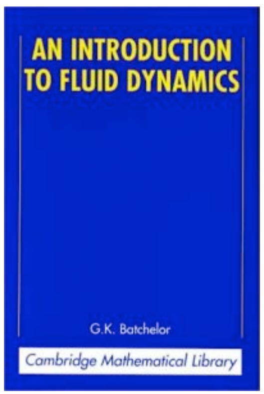
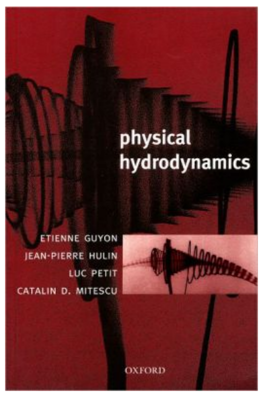
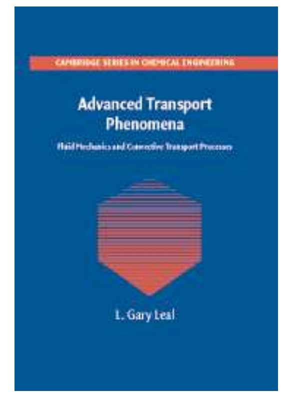
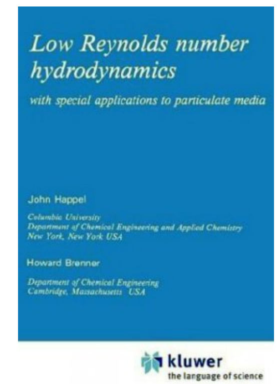
Microfluidica

Ecuaciones de conservación
Dinámica de Fluidos
Ecuación Navier-Stokes
Número de Reynolds
Flujos de Stokes
Consecuencias





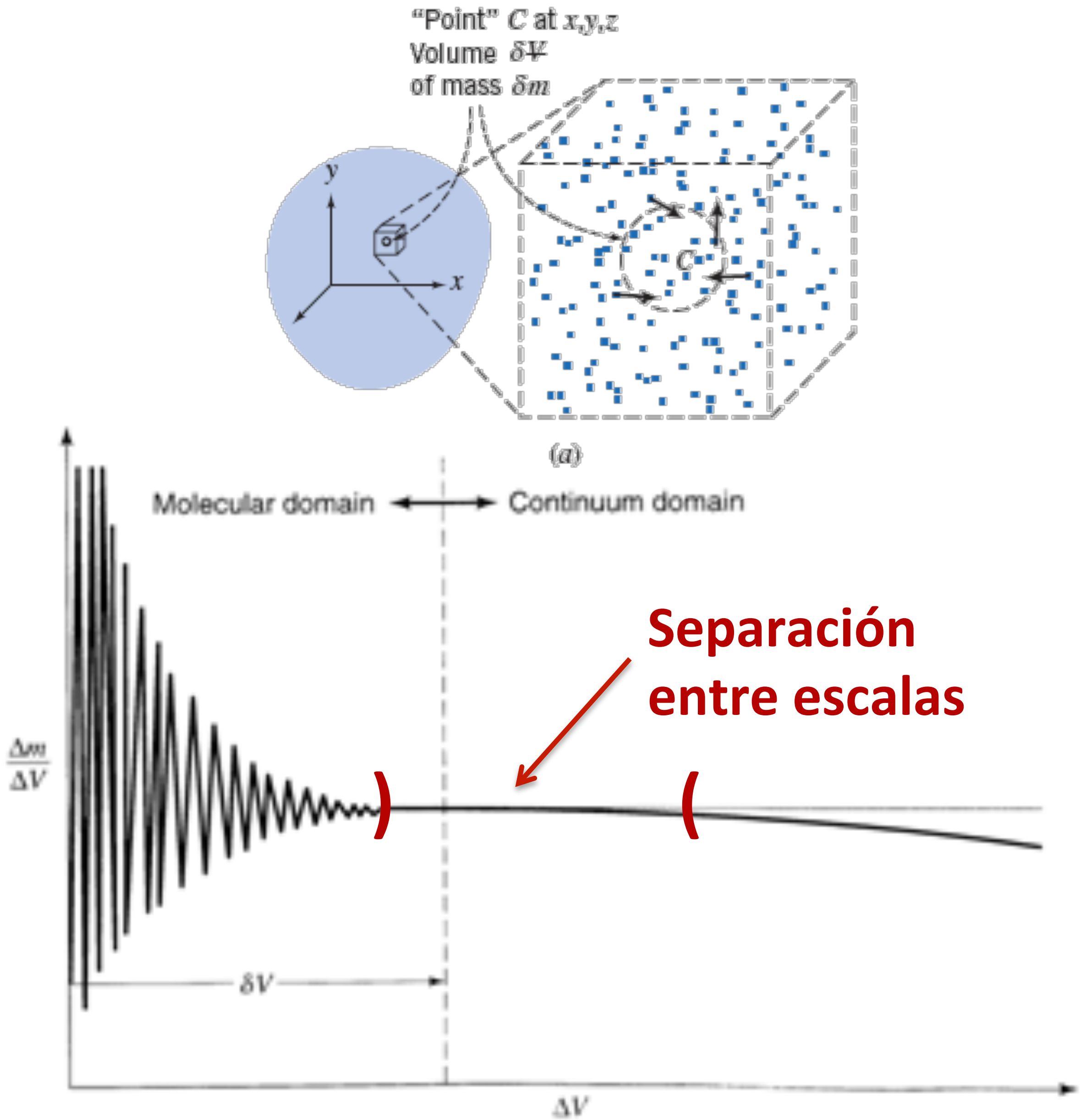




universidad de buenos aires - exactas
departamento de física
Juan José Giambiagi

Microfluidica

Mecánica del Continuo / Teoría del continuo (validas?)



Microfluídica → Nanofluidica

Knudsen (Kn)	$\frac{\lambda}{L}$	$\frac{\text{Mean free path}}{\text{Physical length scale}}$

Increased	l^{1}

Número de Knudsen << 1 → no hay ningún problema

Número de Knudsen ≈ 1

Nuestra aproximación de los fluidos como un continuo tiene problemas.

Las condiciones de borde necesitan correcciones **(por que?)**

Las condiciones de borde Son una imposición de la Teoría del continuo!

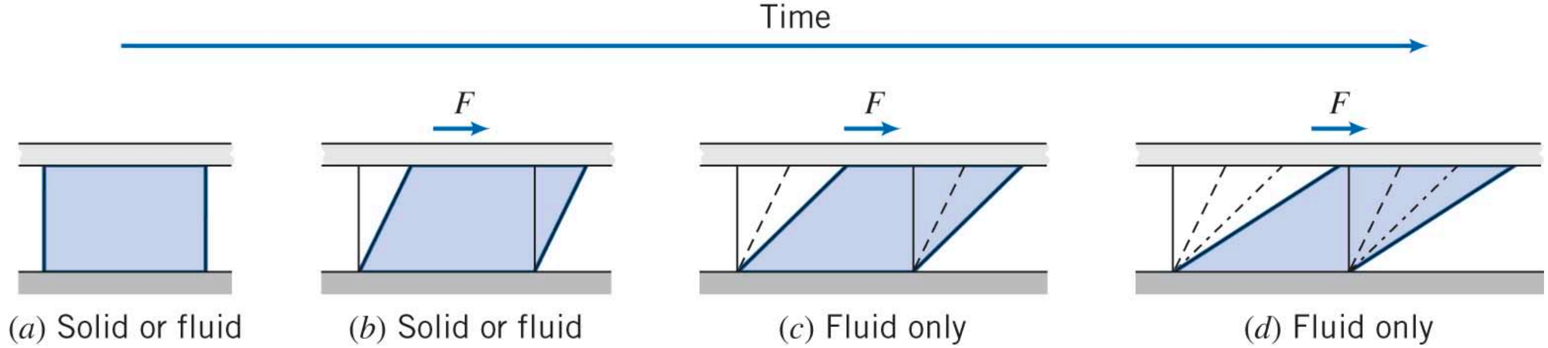
Número de Knudsen >> 1

Hay que abandonar la idea de tratar a los fluidos (gases) como un continuo..

Conceptos básicos

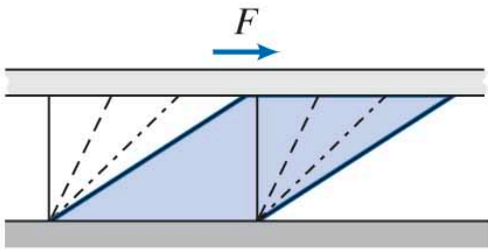
Como definimos que es un fluido?

Aplicamos una fuerza tangencial (esfuerzo de corte)



<u>Fluido</u>: No puede resistir esfuerzos de corte y se deforma de manera continua

Fluido Newtoniano



La fuerza (esfuerzo de corte) es proporcional a la velocidad (rapidez) de deformación

$$\sigma = \frac{F}{A} = \mu \dot{\gamma} \qquad \sigma_{xy} = \frac{F}{A} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics, 8th Edition

Ecuaciones de conservación

Conservación de la Masa

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

Derivada Material o Sustancial

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

Fluido Incompresible

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

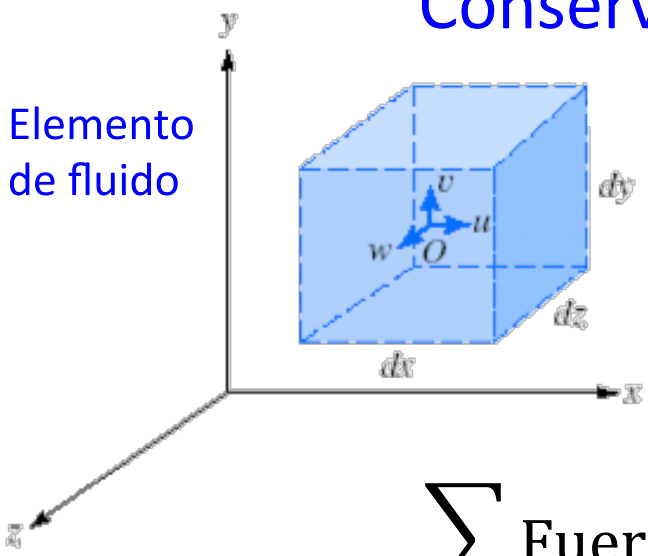
Campo de velocidades es solenoide

Esta aproximación sigue siendo valida en general, pero puede traer problemas en casos particulares, no por la velocidad (<< velocidad del sonido), sino por cambios grandes de presiones (ver Tabeling “bottleneck effect”)

Ecuaciones de conservación

Conservación de Momento (Lineal)

Elemento de fluido



2da Ley de Newton

$$\frac{\mathrm{D}(m\vec{\mathrm{v}})}{\mathrm{Dt}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\int_{V(t)} dV\ \rho\vec{\mathrm{v}} = \sum \mathrm{Fuerzas}$$

$$\sum \mathrm{Fuerzas} = \sum F_{\mathrm{Volumen}} + \sum F_{\mathrm{Superficie}}$$

Fuerzas de Volumen

Actúa en todos los puntos dentro del elemento de fluido

$$F_{\mathrm{Volumen}} = \int_{V(t)} dV\ \rho\vec{\boldsymbol{g}}$$

$$F_{\mathrm{Volumen}} = \int_{V(t)} dV\ q\vec{\boldsymbol{E}}$$

Fuerzas de Superficie

Actúa en la superficie del elemento de fluido

$$\sum \text{Fuerzas} = \sum F_{\text{Volumen}} + \sum F_{\text{Superficie}}$$

Elemento de fluido infinitesimal

Leyes de escala I: Cual de las contribuciones es mas grande ? (# Bond)

Leyes de escala II: Que pasa con la aceleración cuando *l* → *0* ?

$$\sum_{\vec{x}} \vec{F}_{\text{Superficie}} = 0$$

Tienen que estar en equilibrio!!

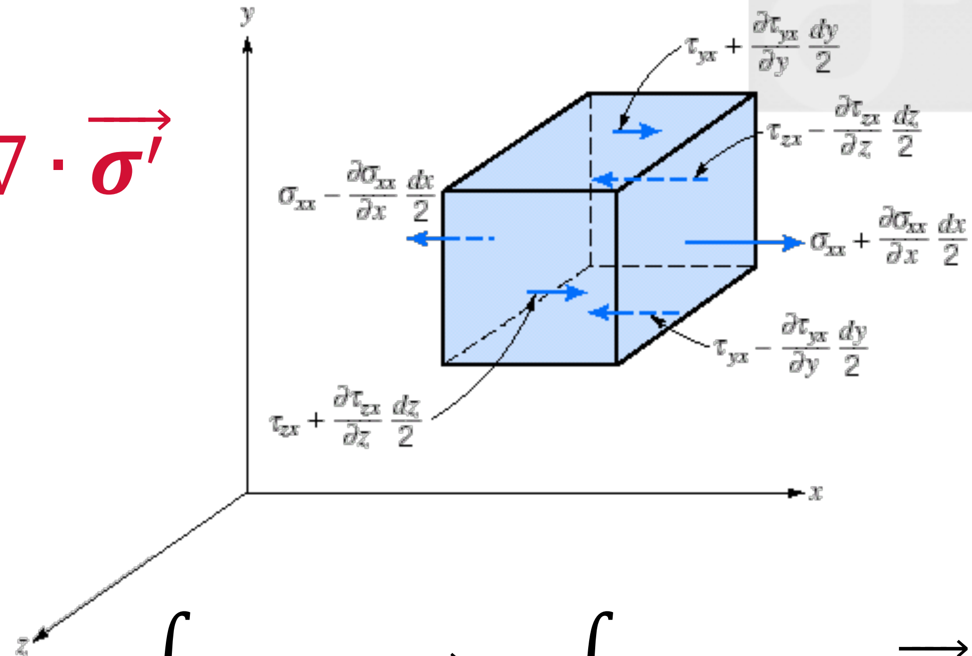
→ Podemos representarlas mediante el tensor de esfuerzos

$$f = \overrightarrow{\sigma'} \cdot \vec{n}$$

Integral de las fuerzas sobre la superficie

$$\int_{\partial V} dS\, \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}'} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \int_V dV\, \nabla \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}'}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}'} = -p\mathbb{I} + \vec{\boldsymbol{\sigma}}$$



$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\int_{V(t)} dV\, \rho\vec{\mathrm{v}} = \sum \text{Fuerzas} = \int_{V(t)} dV\, \rho\vec{\boldsymbol{g}} + \int_{V(t)} dV\, \nabla \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}'}$$

Teorema de transporte de Reynolds + Ecuación de continuidad

$$\rho\frac{\mathrm{D}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = \rho\vec{\boldsymbol{g}} + \nabla \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}'} = \rho\vec{\boldsymbol{g}} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}$$

Newtoniano; Incompresible; Isótropo

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\vec{\boldsymbol{E}}$$

Tensor de deformaciones

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{\mathbf{v}} + \nabla\vec{\mathbf{v}}^{T}\right) \qquad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{x}_j} + \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\right)$$

Ecuación de Navier-Stokes

$$\rho\frac{\mathrm{D}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = \rho\vec{\boldsymbol{g}} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{\mathbf{v}}$$

Fuerzas de Inercia

Fuerzas viscosas

Ecuaciones adimensionales

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathrm{t}}+(\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{v}}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{\mathbf{v}}$$

Elegir magnitudes representativas/características del problema: velocidad v_0 y longitud l_0

$$\overrightarrow{\mathrm{v}'}=\frac{\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}_0};\quad \overrightarrow{\mathrm{x}'}=\frac{\vec{\mathrm{x}}}{\mathrm{l}_0};\quad \mathrm{t}'=\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t}_0}=\frac{\mathrm{v}_0\mathrm{t}}{\mathrm{l}_0};\quad \mathrm{p}'=\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}_0}=\frac{\mathrm{p}\mathrm{l}_0}{\mu\mathrm{v}_0};$$

$$\frac{\rho{\mathrm{v}_0}^2}{\mathrm{l}_0}\left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{v}'}}{\partial \mathrm{t}'}+\left(\overrightarrow{\mathbf{v}'}\cdot\nabla'\right)\overrightarrow{\mathbf{v}'}\right)=\frac{\mu\mathrm{v}_0}{{\mathrm{l}_0}^2}\left(-\nabla'p'+\nabla'^2\overrightarrow{\mathbf{v}'}\right)$$

$$\frac{\rho\mathrm{v}_0\mathrm{l}_0}{\mu}\left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{v}'}}{\partial \mathrm{t}'}+\left(\overrightarrow{\mathbf{v}'}\cdot\nabla'\right)\overrightarrow{\mathbf{v}'}\right)=-\nabla'p'+\nabla'^2\overrightarrow{\mathbf{v}'}$$

Ecuaciones adimensionales

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathrm{t}} + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{v}}\right) = -\nabla p + \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{v}_0 \mathrm{l}_0}{\mu}$$

Que ventaja tiene usar ec. adimensioales?

- *Ley de Semejanza* (o Similitud):
  Geometría; Dinámica → Solución Análoga
- Independencia de las unidades
- Reducción del número de parámetros

Ecuaciones adimensionales

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathrm{t}}+(\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{v}}\right)=-\nabla p+\nabla^2\vec{\mathbf{v}}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho \mathrm{v}_0 \mathrm{l}_0}{\mu}$$

Porque elegimos magnitudes características?

Los distintos términos de la ecuación son O(1) !!

El número de Reynolds representa fuerzas inercia/viscosas

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho \mathrm{v}_0 \mathrm{l}_0}{\mu}=\frac{\rho {\mathrm{v}_0}^2}{\mathrm{l}_0}\Big/\frac{\mu \mathrm{v}_0}{{\mathrm{l}_0}^2}$$

$\mathrm{Re} \ll 1$ ⇨ Ecuación de Stokes

$$0=-\nabla p+\nabla^2\vec{\mathbf{v}}$$

Microfluídica:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{v}_0 \mathrm{l}_0}{\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{longitud } l_0 \approx 100\mu\text{m} \\ \text{velocidad } v_0 \approx 100\mu\text{m/s} \\ \mu \text{ water} \approx 0.001 \text{ kg/m.s} \\ \rho \text{ water} \approx 1\text{g/cm}^3 \end{array}\right\} \quad \mathrm{Re} \approx 0.01$$

En general podemos ignorar los efectos de inercia !

Cuidado: Pueden ser el único efecto presente! *(recordar mas adelante)*

Microfluídica:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{v_0 l_0}}{\mu}$$

Ley de escala para el # Reynolds?

Supongamos que la manera que disponemos
de mover el fluido es
una diferencia de presión constante

$$\mathrm{p_0} = \frac{\mu \mathrm{v_0}}{\mathrm{l_0}}; \Rightarrow \mathrm{v_0} = \frac{\mathrm{l_0 p_0}}{\mu}; \Rightarrow \mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{l_0 p_0 l_0}}{\mu^2} \sim \mathrm{l_0}^2$$

Hicimos alguna otra suposición?

Si, que las fuerzas viscosas y no las inerciales
son las que contrarrestan la presión!

Ecuaciones de Stokes

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}$$

Ecuación lineal en la velocidad!!

Superposición lineal de soluciones

$$(\overrightarrow{\mathbf{v}_1}; \mathrm{p}_1): \; \nabla \mathrm{p}_1 + \nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{v}_1} = 0$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{v}_2}; \mathrm{p}_2): \; \nabla \mathrm{p}_2 + \nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{v}_2} = 0$$

$$\{ (\alpha \overrightarrow{\mathbf{v}_1} + \beta \overrightarrow{\mathbf{v}_2}); (\alpha \mathrm{p}_1 + \beta \mathrm{p}_2) \}$$

$$\nabla(\alpha \mathrm{p}_1 + \beta \mathrm{p}_2) + \nabla^2(\alpha \overrightarrow{\mathbf{v}_1} + \beta \overrightarrow{\mathbf{v}_2}) = 0$$

Permite trabajar con una base de soluciones $\{\mathbf{v}_n\}$

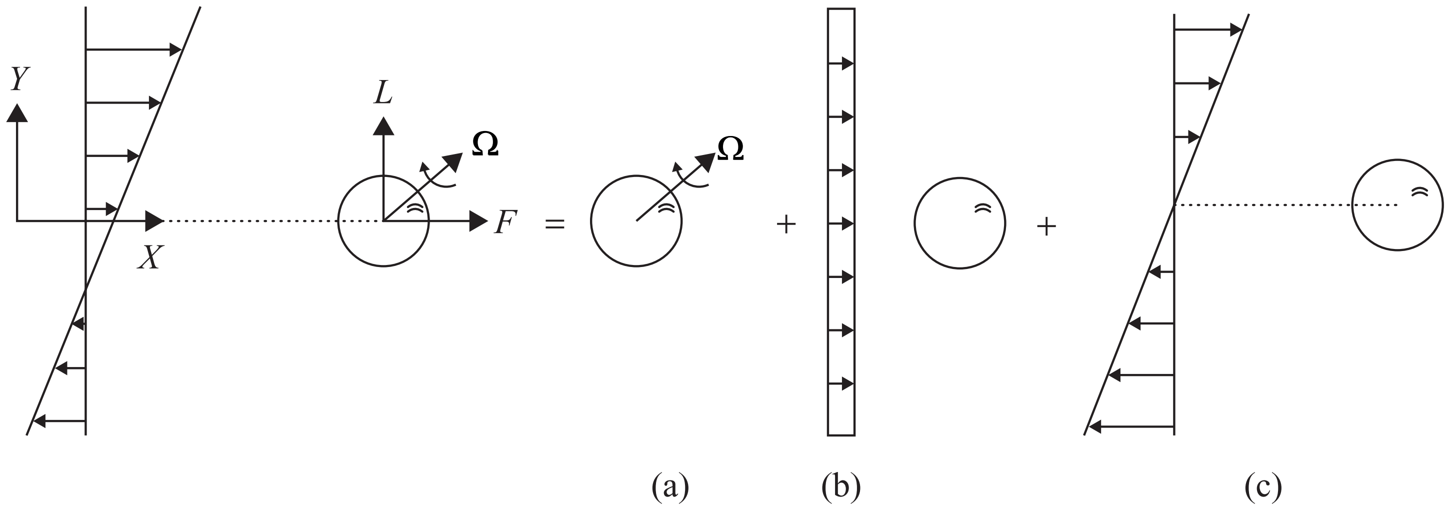
Que pasa con las condiciones de borde?

Ecuaciones de Stokes

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}$$

Ecuación lineal en la velocidad!!

Se puede partir (descomponer) problemas en partes



a) Rotación en un fluido en reposo.
b) Arrastre generado por un fluido en movimiento uniforme.
c) Velocidad de deformación lineal (centrada en una esfera fija).

Fluidos en el régimen de Stokes

Resultados generales

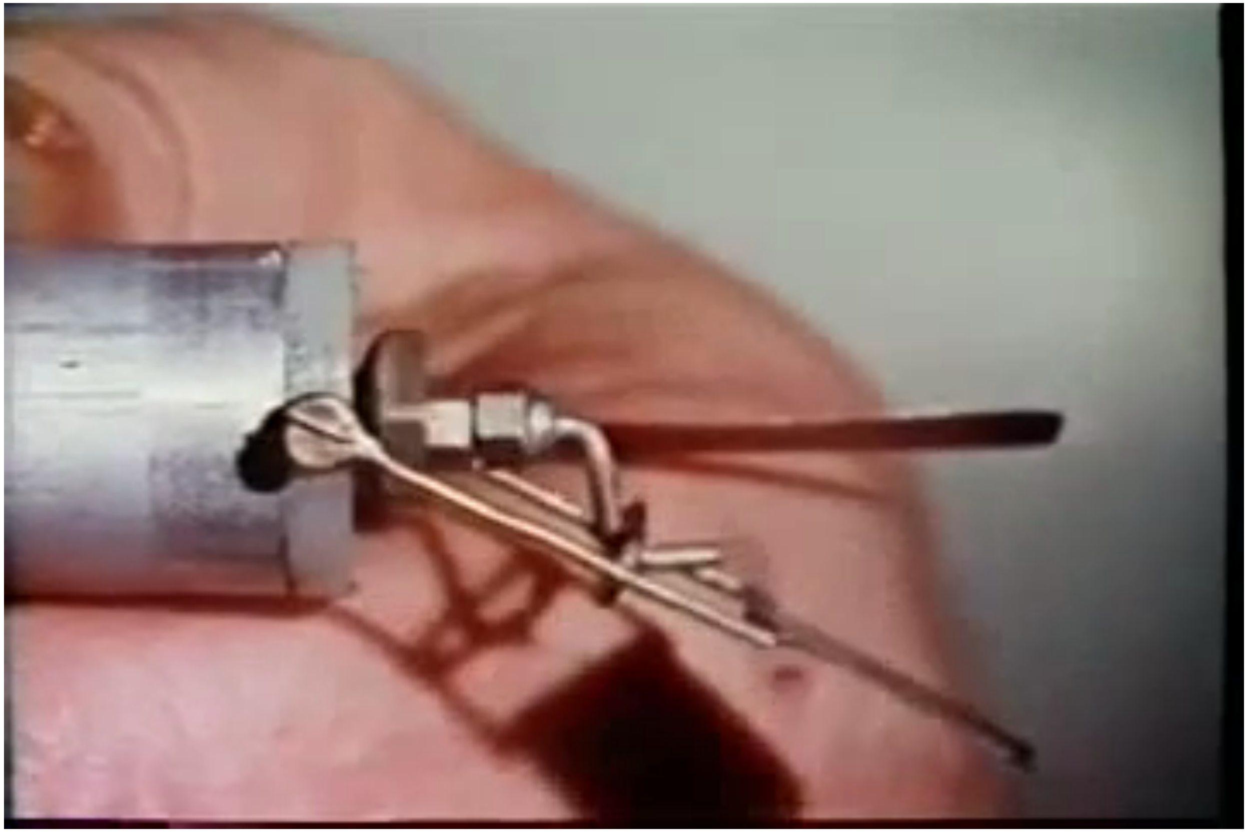
Videos Clásicos G. I. Taylor

Significado # Reynolds

Reversibilidad Cinemática

Fluidos en el régimen de Stokes
Resultados generales

Movimientos simétricos no sirven
Ni para moverse, ni para empujar fluidos!!



Microfluídica:

Preguntas @ Re=0

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}$$

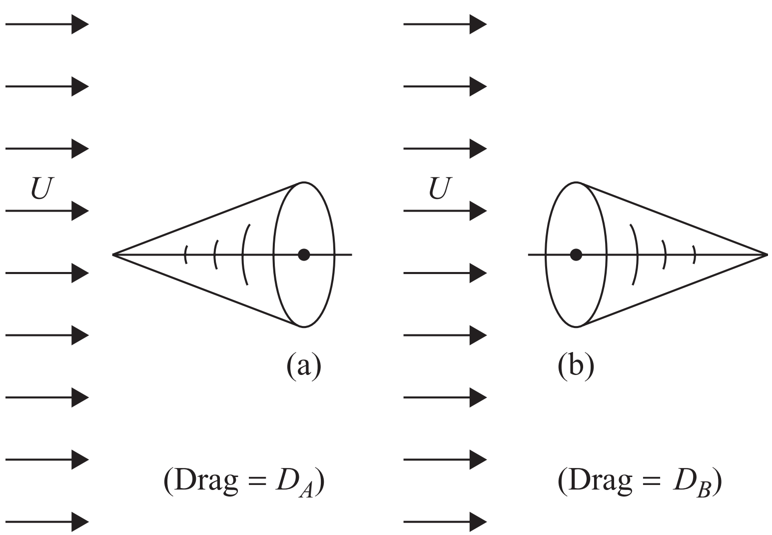
Cual es la velocidad de la esfera si duplico el caudal?

Cual es la fuerza de arrastre en la esfera si duplico el caudal?

Microfluídica:
Preguntas @ Re=0

Cual se mueve más rápido?

Fuerza de arrastre



Puede haber fuerza vertical?