

La transición caos-hipercaos

Alumno: Carlos Vigh

Directora: Silvina Ponce Dawson

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Departamento de Física, FCEyN, UBA

Resumen

En este trabajo investigamos qué tipos de mecanismos priman en la transición caos hipercaos para un sistema físico sencillo, *el rotor doble*. En él se estudian distintos aspectos dinámicos antes y durante la transición.

- Conjuntos invariantes atractivos y no atractivos presentes en la región del espacio de parámetros estudiada.
- La historia de las órbitas periódicas halladas.
- Exponentes y dimensión de Lyapunov en todos los casos.

Encontramos que existe una tangencia homoclínica que genera, en un entorno de ella, la aparición de cascadas de bifurcaciones a partir de órbitas periódicas inestables que da lugar a la formación de conjuntos caóticos de dos exponentes de Lyapunov positivos que son incorporados por el atractor caótico. De este modo el atractor pasa a tener un segundo exponente de Lyapunov positivo (se vuelve hipercaótico).

Introducción

Observaciones:

- A sistemas con más de un exponente de Lyapunov positivos lo llamamos “sistemas hipercaóticos”.
- En atractores de mapas bidimensionales, disipativos e inversibles existen infinitas órbitas periódicas.
- En mapas de más de dos dimensiones pueden coexistir órbitas periódicas con distinto número de direcciones inestables dentro de un mismo conjunto invariante.
- Los saddles tipo Hénon son conjuntos caóticos no atractivos que resultan atractores tipo Hénon cuando la dinámica se restringe a una variedad de dimensión menor que la del espacio de fases.
- La forma usual para “medir” si un sistema es caótico o no es a través de los exponentes de Lyapunov.
- También brinda información del sistema la dimensión de Lyapunov.

Introducción

En este trabajo estudiamos la transición caos-hipercaos en el mapa del rotor doble:

- Es un mapa de dimensión relativamente baja con rasgos genéricos.
- Para algunos parámetros coexisten órbitas periódicas con distinto número de direcciones inestables.
- Existen saddles tipo Hénon.

Introducción

En este trabajo estudiamos la transición caos-hipercaos en el mapa del rotor doble:

- Es un mapa de dimensión relativamente baja con rasgos genéricos.
- Para algunos parámetros coexisten órbitas periódicas con distinto número de direcciones inestables.
- Existen saddles tipo Hénon.

Antes y después de la transición analizamos:

- Los exponentes de Lyapunov de tiempo finito.
- Las órbitas periódicas.
- Los conjuntos caóticos no atractivos presentes.

Bifurcaciones

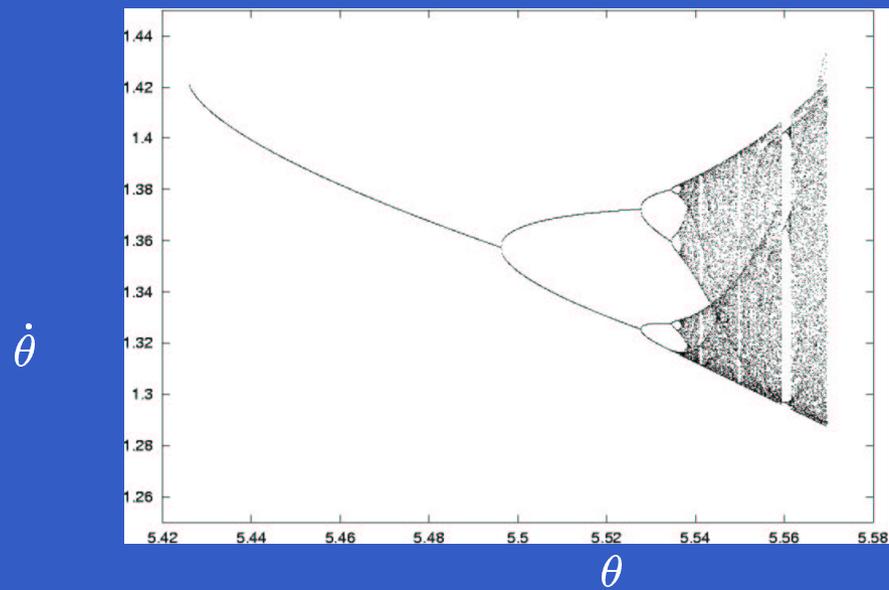
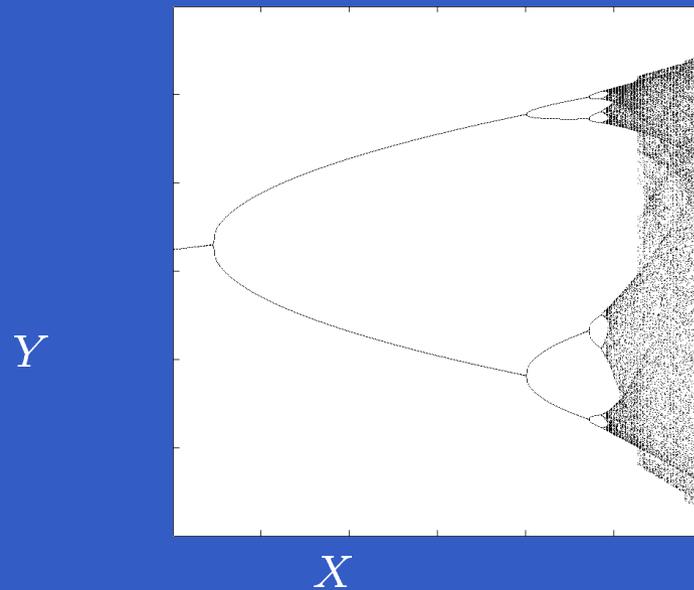


Figura 1: Izquierda: Cascada de bifurcaciones del mapa de Hénon.

Derecha: Cascada de bifurcaciones obtenida con el método del PIM-triple.

Bifurcaciones

En el caso de difeomorfismos del plano, y en el de difeomorfismos de dimensión mayor que cumplen ciertas propiedades, los valores críticos del parámetro donde ocurren tangencias homoclínicas son puntos de acumulación de bifurcaciones.

- Son puntos de acumulación de cascadas por doblamiento de período.
- Son puntos cerca de los cuales coexisten infinitas órbitas periódicas estables.
- Son puntos cerca de los cuales existen atractores extraños tipo Hénon.

Por lo tanto, se encuentra dinámica caótica, en particular, atractores, cerca de los puntos de tangencias homoclínicas.

Bifurcaciones

N. Romero extendió estos resultados, al caso de mapas de más dimensiones.

En particular, probó que, si los autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, correspondientes a las s direcciones estables y $\sigma_1, \dots, \sigma_u$, correspondientes a las u direcciones inestables.

$$0 < |\lambda_s| \leq \dots \leq |\lambda_1| < 1 < |\sigma_1| \leq \dots \leq |\sigma_u|$$

del punto periódico cuyas variedades estable e inestable se vuelven tangentes para $\mu = \mu_0$ satisfacen:

$$|\sigma_1 \cdot \lambda_1| < 1$$

Bifurcaciones

N. Romero extendió estos resultados, al caso de mapas de más dimensiones.

En particular, probó que, si los autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, correspondientes a las s direcciones estables y $\sigma_1, \dots, \sigma_u$, correspondientes a las u direcciones inestables.

$$0 < |\lambda_s| \leq \dots \leq |\lambda_1| < 1 < |\sigma_1| \leq \dots \leq |\sigma_u|$$

del punto periódico cuyas variedades estable e inestable se vuelven tangentes para $\mu = \mu_0$ satisfacen:

$$|\sigma_1 \cdot \lambda_1| < 1$$

Los resultados anteriores se cumplen también.

Atractores extraños o cascadas de bifurcación por doblamiento de período a partir de una órbita estable.

→ Saddles tipo Hénon y cascadas de bifurcaciones a partir de órbitas inestables.

⇒ suponemos que los saddles tipo Hénon deben ocurrir con mucha frecuencia en el caso de mapas de $dim > 2$ en el espacio de fases.

El Rotor Doble

El mapa del rotor doble describe la evolución temporal del sistema mecánico de la figura.

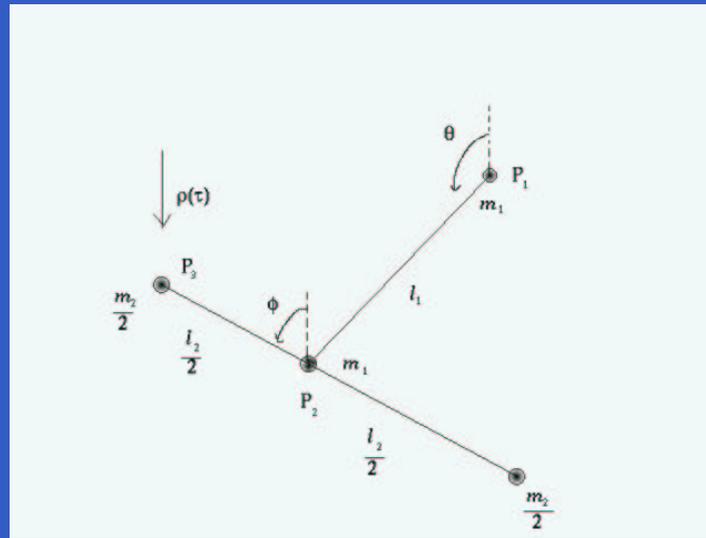


Figura 1: P_1 está fijo, ν_1 y ν_2 son los rozamientos que son proporcionales a $\dot{\theta}(t)$ y $\dot{\phi}(t) - \dot{\theta}(t)$. El movimiento lo provoca una fuerza impulsiva ρ cada cierto período de tiempo T en P_3 .

Ecuaciones de movimiento

El estado del sistema luego de cada impulso es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{n+1} = \theta_n + M_{11}\dot{\theta}_n + M_{12}\dot{\phi}_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + M_{21}\dot{\theta}_n + M_{22}\dot{\phi}_n \\ \dot{\theta}_{n+1} = \frac{\rho l_1}{I_1} \sin \theta_{n+1} + L_{11}\dot{\theta}_n + L_{12}\dot{\phi}_n \\ \dot{\phi}_{n+1} = \frac{\rho l_2}{I_2} \sin \phi_{n+1} + L_{21}\dot{\theta}_n + L_{22}\dot{\phi}_n \end{array} \right.$$

Los impulsos son de la forma:

$$\rho(t) = \sum_n \rho \delta(T - nt)$$

con $n \in \mathbb{Z}$

M_{ij} y L_{ij} son elementos matriciales que dependen de los parámetros del sistema.

Ecuaciones de movimiento

Simplificaciones

$$T = m_1 = m_2 = \nu_1 = \nu_2 = l_2 = 1$$

$$\text{y } l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo tanto se igualan los momentos de inercia:

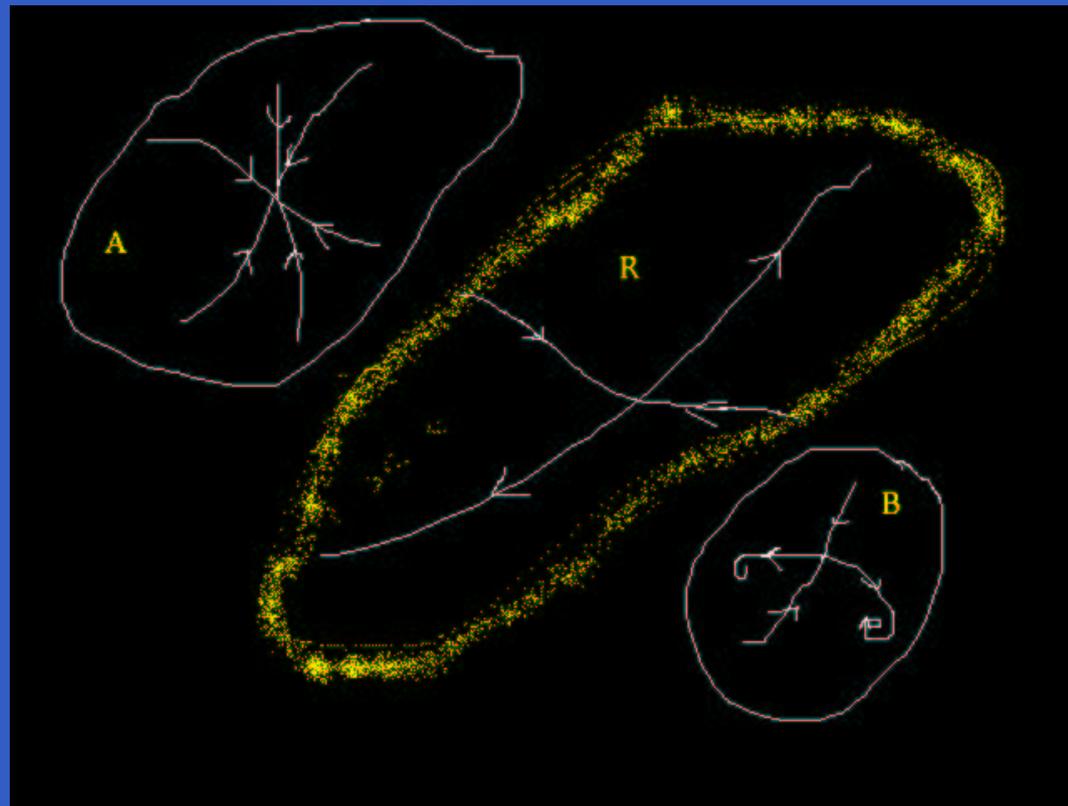
$$I_1 = (m_1 + m_2)l_1^2 = m_2l_2^2$$

y queda como parámetro ρ .

El mapa se puede obtener analíticamente dado que es posible integrar fácilmente las ecuaciones dinámicas entre dos impulsos sucesivos.

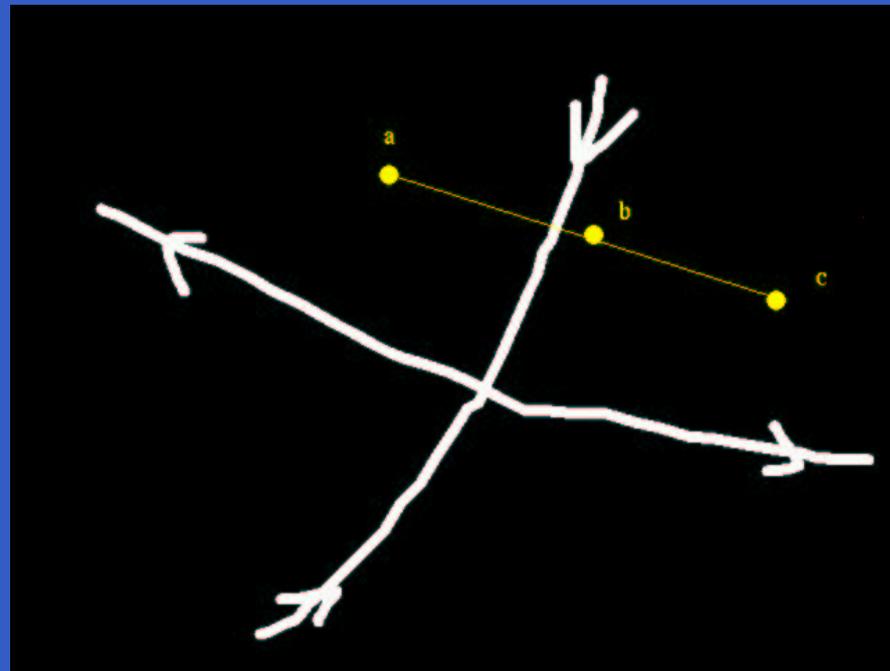
PIM-triple

Aislar los atractores \rightarrow región de restricción



PIM-triple

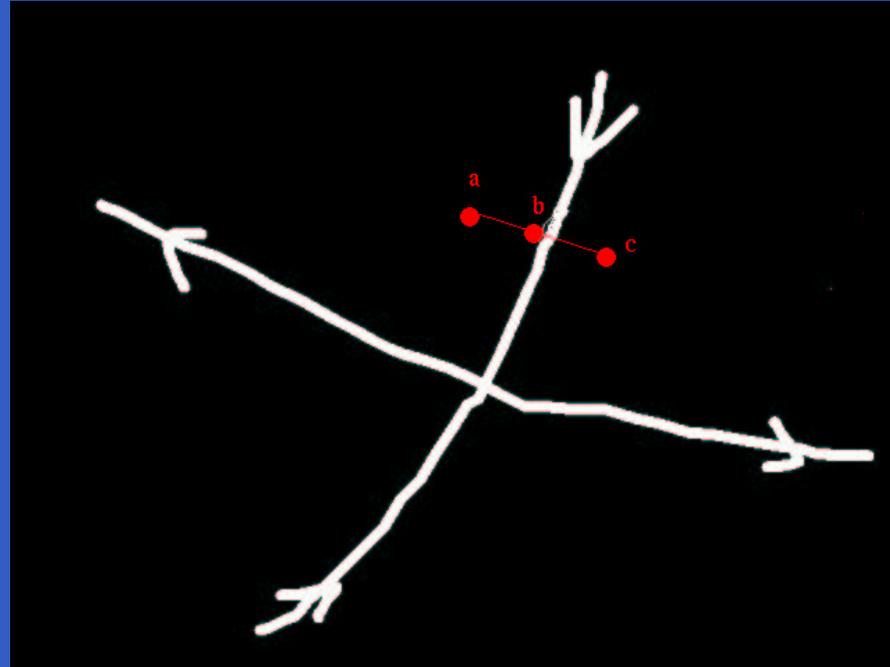
Elegir una terna entorno a la variedad estable del saddle



Se toma como mejor punto el de mayor tiempo de escape.

PIM-triple

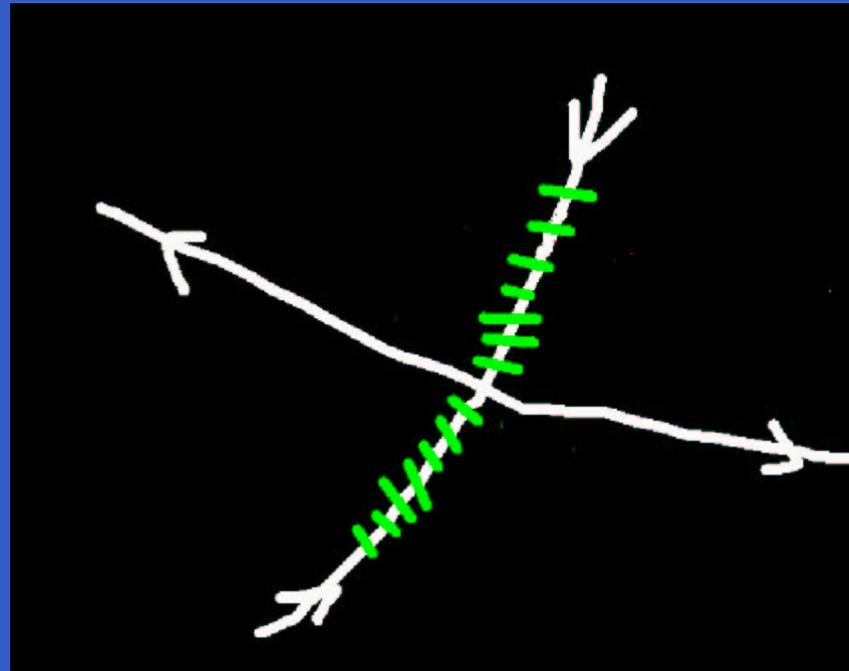
A partir de ese punto se toma una terna mas chica



Se obtienen intervalos anidados hasta un valor de referencia.

PIM-triple

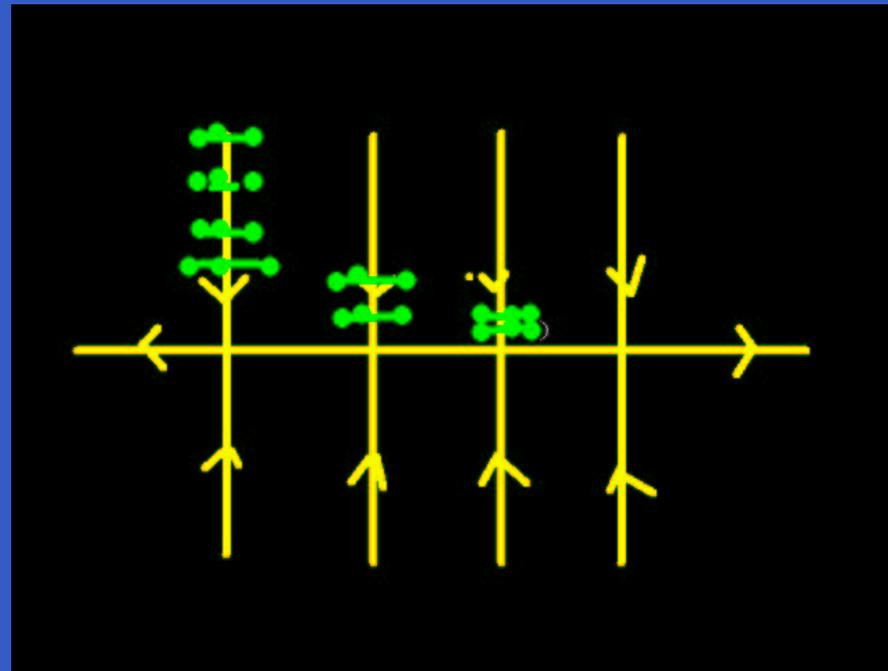
Ahora se mapea y se vuelve a empezar.



Se obtiene una trayectoria que aproxima a un punto del saddle.

PIM-triple

En una estructura tipo conjunto de Cantor...



Se obtiene una trayectoria que aproxima al saddle.

Atractores en el mapa del Rotor Doble

Se estudió el mapa en la región $6.5 < \rho < 8.5$

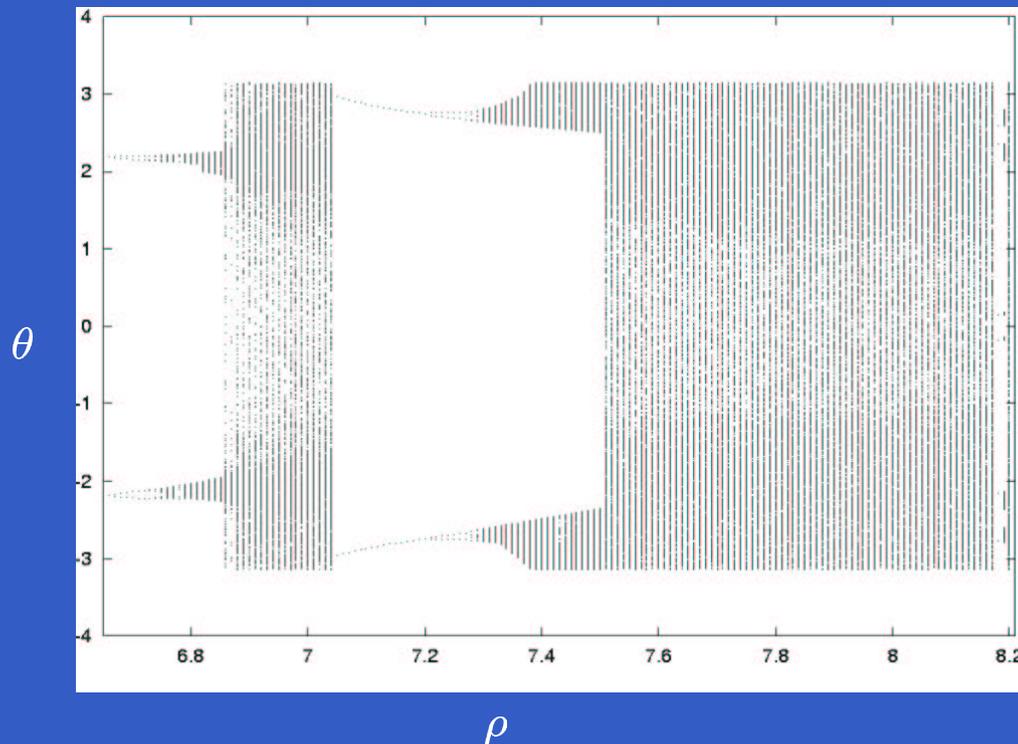


Figura 1: Diagrama de bifurcaciones de algunos atractores del rotor doble proyectado en la variable angular θ en función de ρ .

Exponentes de Lyapunov

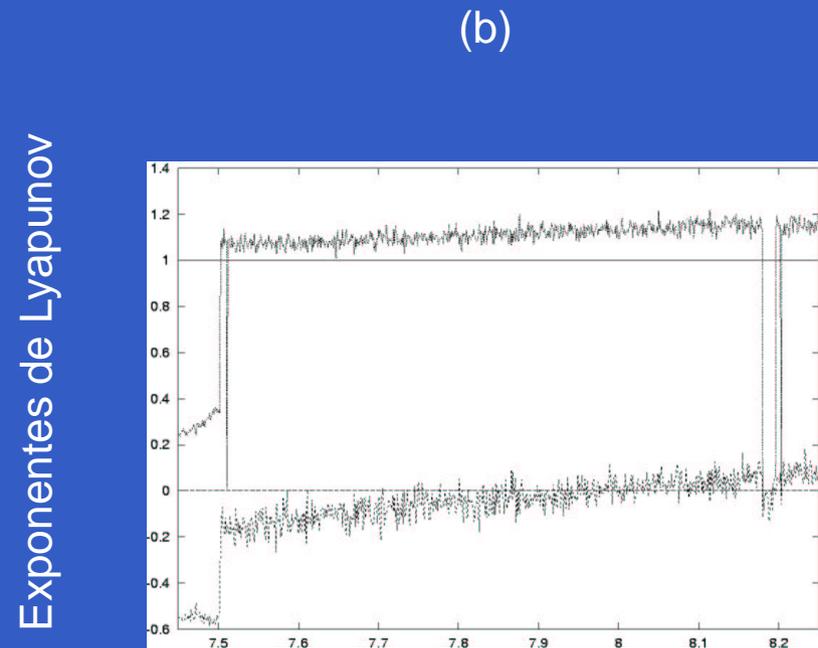
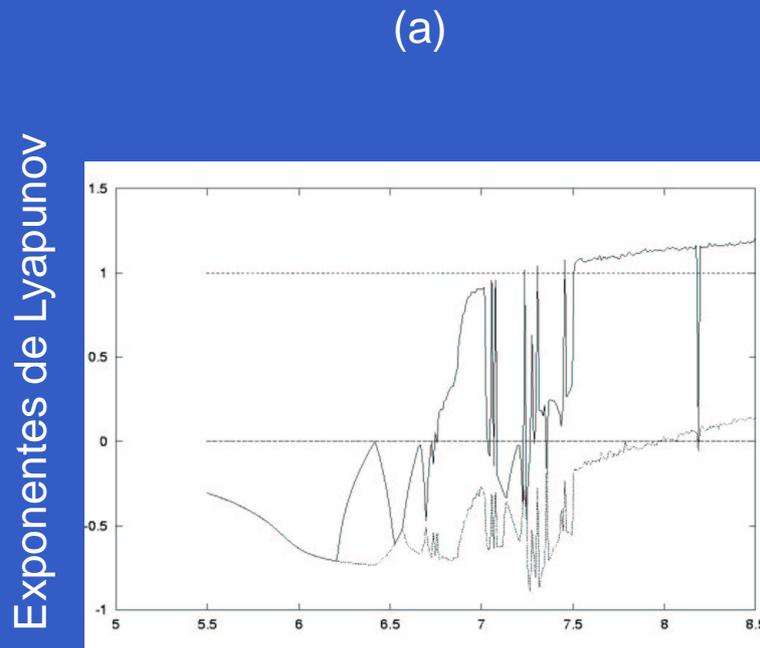


Figura 1: Transición al hipercaos: evolución del primer y segundo exponente de Lyapunov del atractor caótico del mapa del rotor doble.

Atractores y órbitas periódicas

Para la búsqueda de órbitas periódicas usamos el método de Newton haciendo un barrido uniforme en ρ y un grillado en el espacio de fases.

$$\rho = 7.4$$

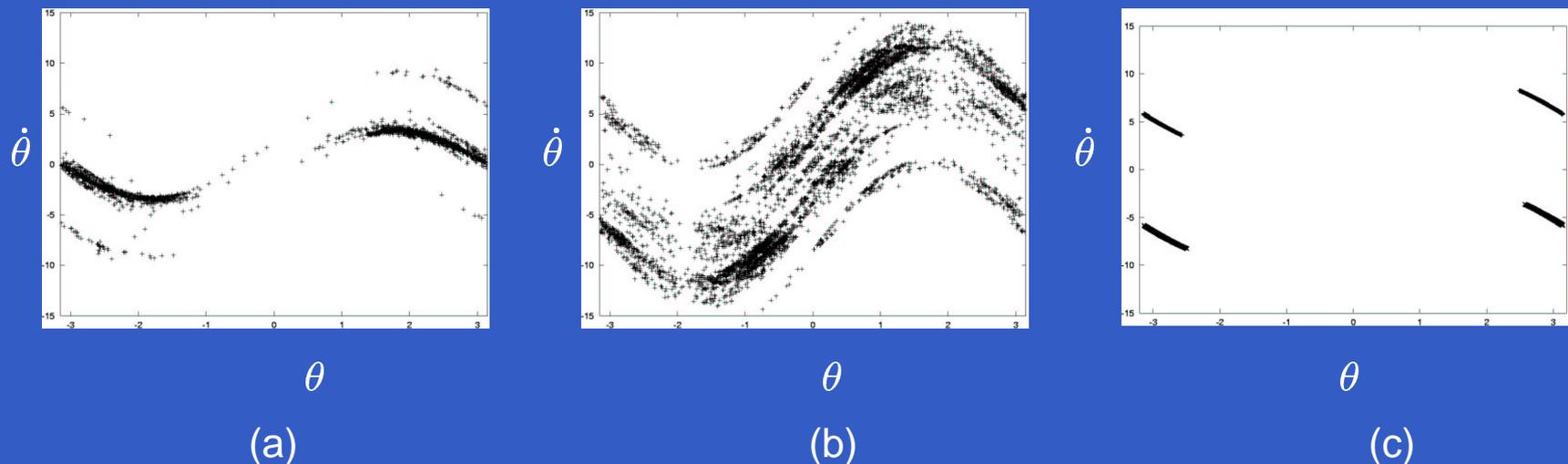


Figura 2: (a):órbitas de período 8 de una dirección inestable obtenidas por el método de Newton en $\rho = 7.4$; (b):órbitas de período 8 de dos direcciones inestables en $\rho = 7.4$; (c): atractor caótico en $\rho = 7.4$.

Atractores y órbitas periódicas

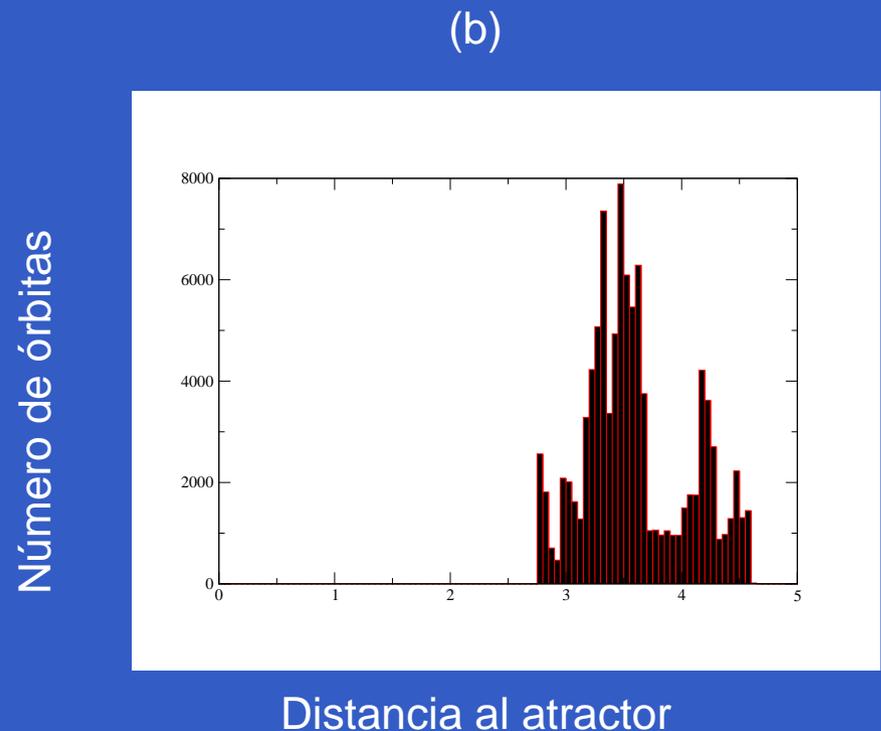
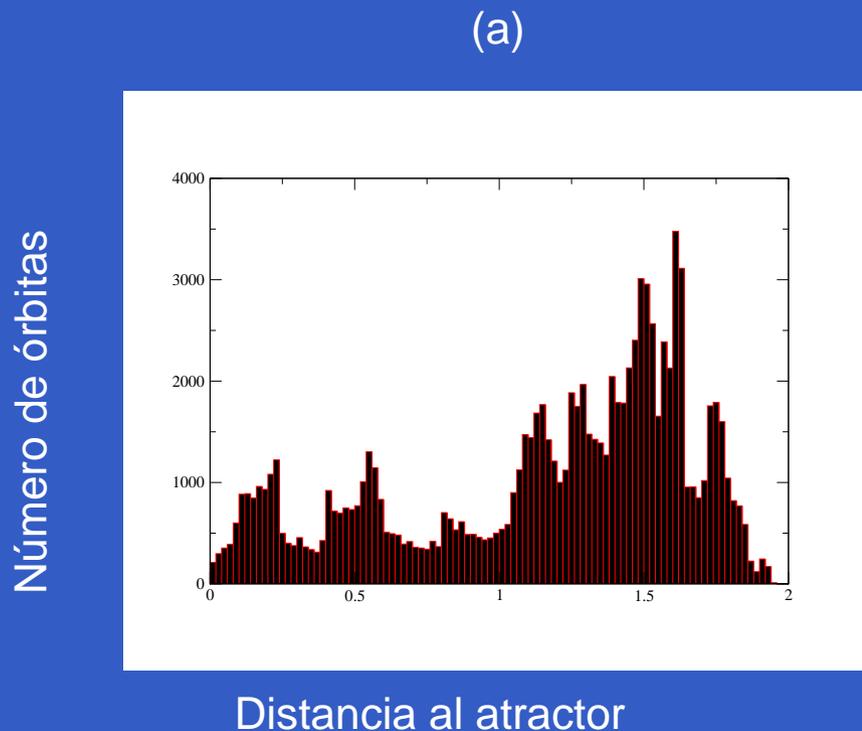
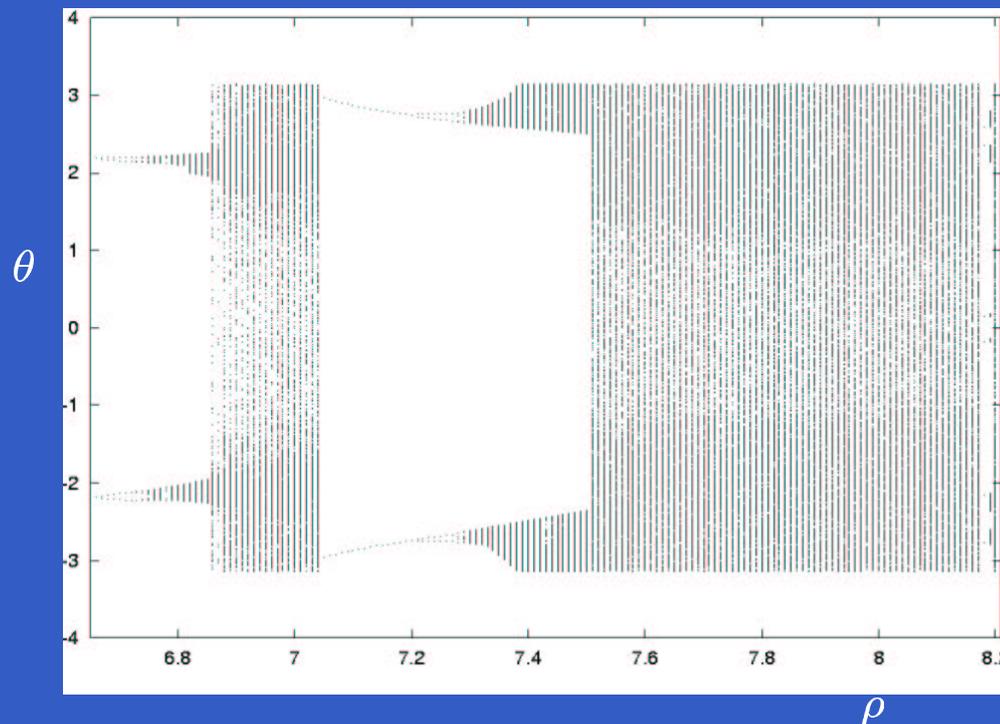


Figura 2: (a): Histograma que representa la cantidad de órbitas de período 8 de una dirección inestable a igual distancia del atractor; (b): ídem con las órbitas de período 8 de dos direcciones inestables para $\rho = 7.4$.

Atractores y órbitas periódicas



- $\rho = 6.75.$
- $\rho = 6.85.$
- $\rho = 6.9.$
- $\rho \simeq 7.02.$
- $\rho \simeq 7.50.$
- $\rho > 7.50.$
- $\rho = 8.$

Figura 2: Diagrama de bifurcaciones de algunos atractores del rotor doble proyectado en la variable angular θ en función de ρ .

Atractores y órbitas periódicas

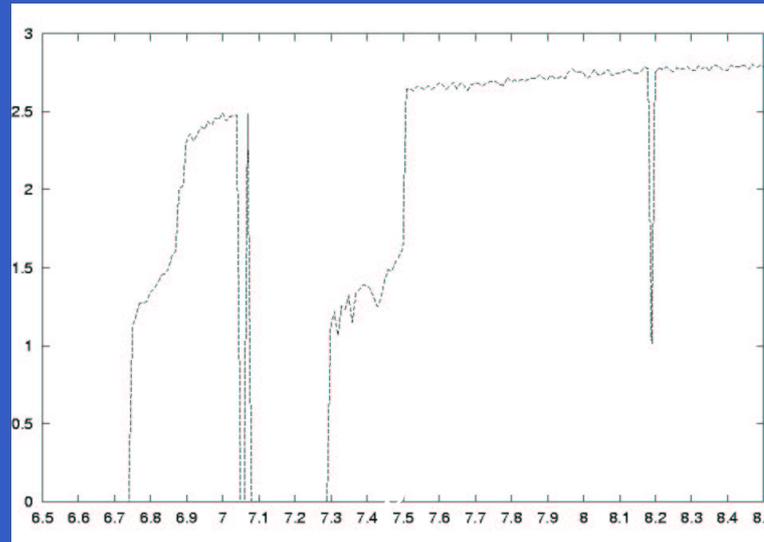
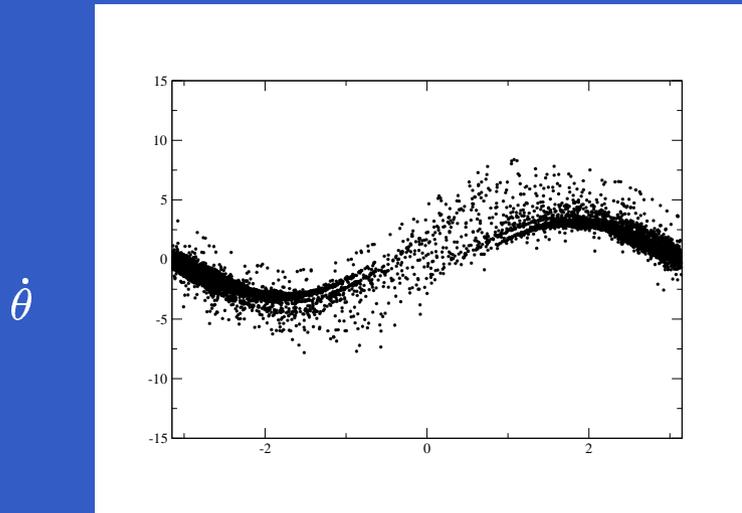


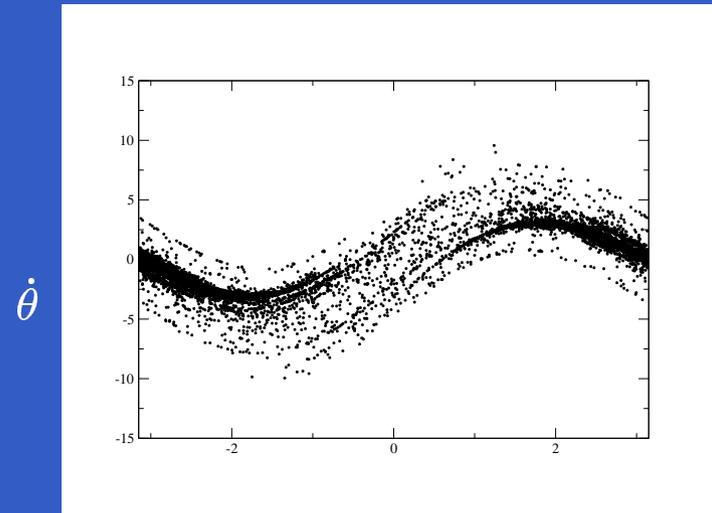
Figura 2: Dimensión de Lyapunov del atractor versus ρ .

La dimensionalidad aumenta bruscamente cuando el atractor incorpora conjuntos no atractivos (cosa que ocurre en las crisis), por lo tanto el atractor contiene un número mayor de órbitas periódicas.

Conjuntos caóticos no atractivos



(a) $\rho = 6.84$



(b) $\rho = 6.85$

Figura 3: (a) Conjunto caótico no atractivo con un exponente de Lyapunov positivo para $\rho = 6.84$. (b) ídem (a) pero para $\rho = 6.85$.

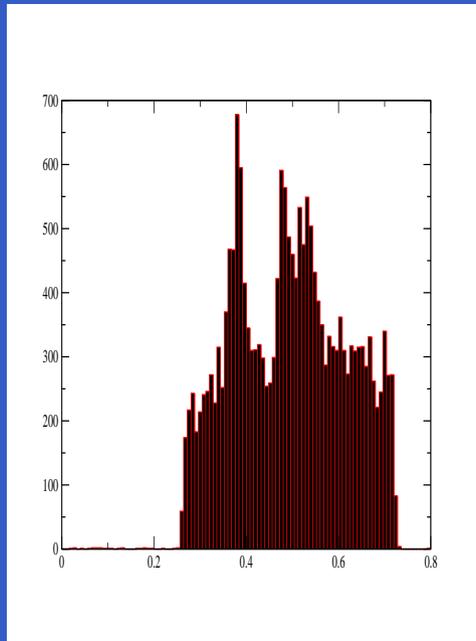
Conjuntos caóticos no atractivos

(a) $\rho = 6.84$

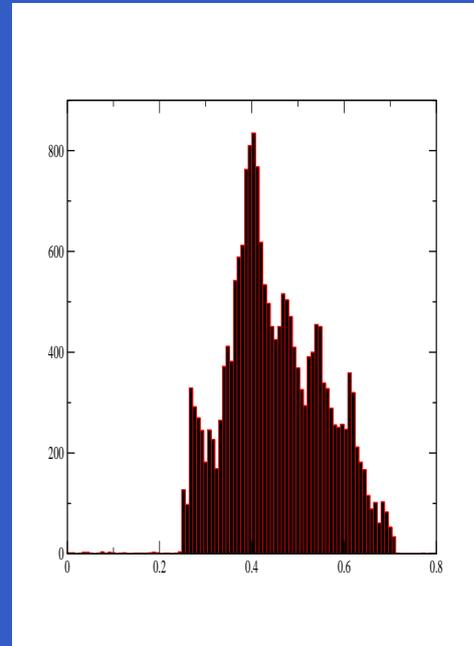
(b) $\rho = 6.85$

(c) $\rho = 6.86$

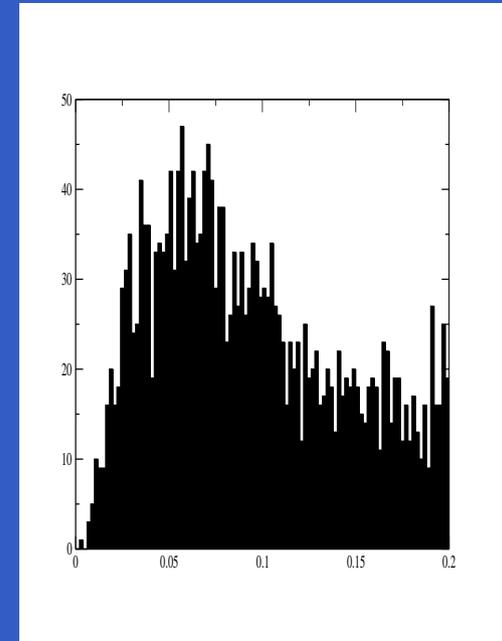
Número de puntos
sobre el conjunto invariante



Número de puntos
sobre el conjunto invariante



Número de puntos
sobre el conjunto invariante



Distancia

Distancia

Distancia

Figura 3: Distancia entre cada punto del conjunto no atractivo y un conjunto de 20000 puntos sobre el atractor caótico. (a) $\rho = 6.84$; (b) $\rho = 6.85$. (c) $\rho = 6.86$.

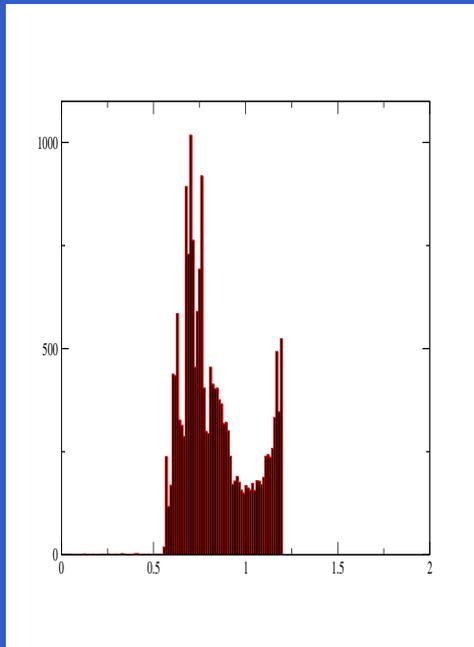
Conjuntos caóticos no atractivos

(a) $\rho = 6.84$

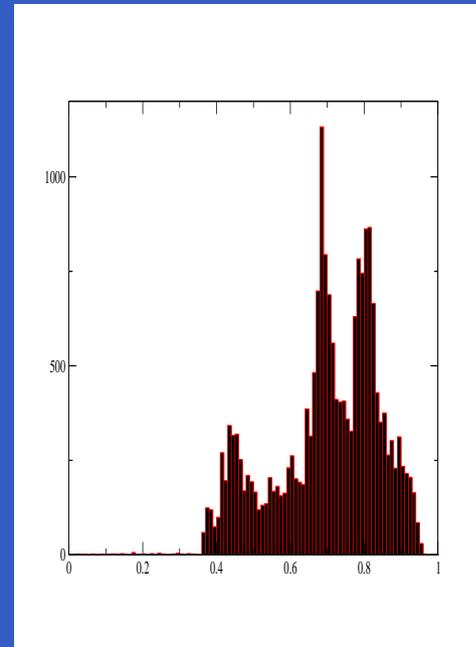
(b) $\rho = 6.85$

(c) $\rho = 6.86$

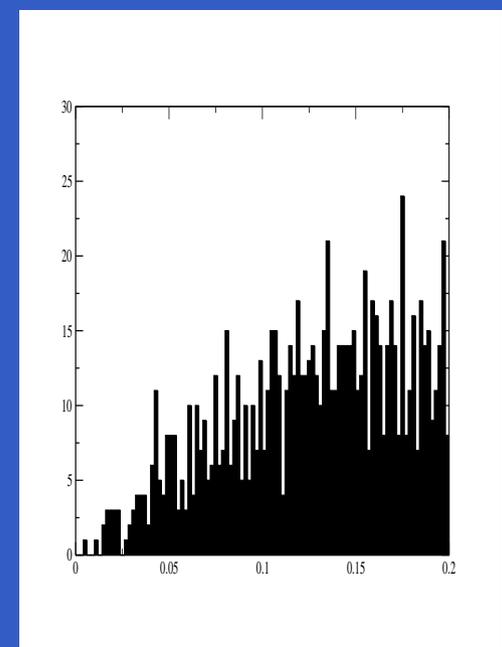
Número de puntos
sobre el conjunto invariante



Número de puntos
sobre el conjunto invariante



Número de puntos
sobre el conjunto invariante



Distancia

Distancia

Distancia

Figura 3: Distancia entre los puntos del conjunto no atractivo y un conjunto de 20000 puntos sobre el atractor. (a) $\rho = 6.84$; (b) $\rho = 6.85$. (c) $\rho = 6.86$.

Conjuntos caóticos no atractivos

- De acá concluimos que estos conjuntos caóticos no atractivos son incorporados al atractor en la crisis que ocurre cerca de $\rho = 6.85$; por lo que el atractor posee órbitas periódicas de una y dos direcciones inestables.
- Hicimos lo mismo pero cerca de la crisis por fusión en $\rho = 7.5$ y se da una situación análoga a la crisis de $\rho = 6.85$.

Conjuntos caóticos no atractivos

Para discernir qué ocurre con estos conjuntos, estudiamos su relación con un conjunto de órbitas periódicas de una y dos direcciones inestables.

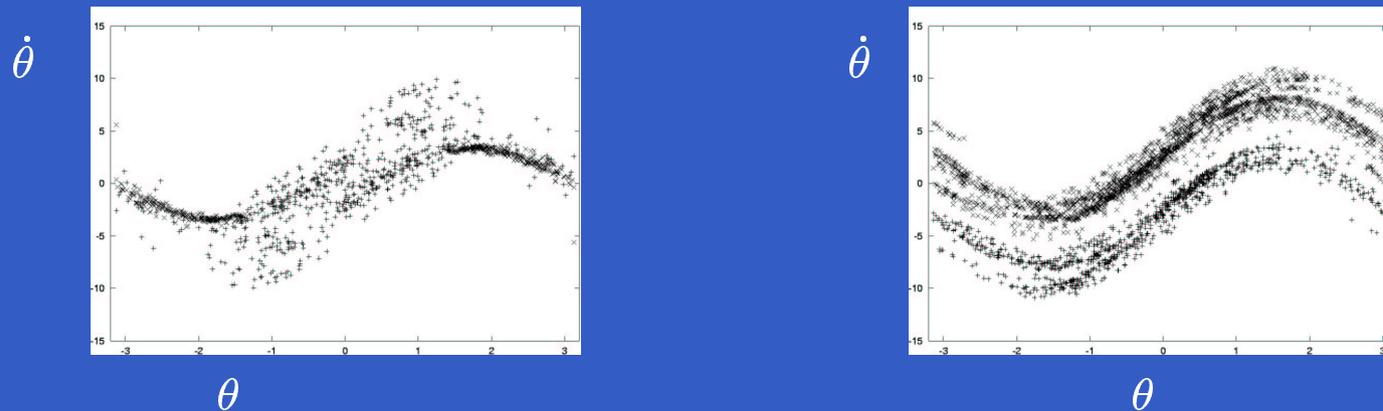


Figura 3: Conjuntos invariantes no atractivos en $\rho = 7.4$.

(a):Proyección de órbitas de período 8 obtenidas con el método de Newton.

(b):Conjuntos caóticos no atractivos obtenidos con el método PIM-triple.

Conjuntos caóticos no atractivos

No se puede concluir demasiado acerca de la pertenencia de las órbitas a los conjuntos caóticos no atractivos.

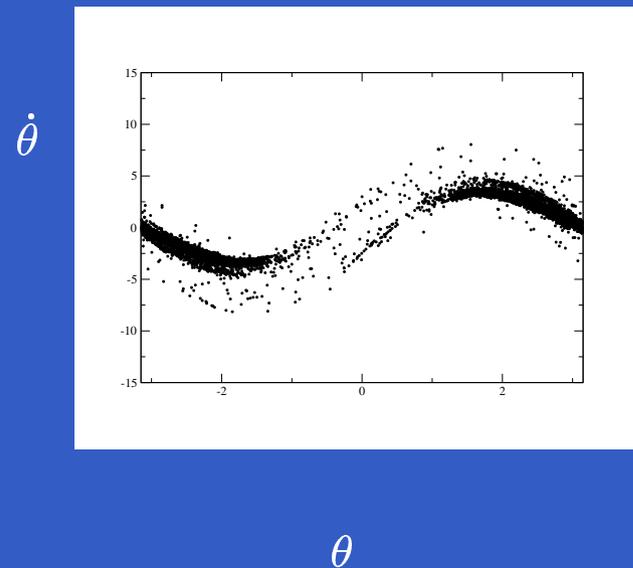
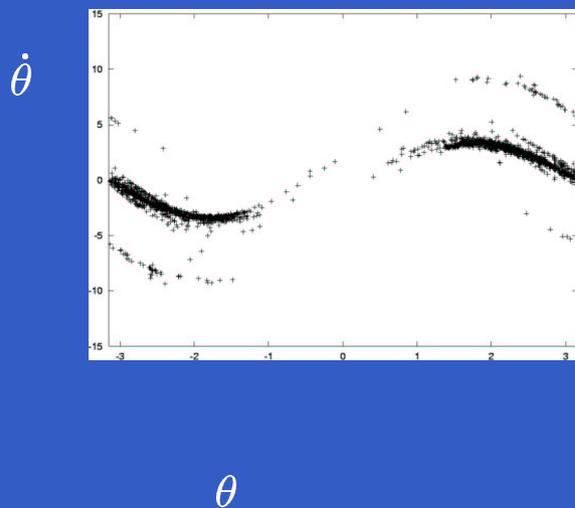
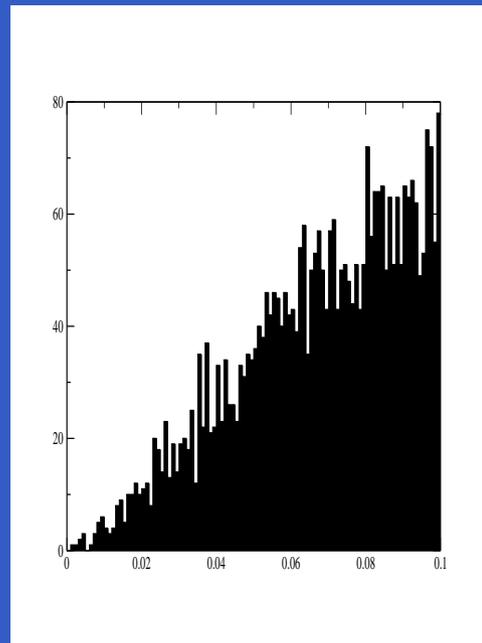


Figura 3: (a):órbitas de período 8 de una dirección inestable obtenidas por el método de Newton;
(b):saddle con un exponente de Lyapunov positivo obtenido por el método PIM-triple.

Conjuntos caóticos no atractivos

(a) $\rho = 7.4$

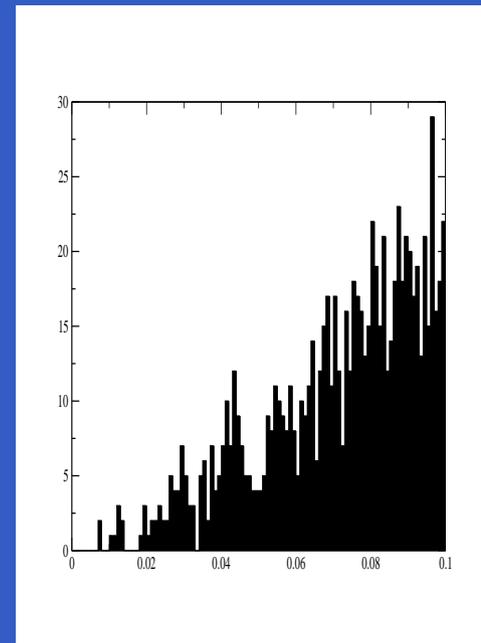
Número de puntos



Distancia

(b) $\rho = 7.4$

Número de puntos



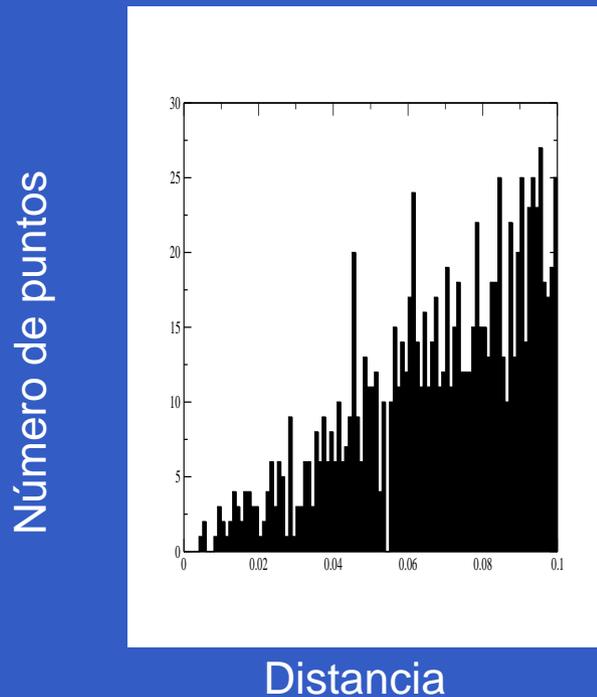
Distancia

Figura 3: a) Distancia entre las órbitas de período 8 de una dirección inestable y el saddle con un exponente de Lyapunov positivo en $\rho = 7.4$.

b) Distancia entre las órbitas de período 8 de dos direcciones inestables y el saddle con un exponente de Lyapunov positivo en $\rho = 7.4$.

Conjuntos caóticos no atractivos

(a) $\rho = 7.4$



(b) $\rho = 7.4$

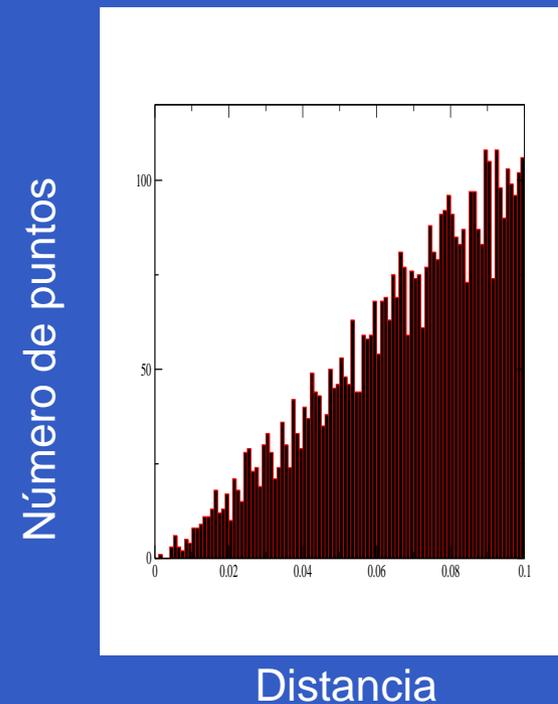


Figura 3: a) Distancia entre las órbitas de período 8 de una dirección inestable y el saddle con dos exponente de Lyapunov positivo en $\rho = 7.4$.

b) Distancia entre las órbitas de período 8 de dos direcciones inestables y el saddle con un exponente de Lyapunov positivo en $\rho = 7.4$.

Conjuntos caóticos no atractivos

- No hay una correlación clara de distancias entre las órbitas de una dirección inestable y el saddle con un exponente de Lyapunov positivo.
- Tampoco con las de dos direcciones inestables y el saddle de dos exponentes positivos.
- Por esta falta de correlación no pudimos determinar tampoco si se trataban de saddles tipo Cantor y tipo Hénon o no.
- A pesar de haber realizado un gran número de experimentos numéricos no pudimos concluir fehacientemente si ambos conjuntos caóticos no atractivos eran maximales o si estaban incluidos en un conjunto invariante mayor.
- Todos los saddles caóticos encontrados, con sus órbitas de una y dos direcciones inestables, son incorporados a los atractores caóticos luego de las crisis de $\rho \simeq 6.85$ y $\rho \simeq 7.50$.
- Luego de $\rho = 6.85$ el atractor caótico incrementa su tamaño incorporando mayoritariamente órbitas de una dirección inestable.
- Luego de que este atractor es destruido en $\rho \simeq 7.02$ se mantiene la estructura de órbitas periódicas.

Origen de las órbitas periódicas del atractor hipercaótico

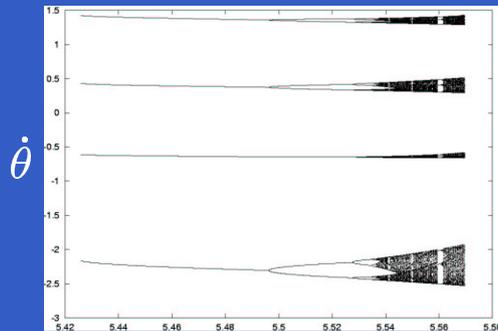
Queremos determinar la “genealogía” de las órbitas de dos direcciones inestables contenidas en el atractor hipercaótico para $\rho = 8$.



Figura 4: (a):Diagrama de bifurcaciones de una órbita periódica de una dirección inestable que sufre duplicaciones de período a partir de $\rho \simeq 6.5$. **L. gruesa: una dirección inestable; l. fina: dos direcciones inestables.** (b): Distancia de la órbita de período 8 a los atractores versus ρ .

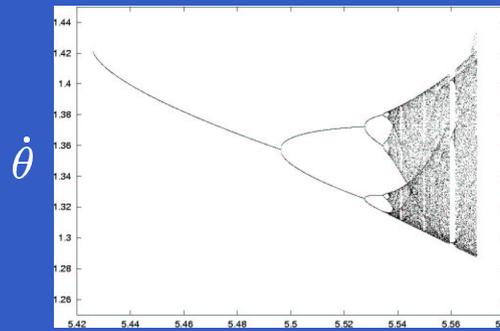
Origen de las órbitas periódicas del atractor hipercaótico

$$5.42 < \rho < 5.56$$



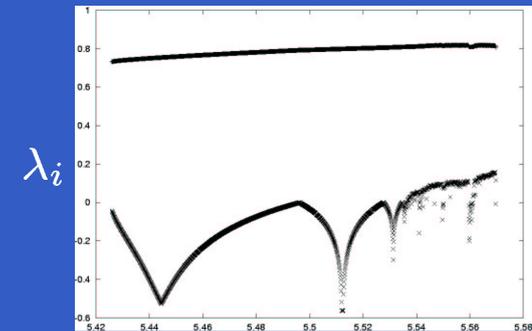
θ

(a)



θ

(b)



ρ

(c)

Figura 4: (a): Diagrama de bifurcaciones de un conjunto invariante no atractivo que nace como saddle-node de período 4 en $\rho = 5.426$, (b): ampliación de (a); (c): Exponentes de Lyapunov (no se grafican los otros dos exponentes que son negativos).

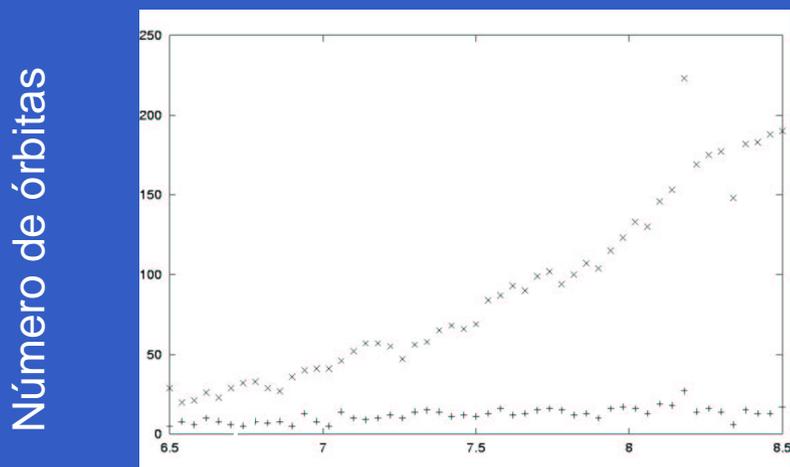
Origen de las órbitas periódicas del atractor hipercaótico

- Hay órbitas periódicas que no pertenecen a los atractores descriptos. Encontramos, por ejemplo, una que da lugar a un atractor caótico que desaparece en una crisis en $\rho \simeq 5.375$, pero que luego es incorporado por los atractores que se expanden después de cada crisis.
- Estudios de otras órbitas nos muestran que los diagramas de bifurcación obtenidos por el método de Newton son casos típicos.
- Este es el proceso más común por el que se pasaron las órbitas con dos direcciones inestables.
- De los gráficos de distancia, es aparentemente mediante la incorporación de órbitas periódicas que pasan a tener dos direcciones inestables antes de haber pertenecido nunca al atractor, que el atractor pasa a ser hipercaótico.
- Esto se observó tanto para distintos períodos como para distintos valores de ρ .
- Para estas órbitas la distancia al atractor tiene una forma similar en todos los casos.

Explosión de órbitas periódicas

Estudiamos cómo varía el número total de órbitas periódicas de un dado período. Para ello utilizamos el método de Newton, como antes, haciendo un barrido uniforme en ρ y un grillado en el espacio de fases.

(a)



(b)

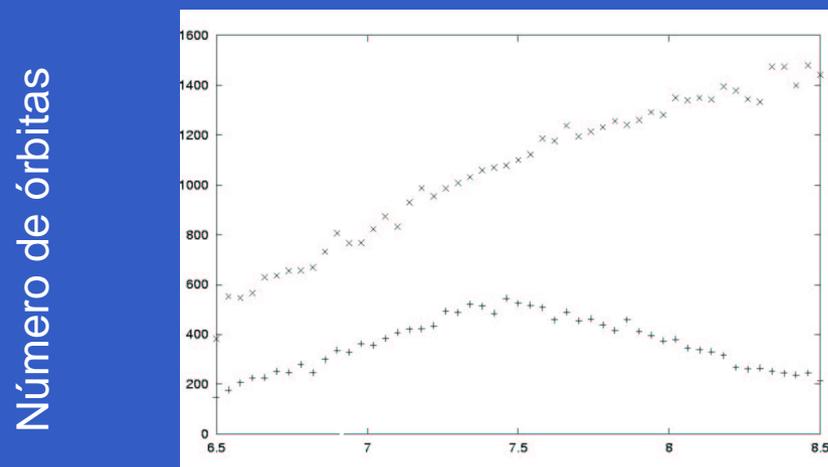


Figura 5: Número de órbitas periódicas según estabilidad versus ρ :(a),órbitas de período 4;(b),órbitas de período 8.

“X”: órbitas con dos direcciones inestables, “+”:órbitas con una dirección inestable.

Explosión de órbitas periódicas

Para las órbitas periódicas contabilizadas tomamos la distancia promedio a los puntos de los atractores presentes en función de ρ .

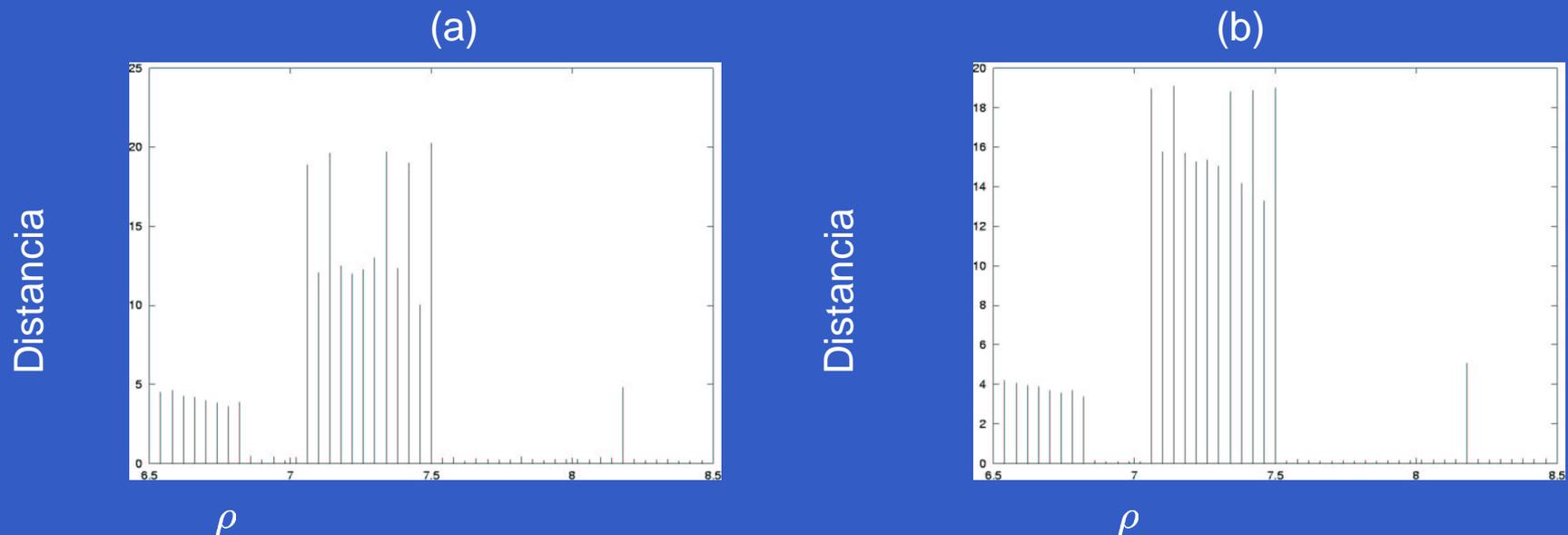


Figura 5: Distancia promedio de las órbitas periódicas observadas a los atractores presentes versus ρ : (a), órbitas de período 4 de una dirección inestable; (b), órbitas de período 8 de una dirección inestable.

Explosión de órbitas periódicas

Según lo que se muestra en los gráficos, las órbitas que nacen antes de la crisis que ocurre en $\rho \simeq 7.5$ son incorporadas por el atractor a posteriori, en tanto que las órbitas que nacen luego de la crisis parecen pertenecer a éste desde el principio.

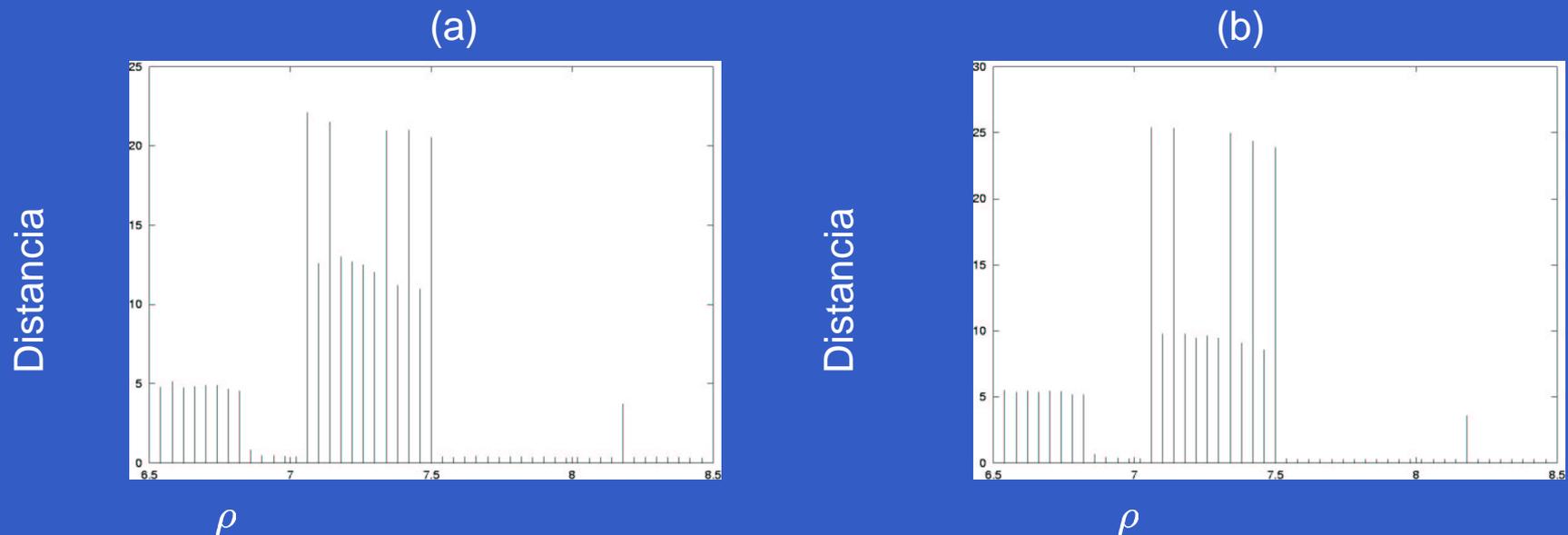


Figura 5: Distancia promedio de las órbitas periódicas observadas a los atractores presentes versus ρ : (a), órbitas de período 4 de dos direcciones inestables; (b), órbitas de período 8 de dos direcciones inestables.

Explosión de órbitas periódicas

- Ocurre un crecimiento “explosivo” en el número de órbitas periódicas de dos direcciones inestables cuando el atractor caótico sufre una crisis aumentando notablemente su tamaño.
- Inferimos también que además de ocurrir bifurcaciones tipo saddle-node hay una acumulación de cascadas por doblamiento de período que dan lugar a la formación de saddles tipo Hénon.
- Dadas estas observaciones y el hecho de que las crisis están asociadas a tangencias homoclínicas y heteroclínicas, nos preguntamos si estamos entonces en presencia de una situación que satisface las condiciones del teorema de N. Romero descrito en la sección 2.4 de este trabajo.

Bifurcación homoclínica

Analizamos el caso de la órbita de período uno ubicada en el origen de coordenadas del espacio de fases para $\rho \simeq 7.5$.

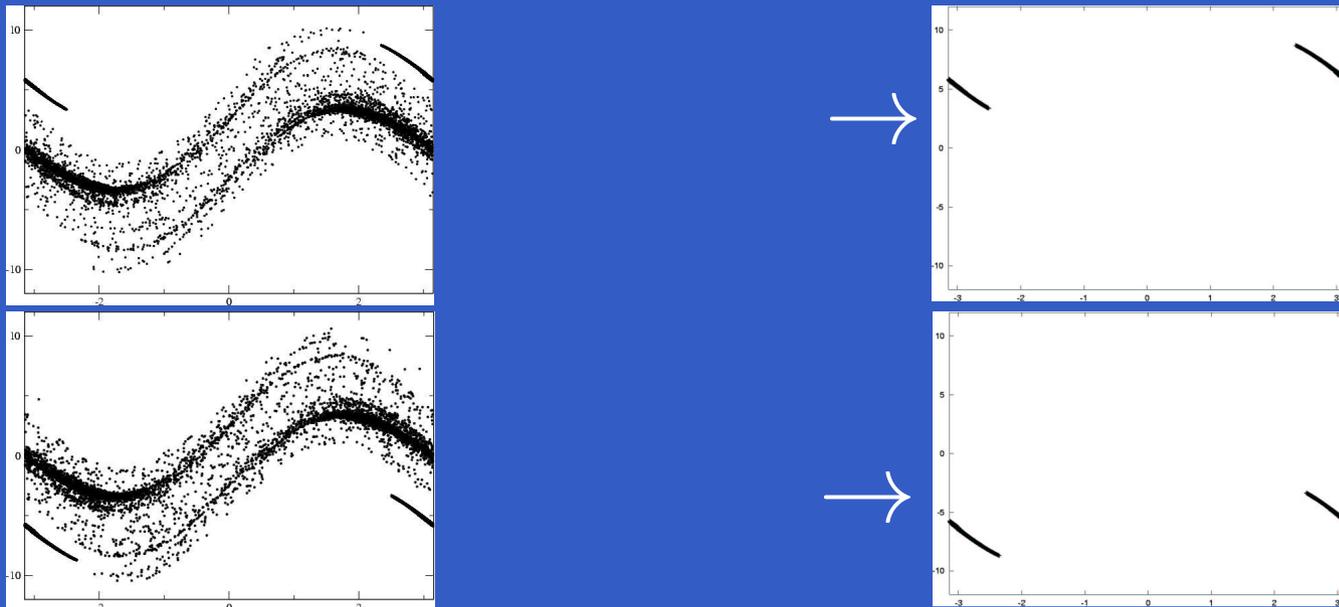


Figura 6: (a): Puntos de una trayectoria que parte de un punto muy cercano al punto fijo $(0, 0, 0, 0)$, el punto: $(-.0005, 0, 0, 0)$. (b): Atractor al que converge la condición inicial de luego de un transitorio. (c): ídem (a) con condición inicial en el punto $(.0005, 0, 0, 0)$; (e): ídem (b) con la trayectoria de (d).

En todos los casos es para $\rho = 7.499$, antes de la crisis.

Bifurcación homoclínica

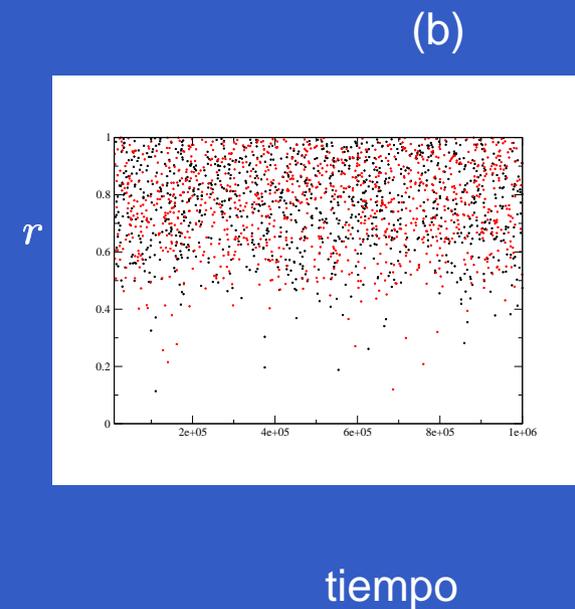
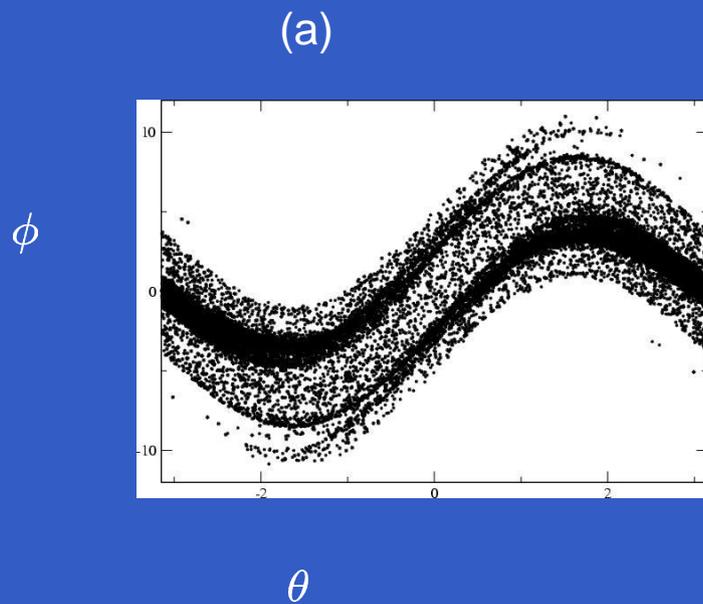


Figura 6: (a): Proyección en el plano $\theta - \dot{\theta}$ de los puntos que pertenecen a las trayectorias que parte de las mismas condiciones iniciales superpuestas luego de la crisis. (b): Distancia r al origen de los puntos contenidos en una “hiperesfera” de radio 1 centrada en el origen en función de la iteración del mapa (el tiempo). En todos los casos es para $\rho = 7.535$.

Bifurcación homoclínica

- Esto nos permite concluir que ocurre una tangencia homoclínica entre las variedades estable e inestable del punto fijo $(0, 0, 0, 0)$ para algún valor de ρ cercano entre 7.5 y 7.54.
- Estudiamos entonces los autovalores de este punto fijo y vemos si satisfacen las condiciones del teorema de N. Romero.
- Los autovalores del punto fijo que está en el origen de coordenadas son, en módulo;

$$|\sigma_1| = 1.0697$$

$$|\sigma_2| = 1.1212$$

$$|\lambda_1| = 0.1945$$

$$|\lambda_2| = 0.1372.$$

y satisfacen la condición del teorema:

- $|\sigma_1 \cdot \lambda_1| = 0.2081$

Bifurcación homoclínica

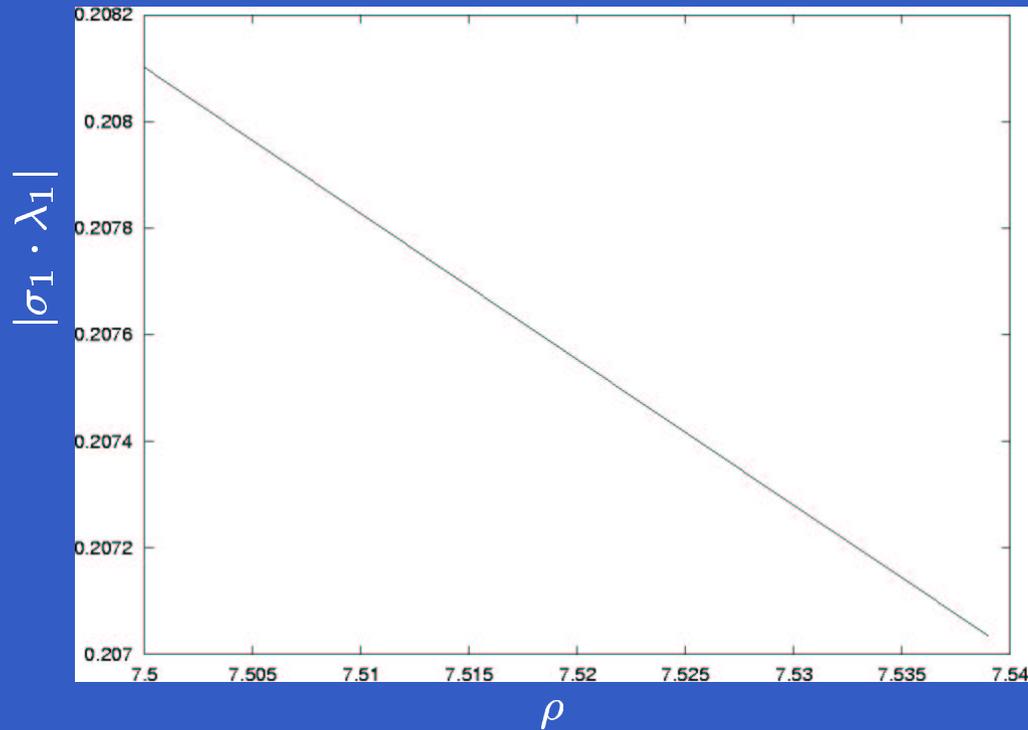


Figura 6: Producto de los autovalores en modulo mas cercanos a uno del punto fijo $(0,0,0,0)$ para valores de ρ en una vecindad en torno a la cual ocurre la tangencia homoclínica.

Bifurcación homoclínica

- La explosión de órbitas periódicas está asociada a la existencia de una tangencia homoclínica entre las variedades estable e inestable de un punto fijo que satisface las condiciones del teorema de N. Romero.
- De acuerdo a este teorema, hay una acumulación de bifurcaciones saddle-node y de cascadas de bifurcación por doblamiento de período sobre el punto donde ocurre la tangencia.
- Esto determina la existencia de numerosos saddles tipo Hénon con órbitas periódicas de dos direcciones inestables, las que, al ser incorporadas por el atractor, lo vuelven hipercaótico.

Conclusiones

En este trabajo realizamos:

- Un relevamiento de órbitas periódicas, conjuntos atractores y no atractivos del mapa del rotor doble para valores del forzado, donde se produce la transición caos-hipercaos.
- Luego de $\rho = 6.85$ el atractor caótico sufre una crisis incrementándose su tamaño en e e incorpora mayoritariamente órbitas periódicas de una sola dirección inestable.

Conclusiones

En este trabajo realizamos:

- Un relevamiento de órbitas periódicas, conjuntos atractores y no atractivos del mapa del rotor doble para valores del forzado, donde se produce la transición caos-hipercaos.
- Luego de $\rho = 6.85$ el atractor caótico sufre una crisis incrementándose su tamaño en e incorpora mayoritariamente órbitas periódicas de una sola dirección inestable.
- En $\rho \simeq 7.02$ por una crisis el atractor desaparece y quedan en su lugar los saddles que habían sido incorporados por el atractor.
- A su vez, una órbita periódica estable, por medio de una cascada de bifurcaciones, da lugar a la formación de dos atractores caóticos vinculados por una relación de simetría en $\rho \simeq 7.3$.
- En $\rho \simeq 7.502$ sufren una crisis por fusión, incorporando a los saddles con órbitas periódicas de una y dos direcciones inestables.

Conclusiones

- Encontramos órbitas periódicas de una dirección inestable que rápidamente sufren cascadas de bifurcaciones dando lugar a la formación de conjuntos no atractivos (saddles tipo Hénon) y tiene lugar un crecimiento “explosivo” en el número de órbitas periódicas de dos direcciones inestables.
- Aparentemente, las órbitas periódicas que nacen luego de la crisis ya pertenecen al atractor.
- Observamos que ocurre una tangencia homoclínica cerca del origen para valores del parámetro ρ entre 7.5 y 7.52 donde ocurre la crisis.

Conclusiones

- Encontramos órbitas periódicas de una dirección inestable que rápidamente sufren cascadas de bifurcaciones dando lugar a la formación de conjuntos no atractivos (saddles tipo Hénon) y tiene lugar un crecimiento “explosivo” en el número de órbitas periódicas de dos direcciones inestables.
- Aparentemente, las órbitas periódicas que nacen luego de la crisis ya pertenecen al atractor.
- Observamos que ocurre una tangencia homoclínica cerca del origen para valores del parámetro ρ entre 7.5 y 7.52 donde ocurre la crisis.
- La aparición “explosiva” de órbitas periódicas inestables, y la formación de saddles tipo Hénon por cascadas de bifurcaciones de estas órbitas inestables es un proceso que ocurre en presencia de tangencias homoclínicas si se satisfacen las condiciones del teorema de N.Romero.
- Podemos decir que la existencia de esta tangencia genera la proliferación, por cascadas de bifurcaciones a partir de órbitas periódicas inestables, de saddles tipo Hénon que al ser incorporados por el atractor caótico lo convierten en un atractor hipercaótico.