

## ■ Función de Green para el problema de Dirichlet interior a dos esferas concéntricas conectadas a tierra.

Los parámetros son "a" para el radio menor, "b" para el radio mayor y la carga puntual unitaria está ubicada en  $r=d$

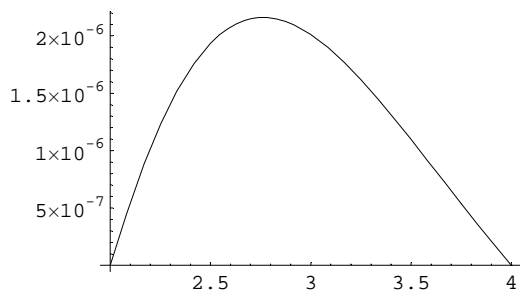
$$\begin{aligned} \text{Par} &= \{a \rightarrow 2, b \rightarrow 4, d \rightarrow 3.5\}; \\ x &= \frac{b}{a}; \\ A &= \frac{a}{d}; \\ B &= \frac{b}{d}; \end{aligned}$$

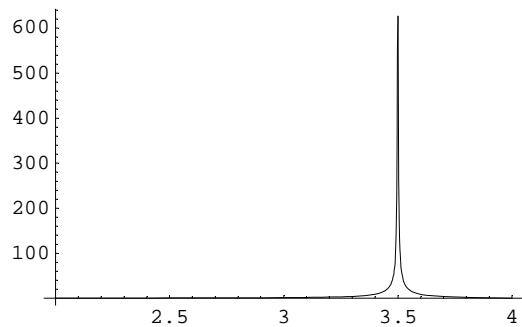
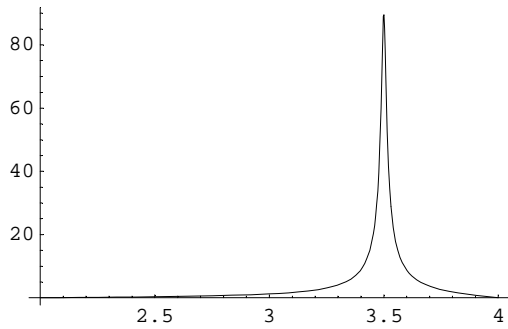
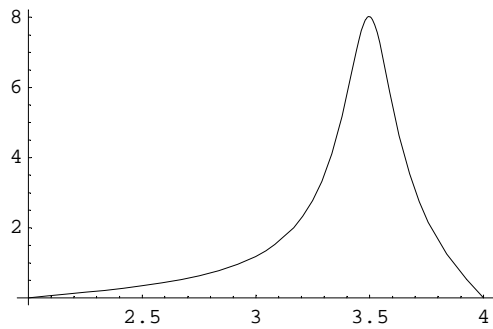
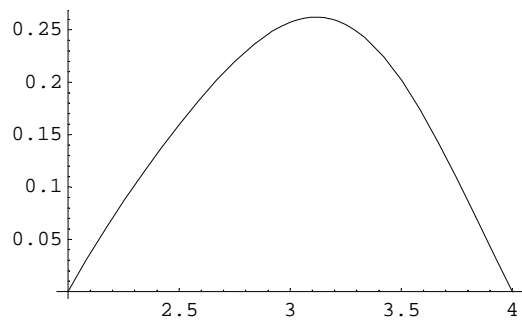
Escribo la función de Green tomando 30 términos del desarrollo en serie...

$$\begin{aligned} f[r, \alpha] := & \text{Sum} \left[ \frac{1}{x^i} \left( \frac{1}{\sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{d}{x^{2i}}\right)^2 - \frac{2rd}{x^{2i}} \cos[\alpha]\right)}} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{A}{\sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{A^2 d}{x^{2i}}\right)^2 - \frac{2r d A^2}{x^{2i}} \cos[\alpha]\right)}} + \right. \right. \\ & \left. \left. x^i \left( \frac{1}{\sqrt{\left(r^2 + (x^{2i} d)^2 - 2 r d x^{2i} \cos[\alpha]\right)}} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{B}{\sqrt{\left(r^2 + (B^2 x^{2i} d)^2 - 2 r d x^{2i} B^2 \cos[\alpha]\right)}} \right) \right] /. \text{Par}; \\ & \left. \text{Par}, \{i, 0, 30\} \right] - \frac{1}{\sqrt{\left(r^2 + d^2 - 2 r d \cos[\alpha]\right)}} /. \text{Par}; \end{aligned}$$

Grafico la función barriendo ángulos de la forma  $\pi/10^n$ . A medida que n tiende a infinito nos acercamos a la posición angular de la carga puntual (observar el comportamiento en la vecindad de  $r=3.5$  que es la ubicación de la carga real...)

```
Table[Plot[f[r, π / (10^n)], {r, 2, 4}, PlotRange -> All], {n, 0, 4}]
```

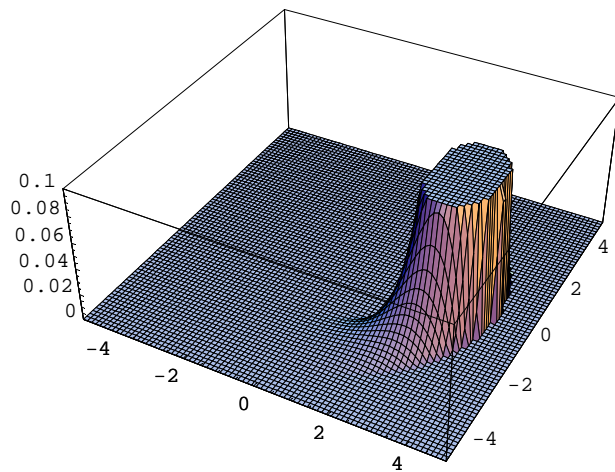
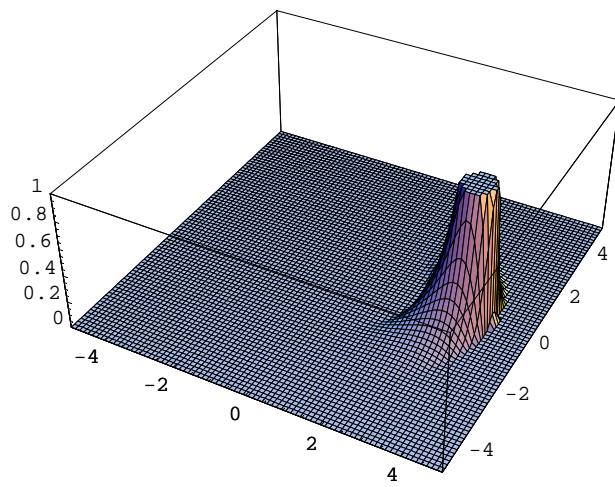
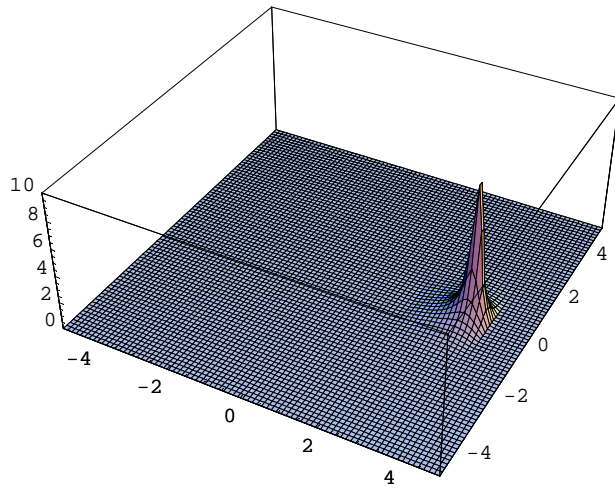


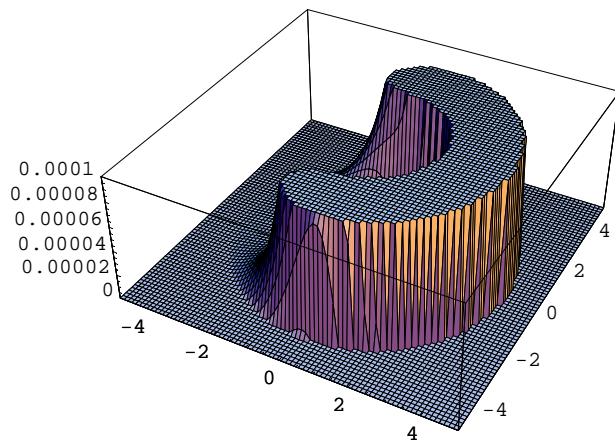
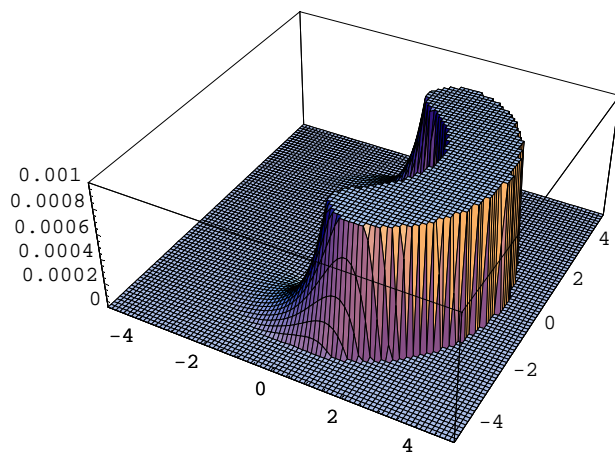
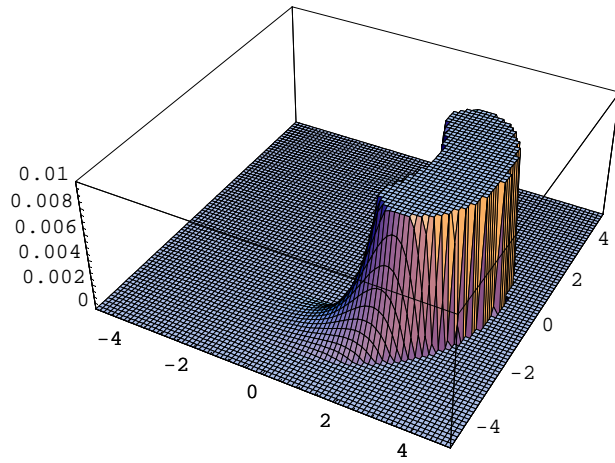


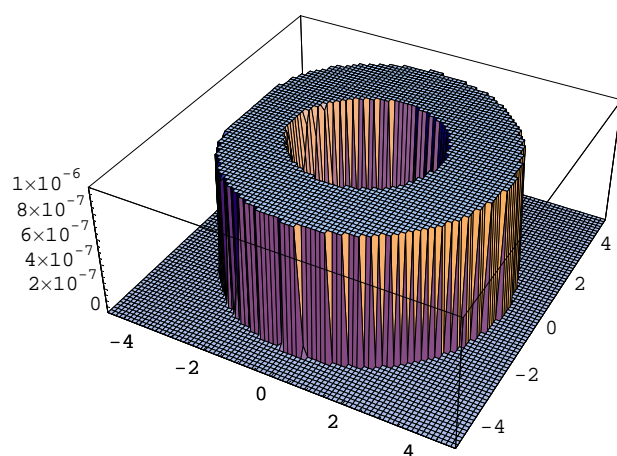
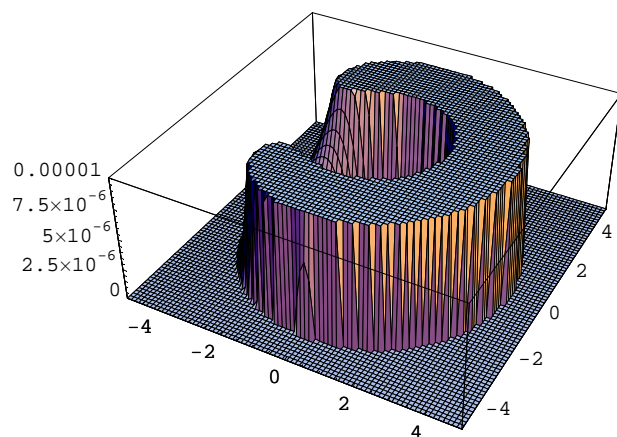
```
{ - Graphics - , - Graphics - , - Graphics - , - Graphics - , - Graphics - }
```

Ahora graficamos la función de Green en una lista de gráficos tridimensionales para ver su variación característica a distintas escalas. Observar que la condición de contorno solo se pone en evidencia a escalas pequeñas mientras que la presencia de la carga real aparece evidente cuando aumentamos la escala...

```
CartesianForm[u_, v_] = f[r,  $\alpha$ ] /. {r ->  $\sqrt{u^2 + v^2}$ , Cos[ $\alpha$ ] ->  $\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ };
Green[u_, v_] := If[(a /. Par) <  $\sqrt{u^2 + v^2}$  < (b /. Par), CartesianForm[u, v], 0];
Table[Plot3D[Green[u, v], {u, -5, 5}, {v, -5, 5},
  PlotPoints -> 80, PlotRange -> {0, 10^(-n)}], {n, -1, 6}];
```







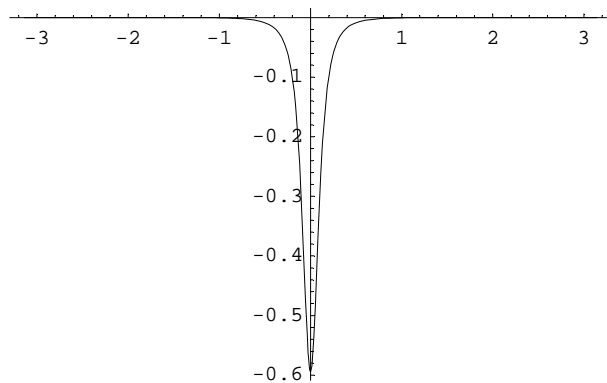
Ahora vemos un gráfico de contornos de la función de Green en escala logarítmica para eliminar las diferencias de variaciones características según la escala.

```
Green2[u_, v_] :=
  If[(a /. Par) <  $\sqrt{u^2 + v^2}$  < (b /. Par), Log[CartesianForm[u, v]], 0];
ContourPlot[Green2[u, v], {u, -5, 5}, {v, -5, 5},
  PlotPoints -> 80, ContourLines -> False];
```

## ■ Carga inducida en las superficies de las esferas:

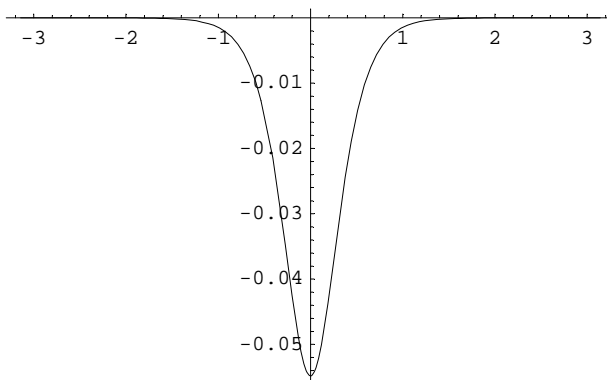
Sig<sub>ab</sub> y Sig<sub>aa</sub> son las cargas inducidas en las superficies de las esferas (observar que, como deben, ambas densidades son negativas)

```
Sigmab =  $\frac{1}{4\pi}$  D[f[r,  $\alpha$ ], r] /. {r  $\rightarrow$  (b /. Par)};  
Plot[Sigmab, { $\alpha$ , - $\pi$ ,  $\pi$ }, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```



- Graphics -

```
Sigmaa = - $\frac{1}{4\pi}$  D[f[r,  $\alpha$ ], r] /. {r  $\rightarrow$  (a /. Par)};  
Plot[Sigmaa, { $\alpha$ , - $\pi$ ,  $\pi$ }, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```



- Graphics -