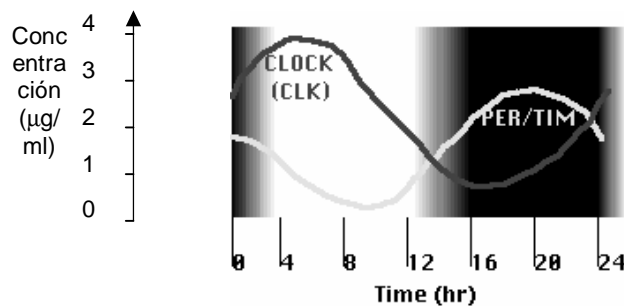


## Guía 3: Movimiento Oscilatorio

### I - Cinemática del movimiento oscilatorio

- El desplazamiento de un objeto está determinado por la ecuación  $y(t) = 3\text{cm} \sin(20\pi/s t)$ . Grafique  $y$  en función del tiempo y señale la amplitud y el periodo de las oscilaciones.
- La coordenada de un objeto viene dada por  $(0.057\text{m}) \cos[(3.9/s)t]$ .
  - ¿Cuánto valen la amplitud  $A$ , la frecuencia angular  $\omega$ , la frecuencia  $f$ , el período  $T$  y la fase  $\phi$ ?
  - Escriba las expresiones para la velocidad  $v$  y la aceleración  $a$  del cuerpo.
  - Determine  $y$ ,  $v$  y  $a$  en  $t=0.25$  segundos.
- Un objeto que tiene un movimiento armónico simple tiene su máximo desplazamiento  $0,2$  m en  $t = 0$ . Su frecuencia es de  $8$  Hz.
  - Hallar los instantes en que las elongaciones son por primera vez  $0,1$  m;  $0$  m;  $-0,1$ m;  $-0,2$ m
  - Halle las velocidades en dichos instantes.
- Un objeto describe un movimiento armónico simple con una amplitud  $A = 63$  mm y una frecuencia  $\omega = 4.1$  1/s. Considere  $t=0$  cuando el objeto pasa por el punto medio del recorrido.
  - Escriba las expresiones para  $x$ ,  $v$ ,  $a$ .
  - Determine  $x$ ,  $v$  y  $a$  para  $t=1.7$  segundos.
- Un objeto oscila con frecuencia  $10$  Hz y tiene una velocidad máxima de  $3$  m/s. ¿Cuál es la amplitud del movimiento?
- ¿Para qué desplazamiento de un objeto en un movimiento armónico simple es máximo el módulo de
  - La velocidad.
  - La aceleración.
- En biología encontramos fenómenos oscilatorios por todos lados (ritmos circadianos, actividad cardiaca, crecimiento estacional, actividad neuronal rítmica, etc, etc). En gran parte de los casos, la variable que sigue un comportamiento oscilatorio no es la posición de un objeto sino de algún otro tipo (concentración de proteínas, flujo, tamaño, voltaje, etc). Asimismo, difícilmente las variables sigan funciones sinusoidales puras.

El siguiente gráfico muestra la fluctuación en las concentraciones de las proteínas PER/TIM y CLOCK en el transcurso de un día en células de la mosca *Drosophila melanogaster*. Estas proteínas controlan el ritmo circadiano de la mosca. Hay una tercera oscilación en la figura: la luminosidad (en tonos de gris). ¿Cuál es el período de cada oscilación? ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones de concentración? ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos curvas? Exprese las diferencias en horas, en radianes y en grados, considerando que el período corresponde a  $2\pi$ .



## II - Dinámica del movimiento oscilatorio

- 8) Un cuerpo está apoyado sobre una mesa, unido a un resorte de constante  $k=500 \text{ N/m}$  y largo natural  $10 \text{ cm}$  (el otro extremo del resorte está fijo a la pared). Si el cuerpo se desplaza una distancia  $2 \text{ cm}$  de su posición de equilibrio, comprimiendo al resorte, y se lo suelta, oscila con un período de  $0,63 \text{ s}$ .
- Haga el diagrama de cuerpo libre y halle la ecuación del movimiento a partir de la 2ª Ley de Newton.
  - Determine el valor de la masa en función de los datos.
  - Escriba las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Resp. b)  $5 \text{ kg}$     c)  $x = -2 \text{ cm} \cos(10t/s) + 10 \text{ cm};$   
 $v = 20 \text{ cm/s} \sin(10t/s); a = 200 \text{ cm/s}^2 \cos(10t/s)$

- 9) La frecuencia con la que oscila un cuerpo unido al extremo de un resorte es  $5 \text{ Hz}$  ¿Cuál es la aceleración del cuerpo cuando el desplazamiento es  $15 \text{ cm}$ ?

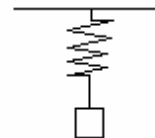
Resp:  $148 \text{ m/s}^2$

- 10) Para estirar  $5 \text{ cm}$  un resorte horizontal es necesario aplicarle una fuerza de  $40 \text{ N}$ . Uno de los extremos de este resorte está fijo a una pared mientras que en el otro hay un cuerpo de  $2 \text{ kg}$ . La masa del resorte es despreciable. Si se estira el resorte  $10 \text{ cm}$  a partir de su posición de equilibrio y se lo suelta:
- ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia del movimiento? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer una oscilación completa?
  - Obtenga la expresión de posición en función del tiempo y gráfiquela señalando la posición de equilibrio.
  - Calcule la posición, la velocidad y la aceleración al cabo de  $0,2 \text{ seg}$ . Describa cualitativamente en que etapa del movimiento oscilatorio está.

Resp: a)  $A=10 \text{ cm}; \omega=20 \text{ 1/seg}; T=0.314 \text{ seg}.$   
 b) con  $x_{\text{eq}}=0; x(t)=10 \text{ cm} \cos(20 t/\text{seg})$   
 c) en  $t=0.2 \text{ s}; x=9.98 \text{ cm}; v=-13.95 \text{ cm/s}; a=39.90 \text{ m/s}^2$

- 11) Un cuerpo de masa  $800 \text{ g}$  está suspendido de un resorte de longitud natural  $15 \text{ cm}$  y constante elástica  $K=320 \text{ N/m}$ , que se encuentra colgado del techo.

- Halle la posición de equilibrio.
- Si se desplaza al cuerpo  $1,5 \text{ cm}$  hacia abajo a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle su posición en función del tiempo.



Resp: a)  $17,5 \text{ cm}$  del techo

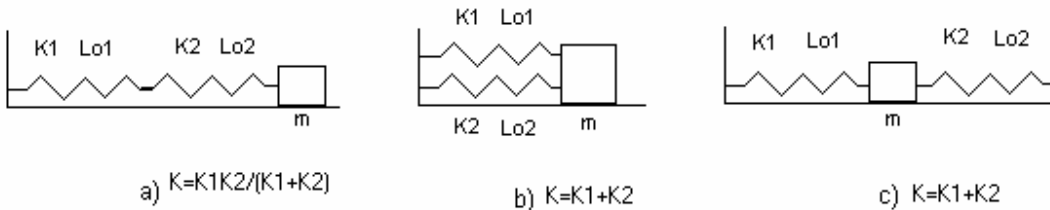
- 12) Usando los órganos sensoriales de sus patas, las arañas detectan las vibraciones de sus telas cuando una presa queda atrapada.
- Si al quedar atrapado un insecto de  $1 \text{ gr}$  la tela vibra a  $15 \text{ Hz}$ , ¿cuál es la constante elástica de la tela?
  - ¿Cuál sería la frecuencia cuando queda capturado un insecto de  $4 \text{ gr}$ ?

Resp: a)  $8,9 \text{ N/m}$     b)  $7,5 \text{ Hz}$

- 13) Cuando una persona de 80 Kg sube a su coche, los amortiguadores se comprimen 2 cm. Si la masa total que soportan es de 900 kg (incluidos auto y pasajero),  
 a) Calcule la constante elástica de los amortiguadores  
 b) Halle la frecuencia de oscilación.

Resp: a) 40000 N/m b) 1,06 Hz

- 14) Un cuerpo de masa  $m$  está unido a resortes de constante  $k_1$  y  $k_2$  como se indica en cada uno de los siguientes casos. Demuestre que las mismas situaciones se pueden representar por un único resorte de cte. elástica  $K$  tal que



Se puede ver que para  $N$  resortes iguales de constante elástica  $K$ , su equivalente es  $K_{eq} = K/N$  si se colocan en serie, y  $K_{eq} = K \cdot N$  si se colocan en paralelo

- 15) Demuestre que el período de oscilación de un péndulo es  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  (pequeñas oscilaciones), donde  $L$  es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

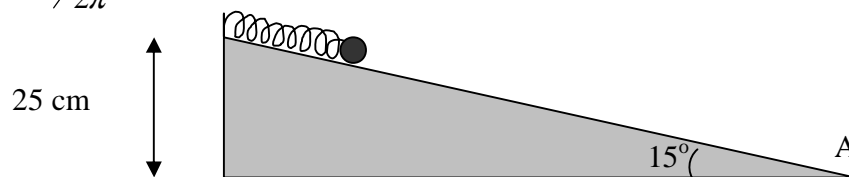
- 16) La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de  $T = 3,00$  segundos en un lugar en donde  $g = 9,803 \text{ m/s}^2$  y un período de  $T = 3.0024$  segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de  $g$  este último lugar?

Resp:  $9,787 \text{ m/s}^2$

- 17) Escriba la ecuación diferencial para pequeñas oscilaciones de un péndulo. Demuestre que su período de oscilación es  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ , donde  $L$  es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

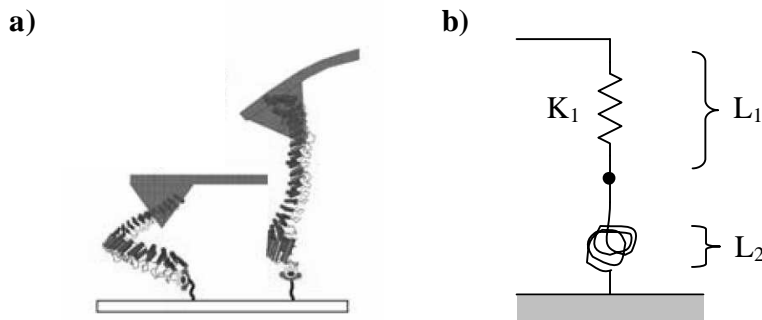
- 18) Se tiene un resorte (constante elástica  $k=1000 \text{ N/m}$  y longitud natural  $l_0 = 15 \text{ cm}$ ) apoyado sobre el plano inclinado de la figura.

- a) Calcule el largo que toma el resorte si sostiene un cuerpo de masa  $m=10 \text{ kg}$  en equilibrio.  
 b) En el caso de soltarse el cuerpo desde el largo natural del resorte, éste realizará un movimiento oscilatorio armónico. Calcule el máximo acercamiento al punto A.  
 c) A partir de las ecuaciones de dinámica del mov. oscilatorio justifique que la frecuencia de oscilación es  $f = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$  y calcule la velocidad máxima que alcanza el cuerpo.



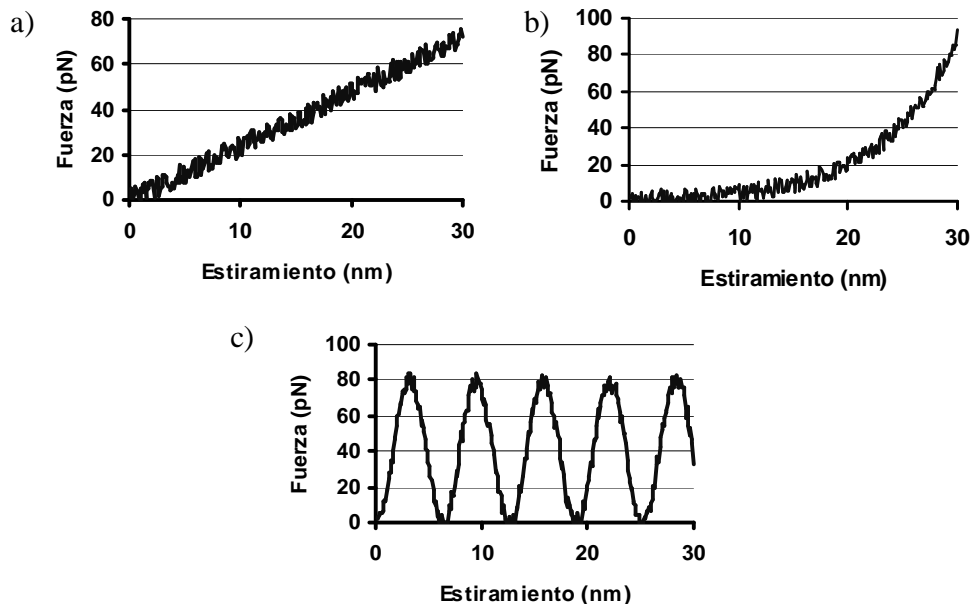
Respuestas: a) 17,6 b) 76,4cm c)  $w=10$  1/s y  $v_{\text{máx}}=2,6$  cm/s

- 19) El periodo de oscilación de un péndulo es una función de los parámetros que caracterizan al sistema en cuestión y también, en principio, de las condiciones iniciales. Existe un tipo de argumento, bien general, que permite encontrar la dependencia funcional de una magnitud característica de la evolución de un sistema, como puede ser el período de oscilación, a partir de la consideración de las dimensiones (el tipo de unidades) que debe tener dicha magnitud.
- Ante todo, enumere las  $n$  variables  $v_i$  ( $i=1,\dots,n$ ) de las que, en principio, podría depender el período de un péndulo, sin tener en cuenta las unidades.
  - Dejemos momentáneamente de lado las condiciones iniciales, restringiendo el análisis al resto de los parámetros que determinan el sistema. El periodo dependerá de estos últimos de alguna forma desconocida, pero con la restricción de que esta combinación debe ser tal que posea dimensiones de tiempo. Piense un rato y vea que es razonable concluir la necesidad de una relación de la forma  $T = \beta \cdot v_1^{a_1} \cdot v_2^{a_2} \dots v_n^{a_n}$ , donde  $\beta$  es una constante adimensional de proporcionalidad y las  $a_1, \dots, a_n$  son potencias a determinar. Recordar que entonces debe valer  $[T] = [v_1]^{a_1} \cdot [v_2]^{a_2} \dots [v_n]^{a_n}$ , con  $[T] = \text{seg}$ ,  $[m] = \text{kg}$ , etc. Encontrar las potencias  $a_1, \dots, a_n$  y comparar el resultado con el del ejercicio 8.
  - Así, omitiendo la dependencia de las condiciones iniciales se recupera un resultado que se sabía válido bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones. Esto es esperable. Consideremos como única condición inicial relevante, por simplicidad, el ángulo  $\theta_0$  de apartamiento inicial medido desde el punto de equilibrio (aunque el argumento puede extenderse si se tiene en cuenta una versión adimensionalizada de la velocidad inicial). [Observación:  $\theta_0$  es adimensional] Piense otro rato y convéncese de que la incorporación de  $\theta_0$  como variable implica hacer que la constante de proporcionalidad  $\beta$  se convierta en una función de  $\theta_0$ . ¿Por qué? Si  $\theta_0$  es pequeño, la función  $\beta$  puede aproximarse por su polinomio de Taylor hasta orden dos:  $\beta \approx \beta|_{\theta_0=0} + \beta'|_{\theta_0=0} \cdot \theta_0 + \beta''|_{\theta_0=0} \cdot \frac{\theta_0^2}{2}$ . Sin embargo, por la simetría del problema frente a una reflexión alrededor del eje vertical que pasa por el punto de equilibrio, la función  $\beta$  debe ser invariante frente al cambio  $\theta_0 \rightarrow -\theta_0$ . Siga pensando, y note que ello implica que el término lineal del desarrollo de Taylor debe tener un coeficiente  $\beta'|_{\theta_0=0}$  nulo. ¿Por qué? Así, hemos demostrado que la dependencia con las condiciones iniciales tiene un efecto recién a segundo orden en un desarrollo de la constante  $\beta$ .
- 20) La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de  $T = 3,00$  segundos en un lugar en donde  $g = 9,803$  m/s<sup>2</sup> y un período de  $T = 3.0024$  segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de  $g$  en este último lugar?
- 21) En la *Microscopía de Fuerza Atómica*, una punta de prueba se utiliza para explorar superficies con resolución nanométrica. En una de las aplicaciones de esta técnica, a la superficie se unen previamente copias de alguna biomolécula de la cual se quiera investigar el detalle de sus propiedades físicas como ser resistencia a la tensión, elasticidad y estructura. Se busca en cada experimento pegar con la punta de prueba un extremo de una biomolécula única (el otro permanece adherido a la superficie). Al retraer la punta hacia arriba, la biomolécula comienza a estirarse y ejerce una fuerza hacia abajo sobre la punta (Fig 1a). La punta de prueba se comporta como un resorte del cual el experimentador conoce la constante elástica ( $K_1$ ) y puede medir en cada instante su elongación ( $L_1$ ) y la de la biomolécula ( $L_2$ ) (Fig 1b).



**Figura 1. a)** La caricatura muestra cuando la punta de prueba toca una molécula de proteína (izq) y la estira (der). La punta se deforma elásticamente por la fuerza realizada por la molécula al estirarse. **b)** En el modelo, el resorte representa a la punta de prueba y el ovillo a la biomolécula de interés.  $L_1$  y  $L_2$  son nulos cuando la punta de prueba o la proteína, respectivamente, tienen su longitud natural.

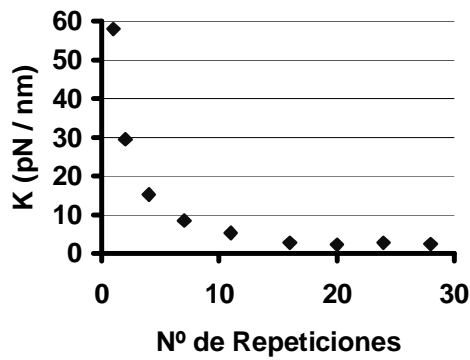
- i. ¿Cómo se calcula con este sistema la fuerza que ejerce la biomolécula en función de su estiramiento?
- ii. En un trabajo publicado en la revista Nature en marzo de 2006, el grupo de Piotr Marszalek de la Universidad de Duke estudia las propiedades elásticas de una proteína con dominios estructurales de ankirina. Los investigadores descubrieron que la proteína misma se comporta en ciertas condiciones como un resorte de dimensiones nanométricas. La figura 2 muestra mediciones de microscopía de fuerza atómica obtenidas para tres proteínas distintas. Se grafica la fuerza que ejerce la proteína en función de su estiramiento.



**Figura 2.**

¿Cuál de estos gráficos se correspondería con la proteína estudiada por Marszalek? Justifique. Averigüe aproximadamente su constante elástica.

- iii. Si se construye una serie de proteínas con distinto número de repeticiones de ankirina y se mide su constante elástica se obtiene un gráfico como el de la figura 3.

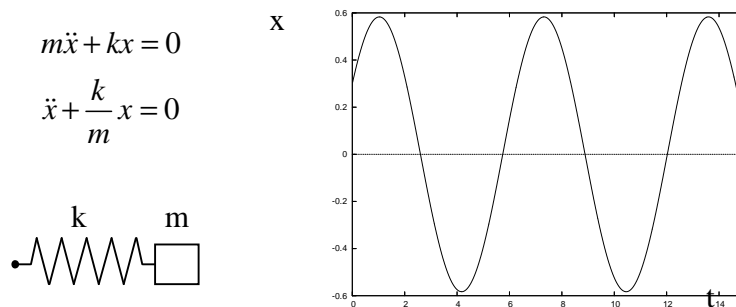


- ¿Cómo interpreta este resultado? (Pista: repase el problema 14).
- ¿Más o menos cuántas repeticiones de ankirina tiene la proteína estudiada por Piotr?

### III - Movimiento oscilatorio amortiguado

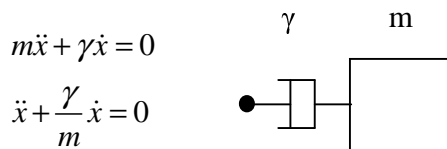
22) Para una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza  $\bar{F}$ , las dinámicas posibles en un espacio acotado se reducen a movimientos oscilatorios o bien a la convergencia a un punto de equilibrio.

El primer caso se modela paradigmáticamente como un oscilador caracterizado por una fuerza proporcional al desplazamiento respecto del equilibrio, con una constante elástica  $k$ . En una dimensión, la ecuación a resolver es:



- Escriba la solución general  $x(t)$  y encuentre que la frecuencia de oscilaciones es de  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .
- Encuentre la trayectoria que describe un oscilador que se mueve después de soltarlo (con velocidad nula) tras aplicarle un desplazamiento inicial de 1m.
- ¿Todas las condiciones iniciales devienen en soluciones oscilatorias?

El segundo caso se modela proponiendo una disipación lineal  $\gamma$ . En este caso, la ecuación resulta



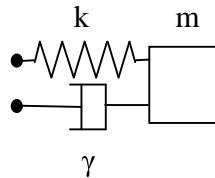
- d) Escriba la solución general de esta ecuación diferencial y caracterice su comportamiento.  
 e) ¿La partícula se detiene totalmente en algún momento?

El caso más genérico se construye con un oscilador amortiguado, que se describe mediante la ecuación

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$



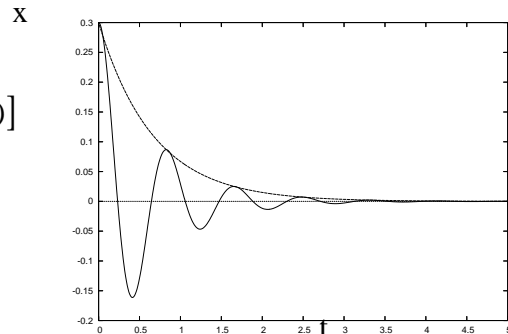
Aquí los dos efectos (restitución y disipación) compiten. Las formas de las soluciones en este caso dependen de ciertas relaciones entre los parámetros  $m$ ,  $k$ , y  $\gamma$ . El resultado de las combinaciones de parámetros resulta en dos tipos de movimiento, caracterizados por *oscilaciones subamortiguadas*, o *decaimientos sobreamortiguados*. En todos los casos, la disipación hará decaer asintóticamente la solución a un equilibrio, alrededor del cual el sistema puede oscilar o decaer sin oscilaciones.

- En el rango  $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 < \omega_0^2$  domina el término inercial (de masa) y las soluciones presentan oscilaciones amortiguadas

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_{am}t + \phi)$$

$$v(t) = -Ae^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega_{am}t + \phi) + \omega_{am} \sin(\omega_{am}t + \phi)]$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\gamma}{2m} \\ \omega_{am}^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 \end{cases}$$



- f) Compare la frecuencia de oscilación para este caso con la del oscilador no amortiguado. Interprete.  
 g) Verifique que las constantes  $A$  y  $B$  para un movimiento de condiciones iniciales  $x(0)=x_0$  y  $v(0)=0$  son

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\lambda}{\omega_{am}}\right) \text{ y } A = \frac{x(0)}{\cos(\phi)}$$

- h) Encuentre el tiempo  $\tau$  para el que la amplitud de oscilaciones cae a  $e^{-1}$  veces su valor inicial. A pesar de que el sistema oscilará indefinidamente, este tiempo puede considerarse un estimador del tiempo en que el sistema se mueve en un rango "del orden" de la amplitud inicial.

Estime el número de oscilaciones que el sistema despliega hasta ese tiempo (aproxime el tiempo de oscilación por  $T = 2\pi / \omega_0$ ). ¿En qué casos vale esa aproximación? Calcule para el caso

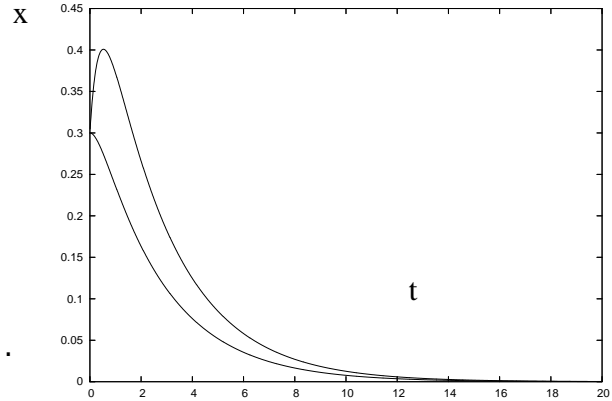
particular  $\frac{\gamma}{m} = \frac{\omega_0}{5}$ .

- Por otra parte, en el rango  $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 > \omega_0^2$  domina el término disipativo y las soluciones

no oscilan, sino que decaen al origen. Se trata de un movimiento *sobreamortiguado* cuya solución general se escribe como

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$



- i) Describa la solución cuando  $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 \gg \omega_0^2$ .

Interprete.

- j) En la figura se ven ejemplos de dos simulaciones numéricas con condiciones iniciales distintas. En una de ellas, el objeto se aleja primero y luego converge al equilibrio. ¿Es este movimiento posible?

**Cambio de escalas: dinámica en el mundo microscópico.**

- 23) \* El problema del oscilador amortiguado puede pensarse como un modelo simple para el movimiento de un cuerpo sumergido en un medio viscoso y ligado por una fuerza de restitución al equilibrio.

Los parámetros del problema son la masa  $m$ , la constante de restitución elástica  $k$  y la constante de disipación  $\gamma$ . Ahora trataremos de ver cómo cambia la dinámica cuando cambiamos la escala espacial del sistema. Dejamos entonces de considerar objetos puntuales y pensamos en una esfera de radio  $R$  sumergida en un fluido y sometida a una fuerza elástica.

Lo primero que nos preguntamos es por el cambio en los parámetros cuando comprimimos o dilatamos la escala del problema.

- Si consideramos objetos esféricos de densidad  $\rho$  y radio  $R$ , sus masas  $m$  estarán dadas por  $m = \rho V = \rho 4\pi/3 R^3$ . Es decir, la masa de un objeto esférico de densidad constante cambia con el cubo de su radio.
- Supongamos que los objetos estudiados están sumergidos en agua. El agua, como todos los fluidos, opone una fuerza al desplazamiento de los objetos. Cada fluido está caracterizado por una viscosidad  $\eta$ . El coeficiente de amortiguación  $\gamma$  del oscilador propuesto está relacionado con la viscosidad del medio en el que se lo sumerge según  $\gamma = 6\pi R\eta$ , llamada ley de Stokes. Para el agua  $\eta = 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ .

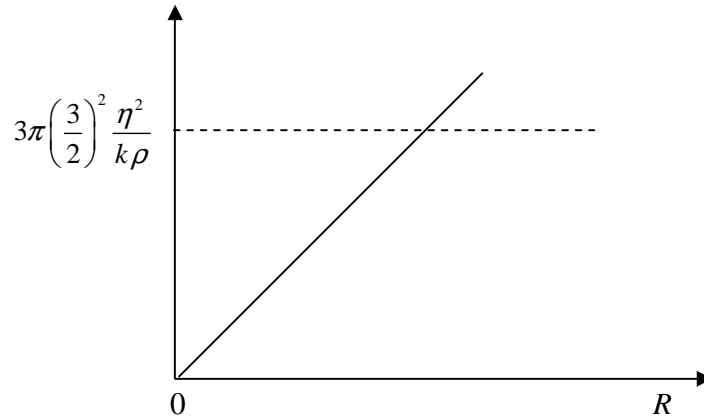
Según esta ley, el coeficiente de disipación  $\gamma$  es proporcional al radio  $R$  del objeto. En realidad, las cosas no son tan simples. Todos hemos comprobado la existencia de distintos regímenes



que puede mostrar un fluido en movimiento. Conforme abrimos el paso de agua de una canilla, por ejemplo, el flujo de agua, que al principio es laminar, se vuelve turbulento, desordenado (incluso, hasta cierto punto, impredecible). Fenómenos como éste cambian la fuerza que siente un objeto en movimiento sumergido en un fluido. Esto impone restricciones sobre los movimientos posibles que mantienen válida la ley de Stokes. Aquí nos restringimos a sistemas que la cumplen.

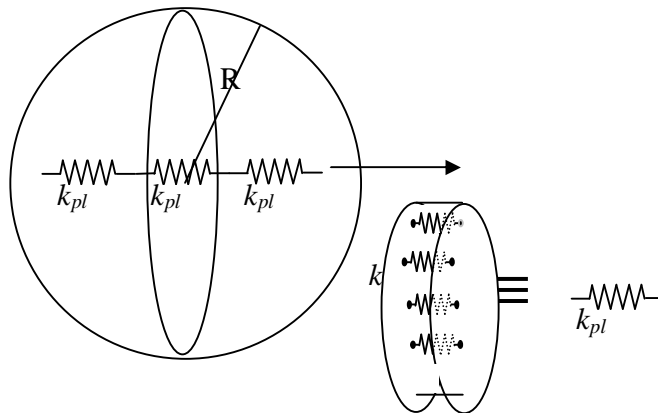
- Finalmente, supongamos que la constante elástica no cambia, es decir que  $k$  no depende de escalas espaciales.

a) Considerando estas hipótesis, encuentre las condiciones de movimiento *subamortiguado*<sup>(1)</sup> y *sobreamortiguado*<sup>(2)</sup> en función de  $R$ . Compare con la figura y describa la información que obtiene de ella.



b) Si en lugar de pensar en un objeto ligado a una fuerza restitutiva externa ahora consideramos que el objeto mismo tiene cierta elasticidad, entonces debemos considerar cómo cambia su constante elástica con la escala del problema. Supongamos que, a grandes rasgos, podemos la siguiente analogía con los resortes en serie y paralelo ya estudiados.

Vimos que si tiramos de  $N$  osciladores de constante  $k_{pl}$  conectados en serie, la constante efectiva del conjunto era  $k_{ef} = k_{pl} / N$ . Significa que la constante elástica *disminuye* con el *incremento* de osciladores en la dirección de elongación.



Sin embargo, en el objeto esférico, cada uno de los osciladores  $k_{pl}$  puede pensarse representando a un "plano" perpendicular a la dirección de estiramiento conformado por  $N^2$  osciladores en paralelo idénticos  $k$ ,

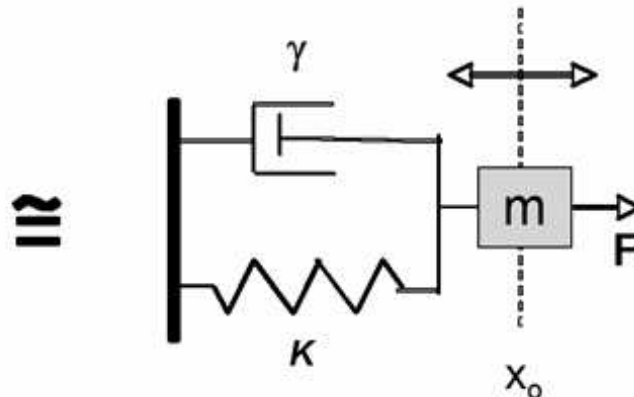
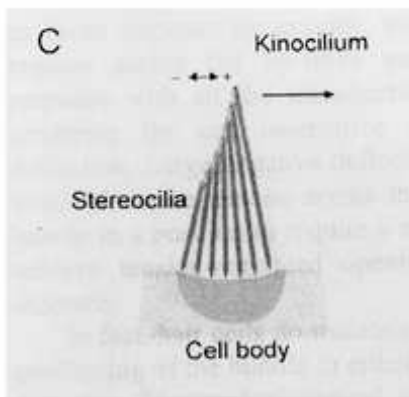
de manera que todo el plano funciona como un único oscilador de  $k_{pl} = kN^2$ . Considerando que la cantidad  $N$  de osciladores es proporcional al radio  $R$  de la esfera, tenemos que  $k_{ef} = kN^2/N = kN = \kappa R$ . En este caso la constante  $\kappa$  se llama *elasticidad*, y tiene unidades de presión,  $[\kappa] = Pa = N/m^2$ .

¿Cómo cambia la relación de *amortiguamiento crítico* encontrada antes? Encuentre el radio crítico  $R_c$  correspondiente a este comportamiento. Considere el caso de una proteína rígida de  $\kappa = 1GPa$ , densidad  $\rho = 10^3 kg/m^3$  en agua.

A modo de conclusión, podemos decir que a medida que las dimensiones de un sistema se contraen, las fuerzas viscosas aumentan respecto de las inertias de lo que resulta que el movimiento global de objetos pequeños, comparativamente elásticos (como las proteínas) sumergidos en una solución acuosa es típicamente *sobreamortiguado*, a diferencia de muchos de los fenómenos típicos a nuestra escala.

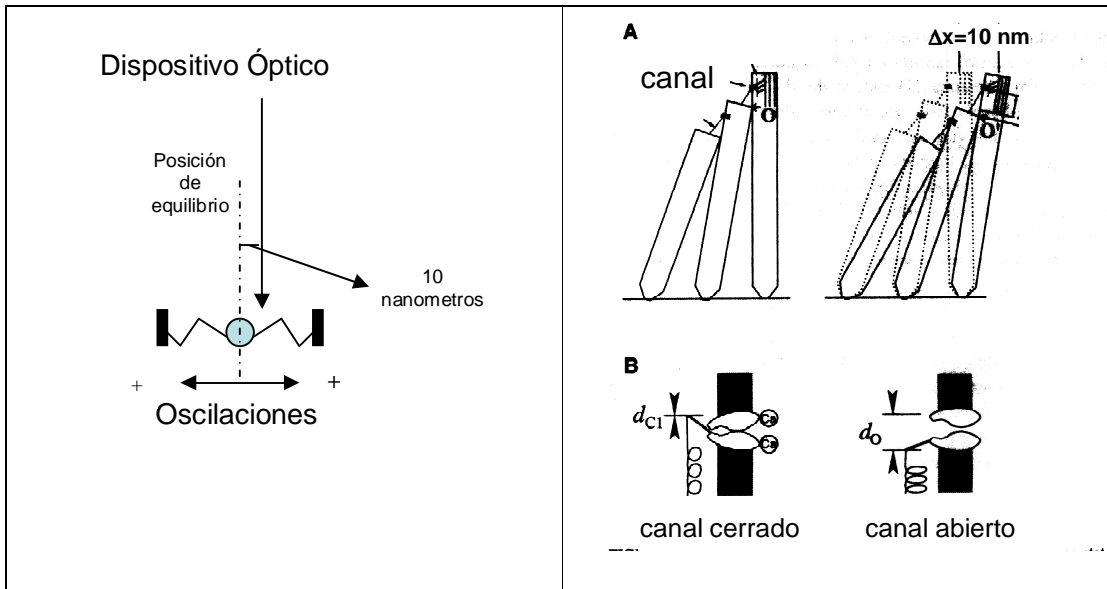
## Hair Cells

Las células sensoriales del oído (Hair cells) median la percepción del sonido, la aceleración lineal, angular y la gravedad (sistemas de equilibrio) en vertebrados. Estas células no son más (ni menos) que resonadores muy bien afinados a las frecuencias de las señales mecánicas que deben detectar, y su posibilidad de reportar al sistema nervioso fielmente estas señales depende críticamente de su capacidad de transformar un input mecánico en una señal eléctrica (una corriente, que es la moneda del SN) que transporte la información sobre la señal externa al cerebro. O sea que estas células deben funcionar como "transformadores" de una señal mecánica en una señal eléctrica. Para poder hacerlo cuentan con una estructura (estereocilias) que es capaz de oscilar en respuesta a una señal mecánica. Como estas estructuras elásticas oscilan en un medio viscoso, podemos modelarlas como una masa  $M$  acoplada a un oscilador de constante  $K$  moviéndose en un medio viscoso con disipación lineal  $\gamma$ . O sea, estas células no son más que osciladores amortiguados.



### 24) construyendo un Detector de movimiento

Suponga que las estereocilias oscilan en torno a una posición de equilibrio en respuesta a una señal sonora. Cada vez que en la estructura se produce un desplazamiento igual o mayor a 10 nanómetros (solo en el sentido positivo), como consecuencia se abre un canal que deja entrar corriente a la célula. Se quiere medir la corriente que entra indirectamente con un dispositivo óptico que cuenta la cantidad de veces que el sistema se desplaza al menos 10 nanómetros, según el siguiente diagrama:



Determine para las siguientes condiciones:  $K = 1 \text{ mN/m}$  ( $1 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ ), masa  $M = 10^{-13} \text{ kg}$  en un medio con  $\gamma = 0.001 \text{ } \mu\text{N.s/m}$  ( $1 \cdot 10^{-9} \text{ N.s/m}$ )

a) ¿Cuál es la frecuencia ( $f$ ) de la oscilación?

b) ¿El movimiento será sub o sobre amortiguado? ¿Cual es su  $\tau$ ?

c) Si el desplazamiento tiene una amplitud inicial de 50 nm ( $X_0 = 50 \text{ nm}$ ,  $v_0 = 0$ ) cuántas veces la estereocilia cruza el detector? Cuántas veces se habrá abierto el canal? Si se cambian los parámetros físicos (por ejemplo la  $K$  de la hair cell es  $4 K_0$ ) cuántas veces cruzará ahora el detector, y en este caso cuánto habrá aumentado la corriente?

d) como se imagina que diferentes sistemas auditivos en vertebrados logran afinar sus células a un rango dinámico muy amplio de detección? (hay desde hair cells de ranas que detectan vibraciones del suelo de menos de 100Hz hasta las de murciélagos que detectan vibraciones de hasta 200 KHz!) Que parámetros físicos podrían manipularse?

Respuestas:

a)  $f = 15.9 \text{ KHz}$  ( $T = 62.8 \text{ } \mu\text{seg}$  y  $\omega_{am} = 9.98 \cdot 10^4 \text{ 1/s}$ )

b) el movimiento es sub amortiguado,  $\tau = 200 \mu\text{s}$

c) el canal se abre cinco veces (el detector marca 10 tics, 2 tics por ciclo).

Algunas Respuestas

1) 3cm y 0,1 s

3) a) 0,02s; 0,031s; 0,042s; 0,062s      b)  $-8,67 \text{ m/s}$ ;  $-10 \text{ m/s}$ ;  $-8,67 \text{ m/s}$ ;  $0 \text{ m/s}$

5) 4,8 cm

9)  $148 \text{ m/s}^2$

11) a) 17,5 cm del techo

12) a)  $8,9 \text{ N/m}$     b) 7,5 Hz

13) a)  $40000 \text{ N/m}$     b) 1,06 Hz

17)  $9,787 \text{ m/s}^2$