Microfluidica

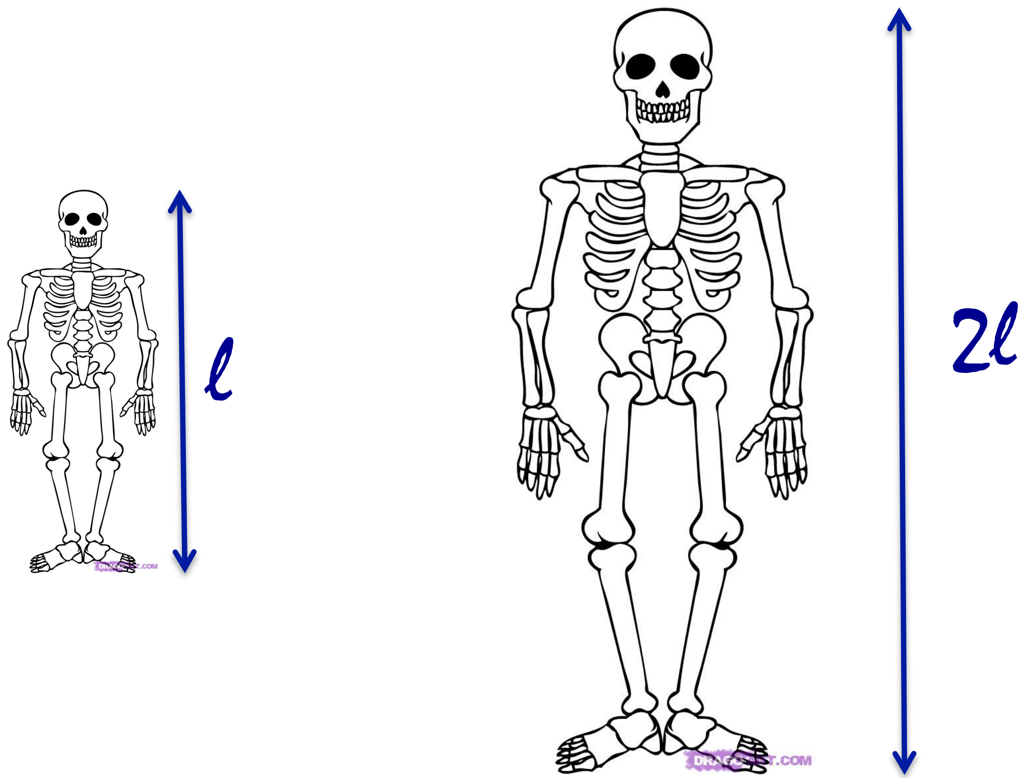
Leyes de escala,
Análisis dimensional
Números adimensionales
&
Soluciones auto-similares

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física
Juan José Giambiagi

Leyes de escala

Las propiedades de objetos geométricamente similares, independientemente de su forma, pueden relacionarse mediante leyes de escala.

Galileo Galilei



Cuanto aumento la masa de huesos?

Y la superficie?

La relación no es la misma para todas las cosas

→ Distintas propiedades probablemente cambien de manera diferente!

Que pasa cuando cambiamos la tamaño?

las leyes de escala explican
ciertos fenómenos que ocurren al cambiar de tamaño

Galileo menciona que un cambio considerable en el tamaño de un animal necesita un cambio de materiales o de forma!

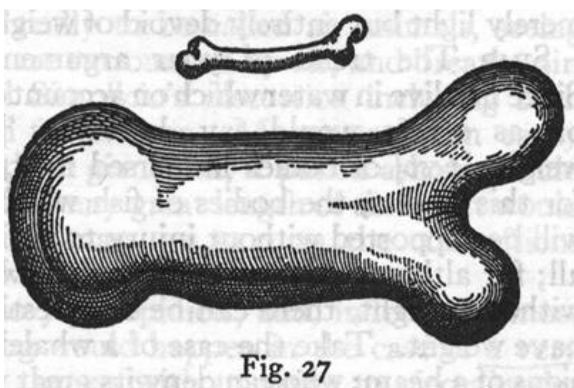


Fig. 27

Los insectos no le tienen
miedo a las caídas!
animales mas grandes si!

Porque?

Fundamental en Microfluídica:

"…la superficie de un solido pequeño es comparativamente mayor a la de un solido mas grande."

Galileo Galilei, 1638

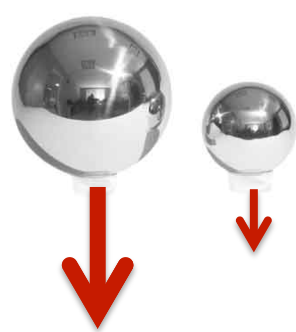
<u>Problema ca. 1600:</u>

Barcos grandes pueden romperse cuando se los saca del agua, pero barcos mas chicos no tienen problema.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Volumen, Masa} \sim \ell^3 \\ \textit{Superficie} \sim \ell^2\end{array}\right\} \qquad \lim_{\ell \to 0} \frac{\text{Surface}}{\text{Volume}} \sim \frac{\ell^2}{\ell^3} \sim \ell^{-1} \to \infty$$

Cual cae más rápido?

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Fricción/Presión} \sim \ell^2 \\ \textit{Fuerza de gravedad} \sim \ell^3\end{array}\right\}$$



Balance de Fuerzas!

Velocidad terminal ~ l

Microfluídica:

Balance de Fuerzas

Table 1.1 The scaling laws as a function of a typical length scale, object size or distance ℓ for a number of physical quantities studied in this book.

Area	ℓ^2	Eq. (1.1)	Time	ℓ^0	Section 1.2
Volume	ℓ^3	Eq. (1.1)	Velocity	ℓ^1	Section 1.2
Rel. fluctuations	$\ell^{-\frac{1}{2}}$	Exercise 1.3	Hydrostatic pressure	ℓ^1	Eq. (3.3)
Reynolds number *Re*	ℓ^2	Eq. (2.39)	Hydraulic resistance	ℓ^{-4}	Table 4.1
Péclet number	ℓ^2	Eq. (5.53)	Stokes drag	ℓ^1	Eq. (3.128)
Diffusion time	ℓ^2	Eq. (5.10)	Particle diffusion const.	ℓ^{-1}	Eq. (6.49)
Fluid acceleration time	ℓ^2	Eq. (6.25)	Taylor dispersion time	ℓ^{-2}	Eq. (5.71)
Young–Laplace pressure	ℓ^{-1}	Eq. (7.8)	Contact angle	ℓ^0	Eq. (7.14)
Bond number *Bo*	ℓ^2	Eq. (7.30)	Capillary rise height	ℓ^{-1}	Eq. (7.21)
Marangoni force	ℓ^{-1}	Eq. (7.39)	Capillary speed	ℓ^1	Eq. (7.36)
Electric field	ℓ^{-1}	Eq. (8.3a)	EO velocity	ℓ^{-1}	Eq. (9.11)
Ionic mobility	ℓ^{-1}	Eq. (8.15)	EO mobility	ℓ^0	Eq. (9.12)
Debye length	ℓ^0	Eq. (8.26)	EO flow rate	ℓ^1	Eq. (9.35a)
Debye frequency	ℓ^{-1}	Eq. (8.45)	EO pressure	ℓ^{-2}	Eq. (9.35b)
DEP force, particle	ℓ^3	Eq. (10.23)	MAP force, particle	ℓ^3	Eq. (11.13)
DEP force, system	ℓ	Eq. (10.31)	MAP force, system	ℓ	Eq. (11.13)
Thermal diffusion time	ℓ^2	Eq. (12.16a)	Acoustic impedance	ℓ^0	Eq. (15.61)
Thermal resistance	ℓ^{-1}	Eq. (12.59)	Acoustic radiation force	ℓ^3	Eq. (15.81)
Thermal capacitance	ℓ^3	Eq. (12.61)	Optical absorbance	ℓ^1	Eq. (16.25b)
Thermal RC-time	ℓ^2	Eq. (12.63)	Optical damping coeff.	ℓ^0	Eq. (16.14)

Bruus, H. “Theoretical Microfluidics” (2008)

Como obtenemos las leyes de escala?

Análisis Dimensional

Sistema de **unidades** (SI) y **dimensiones**

Fundamentales o Primarias	
Dimensión: Símbolo	Unidad: Símbolo
Longitud: L	Metro: m
Tiempo: T	Segundo: s
Masa: M	Kilogramo: kg
Temperatura: Θ	Kelvin: K

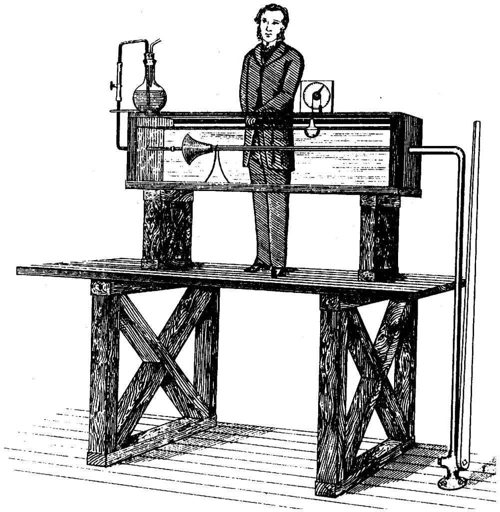
Derivadas o Secundarias		
	Dimensiones	Unidades
Energía: E	$[E] = L^2MT^{-2}$	$J = m^2\ kg\ s^{-2}$
Fuerza: F	$[F] = LMT^{-2}$	$N = m\ kg\ s^{-2}$
Presión: P	$[P] = L^{-1}MT^{-2}$	$Pa = m^{-1}\ kg\ s^{-2}$

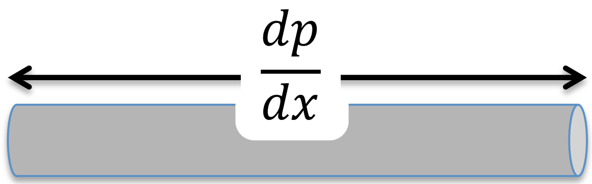
Dimensiones de cantidades físicas		
Velocidad: U	$[U] = LT^{-1}$	$= m\ s^{-1}$
Densidad: ρ	$[\rho] = L^{-3}M$	$= m\ s^{-1}$

Ecuaciones (Leyes) en física son homogéneas

$$F = ma \rightarrow [F] = [m][a] = \mathrm{MLT}^{-2}$$

Análisis Dimensional





$$\frac{dp}{dx} = f(U, R, \mu, \rho)$$

Parámetros del problema

$\left[\frac{dp}{dx}\right] = \frac{M}{L^2T^2}$	$[U] = \frac{L}{T}$	$[\rho] = \frac{M}{L^3}$	$[R] = L$	$[\mu] = \frac{M}{LT}$

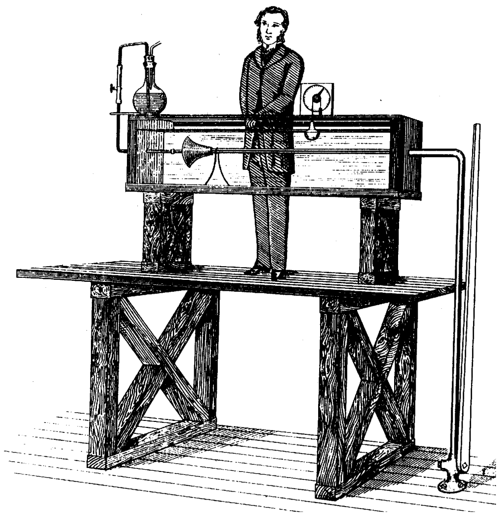
Cuantas variables independientes o primarias?

3 Variables de dimensiones independientes (U, R, ρ)

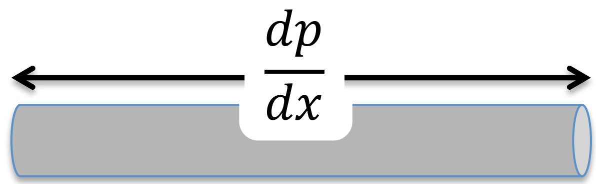
1 Variable dependiente: $[\mu] = [\rho][U][R]$

1 Parámetro adimensional: $\Pi_1 = \dfrac{\rho U R}{\mu}$

$$\left[\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}}\right] = \frac{[\rho][U]^2}{[R]}$$



Análisis Dimensional



$$\frac{dp}{dx} = f(U, R, \mu, \rho)$$

3 Variables de dimensiones independientes (U, R, ρ)

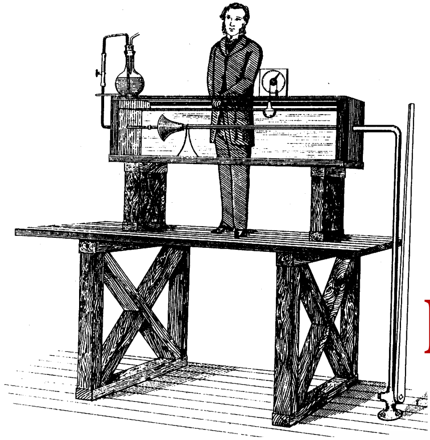
1 Parámetro adimensional: $\Pi_1 = \dfrac{\rho U R}{\mu}$

1 Ecuación homogénea:

$$\frac{dp}{dx} / \rho U^2 R^{-1} = \Pi \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} / \rho U^2 R^{-1} = \Pi(\Pi_1)$$

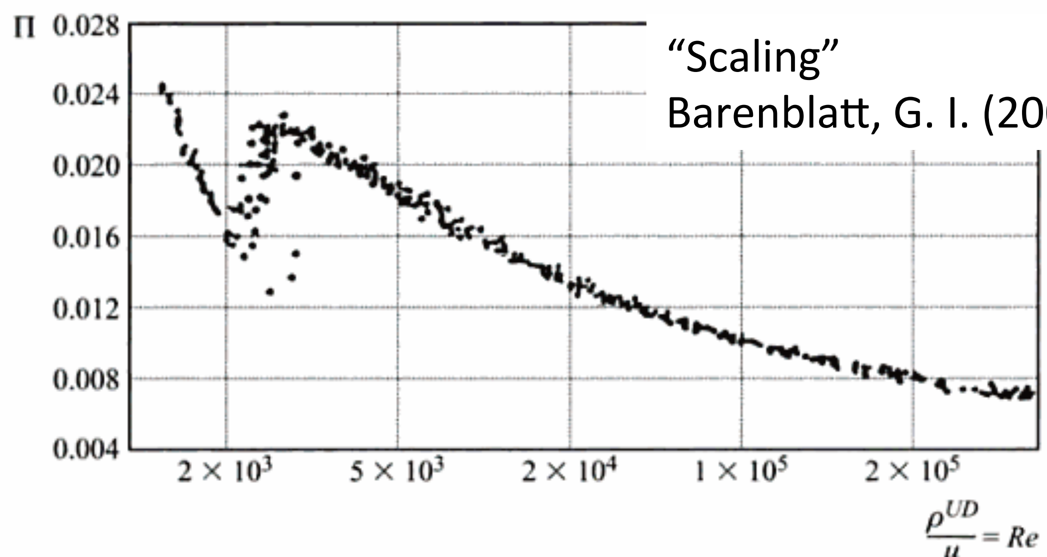
$$\frac{dp}{dx} = \rho U^2 R^{-1} \Pi(\Pi_1)$$

Análisis Dimensional



Osborne Reynolds

$$\Pi_1 \equiv \mathrm{Re} = \frac{\rho U R}{\mu} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \rho U^2 R^{-1} \Pi(\mathrm{Re})$$

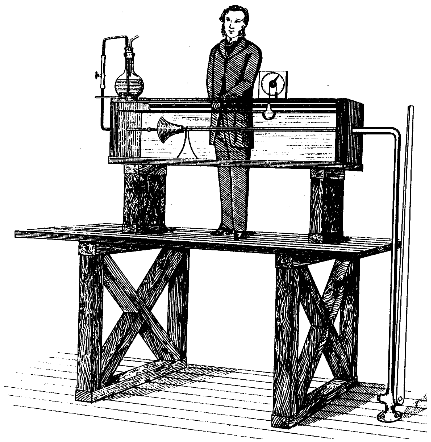


"Scaling"
Barenblatt, G. I. (2003)

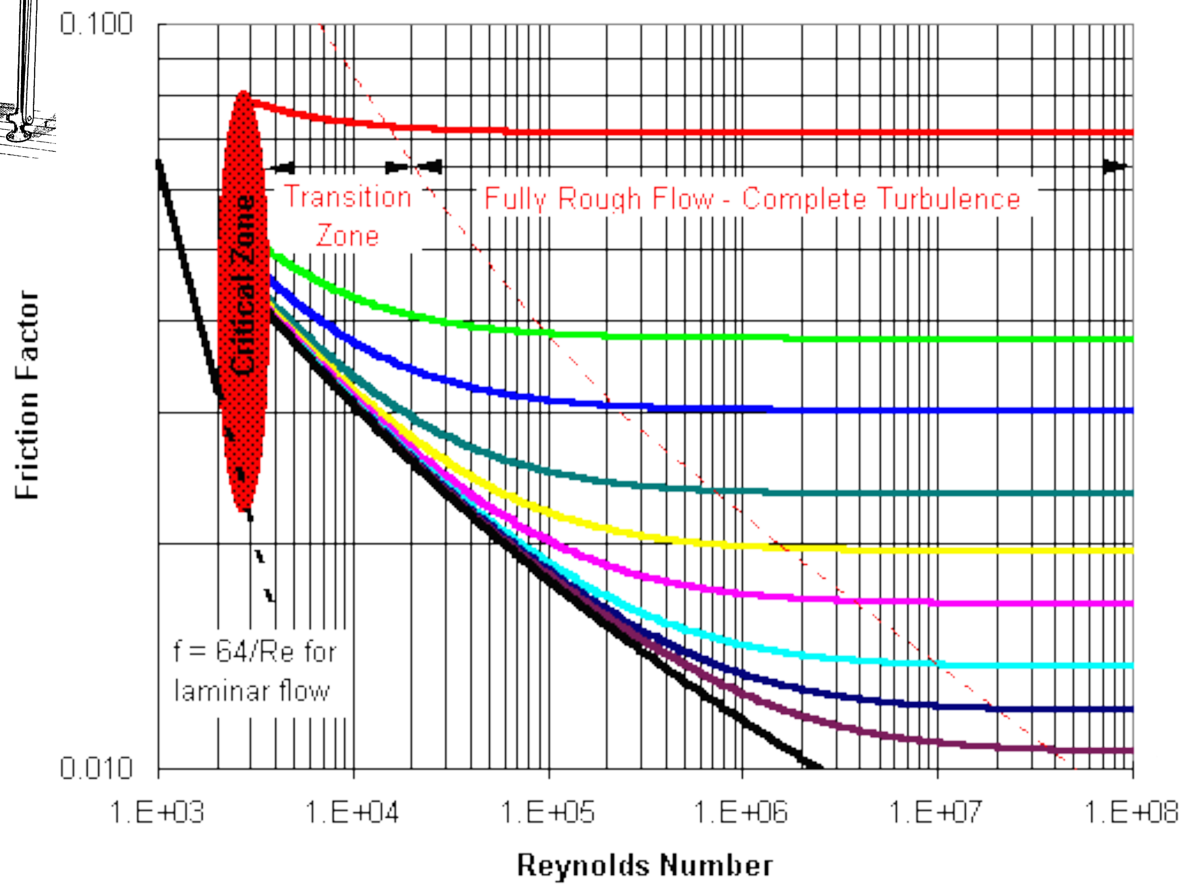
- Curva universal (propiedades del fluido, tubo)
- Experimentos con una sola variable
- Podemos usar modelos en otra escala *(similitud geométrica, cinética, dinámica)*
- Podemos usar distintos fluidos para ver distintos Re

Análisis Dimensional

$$\frac{dp}{dx} = \rho U^2 R^{-1} \Pi(\mathrm{Re})$$



$$f = 2\Pi(\mathrm{Re})$$



Otro parámetro adimensional mas → Rugosidad relativa *e/D*

$$\frac{dp}{dx} = \rho U^2 R^{-1} \Pi(\mathrm{Re}, e/R)$$

Análisis Dimensional: Teorema Π

Número de variables dimensionales en el problema: *n*

Número de dimensiones principales: *m*

Número de parámetros adimensionales es: *n-m*

El desafío es saber cuales son las variables, como en el caso del tubo liso o rugoso

Es un método empírico

Parámetros adimensionales:

Números Adimensionales

Table 2 Change in dimensionless groups with miniaturization

Dimensionless name and symbol	Quantity	Definition	Change		Length scale
Reynolds (Re)	$\frac{\rho U_0 L_0}{\eta}$	$\frac{\text{Inertial forces}}{\text{Viscous forces}}$	Reduced	On the order of	l^2
Péclet (Pe)	$\frac{U_0 L_0}{D}$	$\frac{\text{Fluid convection}}{\text{Fluid diffusion}}$	Reduced		l^2
Capillary (Ca)	$\frac{\eta U_0}{\gamma}$	$\frac{\text{Viscous forces}}{\text{Interfacial forces}}$	Reduced		l^1
Damköhler (Da)	$\frac{D\tau_R}{L^2}$	$\frac{\text{Reaction time}}{\text{Transport time}}$	Increased		l^0
Marangoni (Mg)	$\frac{\Delta\gamma R}{\eta\alpha}$	$\frac{\text{Surface tension gradient}}{\text{Viscous forces}}$	Reduced		l^1
Bond (Bo)	$\frac{\Delta\rho g R^2}{\gamma_i}$	$\frac{\text{Gravity}}{\text{Surface tension}}$	Reduced		l^2
Sherwood (Sh)	$\frac{\kappa L}{D}$	$\frac{\text{Convective mass transport}}{\text{Diffusive mass transport}}$	Reduced		l^1
Deborah (De)	$\tau\left(\frac{\gamma}{\rho R^3}\right)^{1/2}$	$\frac{\text{Relaxation time for polymeric liquid}}{\text{Characteristic time}}$	Increased		$l^{3/2}$
Knudsen (Kn)	$\frac{\lambda}{L}$	$\frac{\text{Mean free path}}{\text{Physical length scale}}$	Increased		l^1
Weber (We)	$\frac{\rho V^2}{\gamma / R}$	$\frac{\text{Inertial forces}}{\text{Surface tension forces}}$	Reduced		l^3

Leyes de escala

Table 1 Change in physical quantities with miniaturization

Physical quantity	Change		Length scale
Linear flow rate	Reduced	On the order of	l^1
Volumetric flow rate	Reduced		l^3
Diffusive rate	Increased		l^2
Driving pressure	Increased		l^4
Gravity effects	Reduced		l^3

Livak-Dahl, E., Sinn, I., and Burns, M. *"Microfluidic Chemical Analysis Systems"*
Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering 2, no. 1 (2011): 325–353.