hat{n}) = (\varepsilon-\varepsilon_0)\,\bar{E}(a^+)(-\hat{n})$

Normal exterior $= -\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\,Q_c}{4\pi\varepsilon\, a^2}$

(opuesta a Q_c)

en $n=b$; $\sigma_p^b = \sigma_p(n=b) = \bar{P}\Big|_{n=b^-} \cdot \hat{n} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\,\bar{E}(n=b^-)\cdot\hat{n}$

$$= (\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon\, b^2}$$

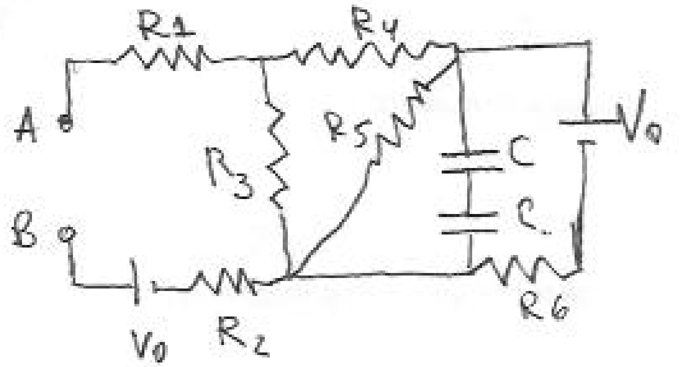
Como verificación vemos que

$$Q_{pol\ total} = 0 = \sigma_p^a\, 4\pi a^2 + \sigma_p^b\, 4\pi b^2 .$$

Si $Q_c = 0 \Rightarrow \quad V_0 - \dfrac{Q_\sigma}{4\pi b\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{V_0 = \dfrac{Q_\sigma}{4\pi b\varepsilon_0}}$

en este caso $\sigma_p^{a,b} = 0$ como era de esperarse ya que si el conductor no se carga no hay campo eléctrico dentro del cascarón σ que polarice el dieléctrico. Noten que esto corresponde a cuando el cascarón sólo levanta un potencial V_0 en su interior y por lo tanto la batería no debe cargar el conductor.

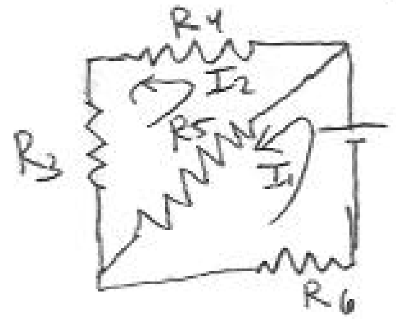
Problema 3



a- PARA calcular la energía almacenada en los CAPACITORES primero debo calcular la caida de tension.

Como el circuito se encuentra en un RÉGIMEN DE CORRIENTE CONTINUA no circula corriente por la rama de los capacitores. TAMPOCO circula corriente x las ramas de R_1 y R_2 x estar abiertas

Así para determinar la caida de tensión solo tengo q' resolver el circuito, y encontrar la caida en R_5



. USANDO el Método de las corrientes de Mallas tengo

$$V_0 - I_1 (R_6 + R_5) + I_2 R_5 = 0$$

$$-I_2 (R_5 + R_4 + R_3) + I_1 R_5 = 0$$

o sea

$$V_0 = I_1 4R - I_2 2R$$

$$I_2 \cancel{10}^{5} \cancel{R} = I_1 \cancel{2} \cancel{R} \qquad \boxed{I_1 = 5 I_2}$$

$$V_0 = 5 I_2 \cdot 4R - I_2 2R = 18 R I_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{I_2 = \frac{V_0}{18R}}$$

$$I_1 = \frac{5}{18} \frac{V_0}{R}$$

Así la corriente neta sobre R_5 es

$$\boxed{i_{R_5} = I_1 - I_2 = \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{18}\right) \frac{V_0}{R} = \frac{4}{18} \frac{V_0}{R} = \frac{2}{9} \frac{V_0}{R}}$$

con lo cual la caída de tensión es

$$\Delta V = i_{R5} R_5 = \frac{2}{9}\frac{V_0}{R} \cdot 2R = \boxed{\frac{4}{9} V_0}$$

La energía total almacenada en los capacitores será

$U = \frac{1}{2} C_{eq} (\Delta V)^2$ donde C_{eq} es el capacitor serie equivalente $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C}$

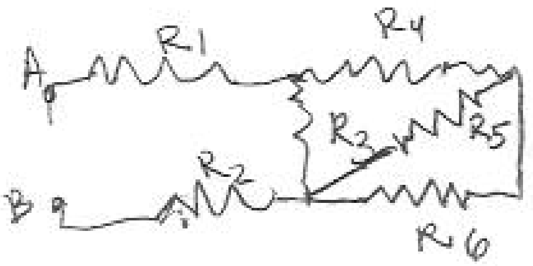
$\Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{C}{2}}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 V_0^2$$

$$\boxed{U = C \frac{4}{81} V_0^2}$$

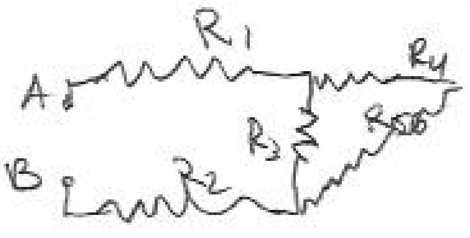
b- Para encontrar la caída de tensión que mide un voltímetro voy a usar el equivalente de Thevenin entre A y B pues ya tengo resuelto del pto anterior el circuito..

1º Encuentro la resistencia equivalente, para lo cual cortocircuito todas las fuentes y elimino la rama con los capacitores.

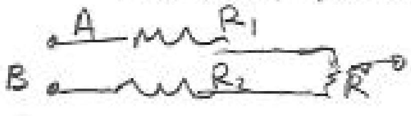


del dibujo vemos que R_5 y R_6 están en paralelo, cuyo valor es $\frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \Rightarrow$

$R_{56} = R$



ahora R_{56} está en serie con R_4, y estos en paralelo con R_3

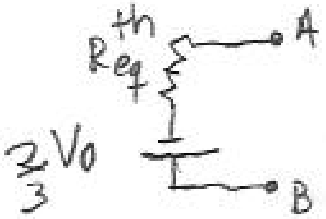


$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\underbrace{2R}_{serie}} = \frac{1}{2R}$

⇒ $R' = 2R$, con esto me quedo finalmente $\boxed{R_{eq}^{th} = 4R}$

La E_{eq} lo calculo de las caidas de tension ANTERIORES (3)

$$V_A - V_B = -V_0 + I_2 \cdot R_3 = -V_0 + \cancel{6}R \cdot \frac{V_0}{\frac{\cancel{18}R}{3}} = -\frac{2}{3} V_0$$



Entonces con este equivalente, le conecto el voltímetro.

$$i = \frac{2}{3}\frac{V_0}{(R_{eq}^{th}+r)}$$

$$V_r = \frac{2}{3}\frac{V_0}{(R_{eq}^{th}+r)} \cdot r$$

$$\boxed{\text{Voltaje Voltímetro} = \frac{2 V_0 r}{3(4R+r)}}$$

Este inciso se podía resolver también planteando las corrientes de Mallas para el nuevo circuito con el voltímetro colocado y sin hacer uso de thevenin. Pero sería bastante + cuentoso.

c. Mientras el voltímetro está conectado yo se que por el circula una corriente $i = \frac{2V_0}{3(4R+r)}$ calculada en el punto ANTERIOR. Por lo tanto la caida de tensión sobre R_3 lo puedo calcular directamente haciendo un circuito entre sus extremos que pase x el voltímetro

$$V_C - V_D = -R_2 i + V_0 - i r - i R_1$$

$$= -(R_1 + R_2 + r)\, i + V_0$$

$$V_C - V_D = -\frac{2}{3}\,\frac{V_0\,(2R+r)}{(4R+r)} + V_0$$

$$= \frac{V_0}{3(4R+r)}\left[-2(2R+r) + 3(4R+r)\right]$$

$$V_c - V_0 = \frac{+V_0\,[8R+r]}{3\,(4R+r)}$$

De esto diferencia de tension la corriente sobre R_3 se obtiene directamente como

$$\boxed{i_{R_3} = \frac{V_c - V_D}{R_3} = \frac{V_0\,[8R+r]}{18R(4R+r)}}$$