

Calculo de la fuerza de anclaje necesaria para evitar la migracion de un stent ubicado en la aorta abdominal humana

Pablo Cobelli

Out[21]= (En esta celda oculta se definen las directivas graficas necesarias para crear los esquemas mostrados en este documento.)

Motivacion

Un 'stent' medico es un dispositivo tubular metalico en forma de malla usualmente flexible, que tiene el proposito de ensanchar y/o mantener abiertos pasajes naturales del cuerpo que han sido ocluidos por alguna condicion medica. La colocacion quirurgica de stents es una practica usual actualmente, por lo que existen stents arteriales, esofageos, biliares y ureterales, entre otros. La mayor parte de los stents son mantenidos en el lugar de colocacion por la presion de expansion que el mismo dispositivo ejerce contra la pared del pasaje donde es instalado. Sin embargo, en los ultimos años se han reportado casos de migracion de stents que debieron luego ser removidos quirurgicamente por presentar riesgos a la salud del paciente. Como consecuencia, la medicina ha desarrollado recientemente nuevas tecnicas de fijacion de stents a la pared de los conductos donde son instalados, a fin de evitar dicha migracion. (Acerca de la migracion de stents, ver referencias [1-6]).

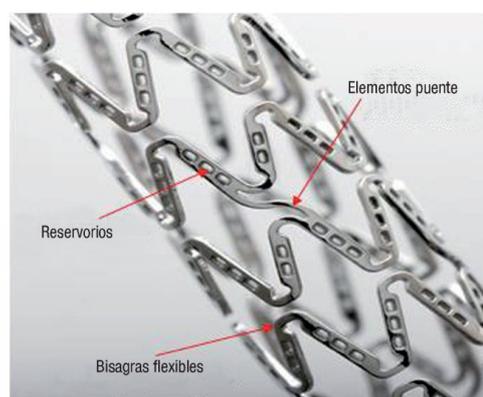




Figura 1. Diferentes tipos de stents usados en medicina.

El panel izquierdo muestra diferentes tipos de stents; el primero a la izquierda (bifurcacion en 'Y') es el mas utilizado en el tratamiento de la aorta abdominal humana. El panel central muestra una vista detallada de la estructura del stent, donde puede verse el mallado, los elementos puente, los reservorios y las bisagras que hacen del stent un elemento altamente flexible. Finalmente, el panel de la derecha ofrece una referencia de tamaño.

In[22]:=

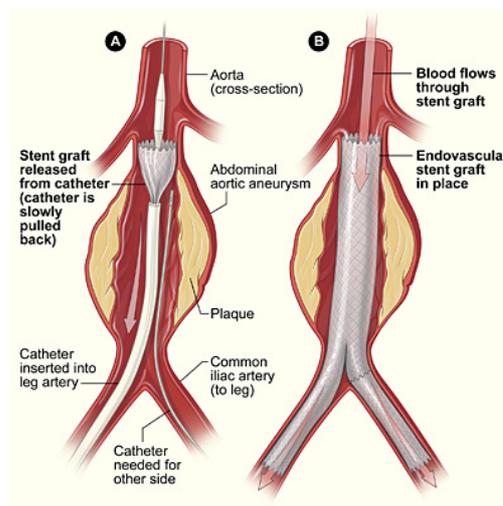
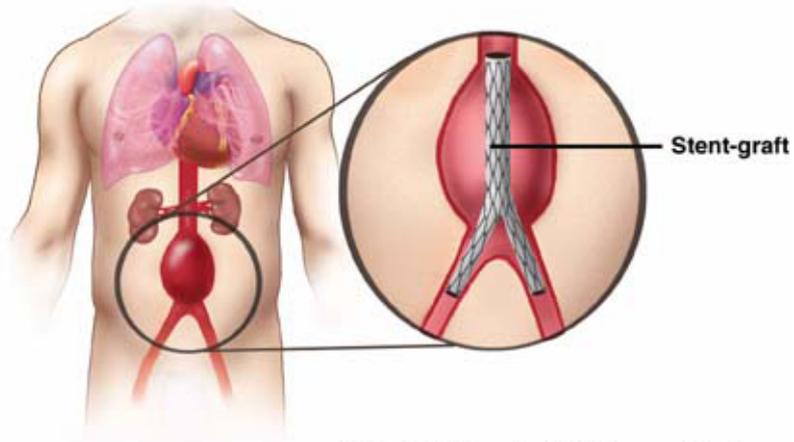


Figura 2. Uso de stents para el tratamiento de la aorta abdominal humana.

El panel de la izquierda muestra de forma esquemática la ubicación del stent empleado para el

tratamiento de un aneurisma. A la derecha, se ilustran las etapas asociadas a la colocacion del stent.

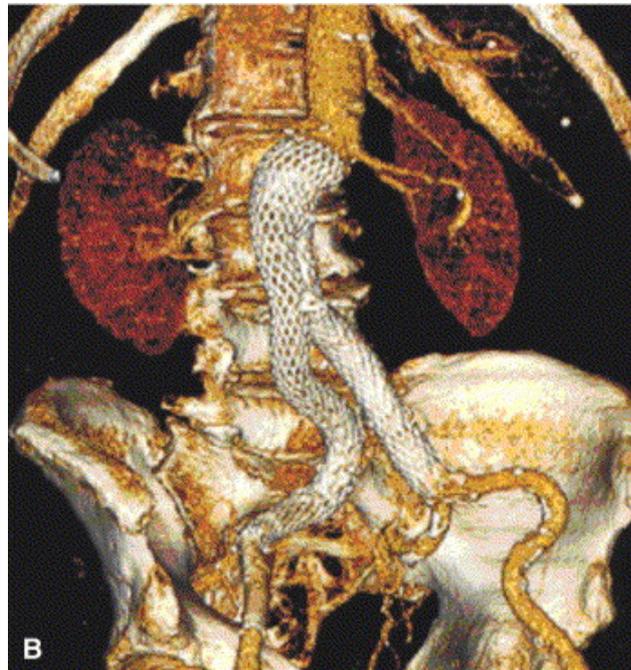
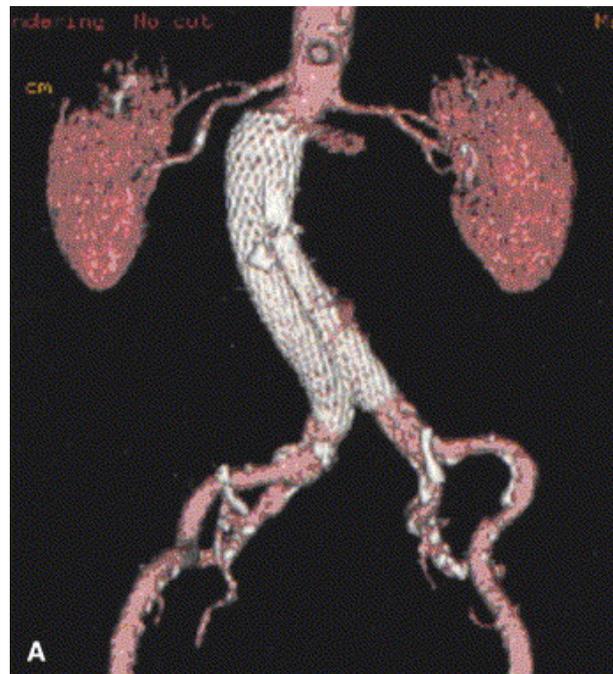


Figura 3. Visualizacion de la migracion de un stent via tomografia computada. Panel A: reconstruccion tridimensional post-procedimiento (es decir, luego de la insercion del stent en la aorta abdominal) basada en una tomografia computada, en un paciente con evidencia de mala fijacion. Panel B: migracion del stent (hacia abajo), la cual debio ser corregida luego quirurgicamente. Imagenes tomadas de [2].

Con esta problematica como motivacion, el ejercicio propone el calculo de la fuerza de

anclaje (o fijacion) necesaria para evitar la migracion de un stent ubicado en la aorta abdominal humana.

El problema concreto

Considere el flujo estacionario e irrotacional de un fluido ideal e incompresible de densidad ρ que fluye por una tubería en 'Y' como la de la figura 4. En ausencia de fuerzas externas, y asumiendo conocidos el semi-ángulo entre las ramas de salida θ , la velocidad u_1 y la presión p_1 a la entrada, y las áreas A_1 y A_2 ,

- Determine la velocidad u_2 y la presión p_2 a la salida de la bifurcación. (Asuma que, a la salida de la bifurcación, tanto la presión como la velocidad es la misma para ambas ramas, y es uniforme sobre cada sección.)
- Calcule la fuerza $\vec{F}_{fl \rightarrow bif}$ que el flujo del fluido ejerce sobre la bifurcación en 'Y' en función de los parámetros del problema.
- Para valores realistas de los parámetros del problema aplicado a la aorta abdominal humana (diámetro del cuello de la aorta: entre 20 y 30 mm, densidad de la sangre: 1060 kg/m^3 , presión a la entrada de la aorta: $120 \text{ mmHg} = 16000 \text{ Pa}$, ángulo de bifurcación: 30° y caudal volumétrico entre 500 y 2000 mL/min), determine la fuerza de anclaje máxima necesaria para evitar la migración del stent (i.e., para retener al stent en su lugar).

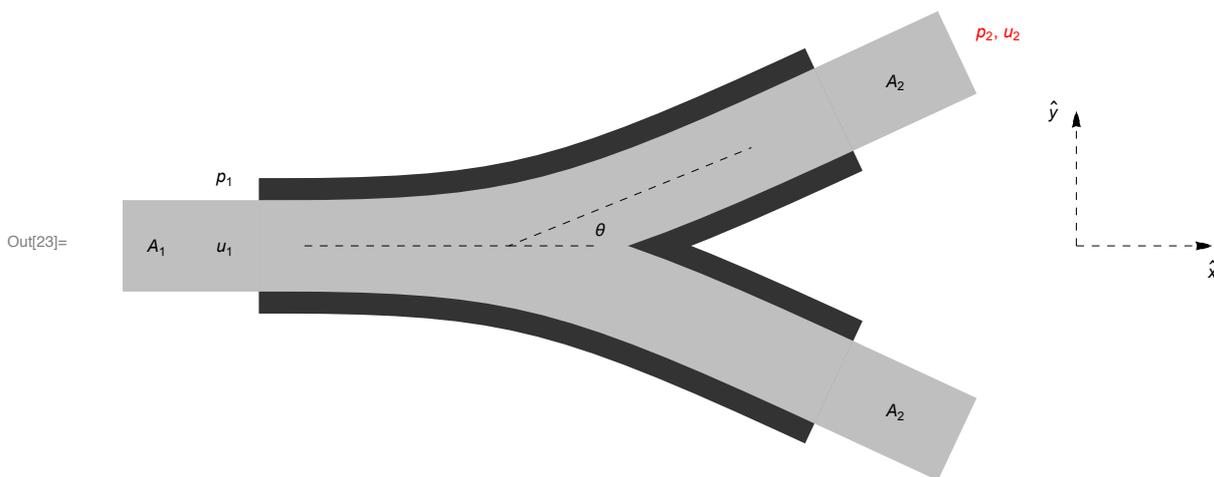


Figura 4. Esquema de la bifurcación en 'Y' usada como modelo de stent en la aorta abdominal humana.

El diagrama muestra en color negro las variables cuyos valores se asumen conocidos a priori y en rojo (para referencia) las magnitudes cuyos valores se desconocen. No se indica la fuerza

$$\vec{F}_{fl \rightarrow bif}.$$

Planteo del problema

En principio, las hipótesis del problema (fluido ideal) y la simetría entre las dos ramas de salida nos indican que la fuerza que el flujo ejerce sobre la bifurcación (el stent) solo puede tener componente no nula en la dirección del flujo entrante, que por comodidad llamaremos \hat{x} . Denotaremos dicha fuerza mediante el símbolo $\vec{F}_{fl \rightarrow bif}$.

Fuerza que el fluido ejerce sobre la bifurcacion

Comencemos por determinar una expresion para la fuerza que ejerce el fluido sobre la bifurcacion. Para ello, observamos que dicha fuerza solo se ejerce por contacto y esta mediada unicamente por la presion del fluido, con lo cual tenemos

Out[24]//TraditionalForm=

$$\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} = - \int p \hat{n} dS_{\text{Bif}}^*$$

siendo S_{Bif}^* la superficie marcada en rojo en la figura 5 (ver debajo), compuesta unicamente de 3 partes:

Out[25]//TraditionalForm=

$$S_{\text{Bif}}^* = S_{\text{B1}}^* \cup S_{\text{B2}}^* \cup S_{\text{B3}}^*$$

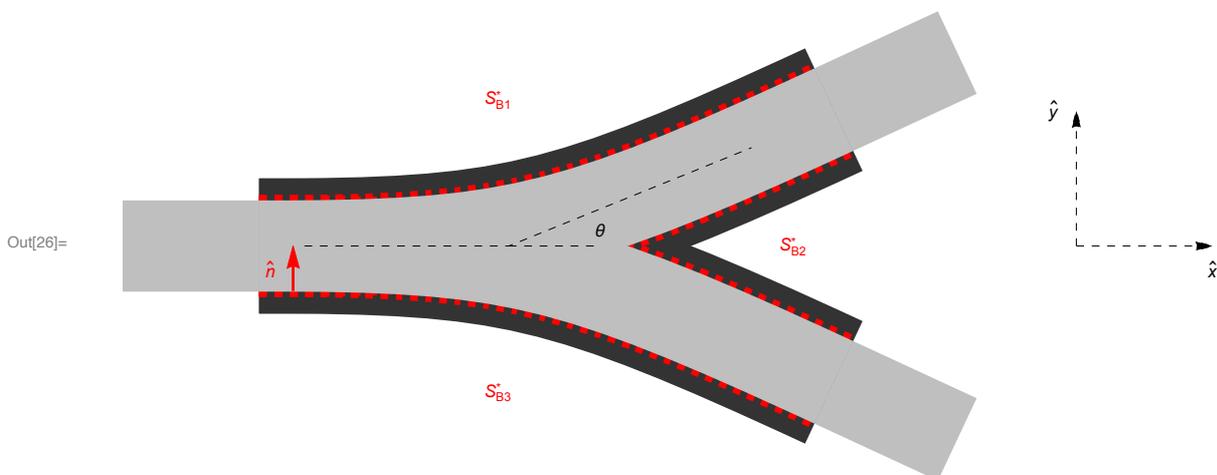


Figura 5. Esquema de la superficie sobre la cual el fluido ejerce fuerza sobre la bifurcacion en 'Y'.

notemos que la superficie S_{Bif} no es cerrada, y recordemos que la normal que estamos considerando es externa a la superficie, es decir, aquella que **apunta, en cada caso, desde la superficie interna de la bifurcacion hacia el fluido**, segun se indica esquematicamente en la figura 5.

Es decir que la expresion para la fuerza que el fluido ejerce sobre la bifurcacion resulta:

Out[27]//TraditionalForm=

$$\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} = - \int p \hat{n} dS_{\text{Bif}}^* = - \left(\int p \hat{n} dS_{\text{B1}}^* + \int p \hat{n} dS_{\text{B2}}^* + \int p \hat{n} dS_{\text{B3}}^* \right)$$

Determinacion de la fuerza a traves del teorema de la cantidad de movimiento

A continuacion vamos a emplear el teorema de la cantidad de movimiento para obtener una expresion para la fuerza que calculamos en la subseccion anterior en terminos de las variables conocidas del problema. Calcular las tres integrales que componen la ultima expresion implicaria conocer la presion del fluido sobre las tres superficies, y disponer de una parametrizacion de las mismas para efectuar la integracion. En lugar de hacer esto, vamos a emplear el teorema de la cantidad de movimiento sobre un volumen de control (fijo en el espacio) cuya superficie frontera incluya a las superficies sobre las cuales deberiamos calcular las integrales de presion.

Con esa premisa, consideremos un volumen de control V_C como el de la figura 6,

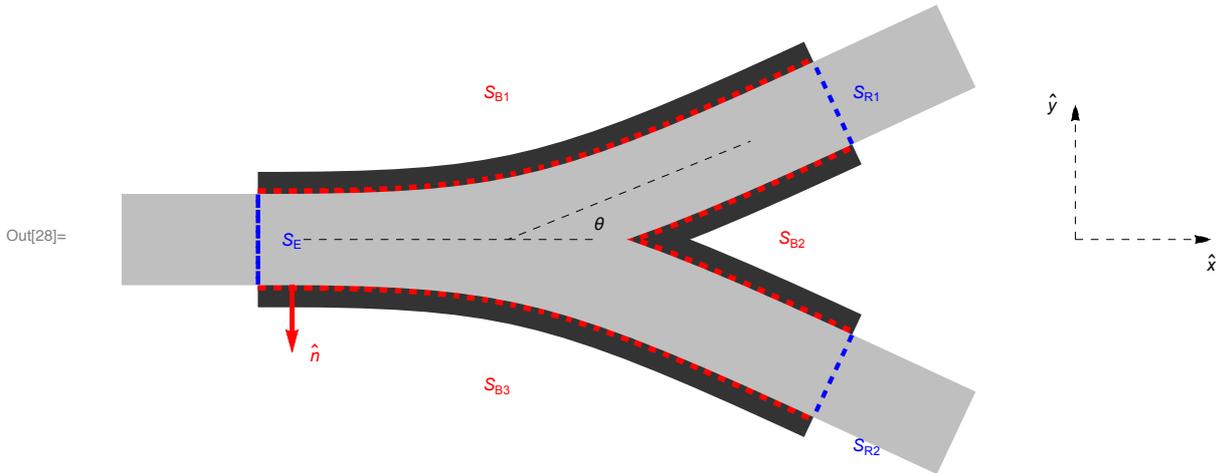


Figura 6. Esquema de la superficie utilizada como delimitadora del volumen de control.

cuya superficie frontera S_C esta dada por la union de 6 superficies abiertas; a saber:

Out[29]/TraditionalForm=

$$S_C = S_E \cup S_{B1} \cup S_{R1} \cup S_{B2} \cup S_{R2} \cup S_{B3}$$

es decir: una superficie de entrada (S_E), dos superficies correspondientes a las dos ramas de salida (S_{R1} y S_{R2}) y tres superficies laterales en contacto con la pared interna del conducto bifurcacion (S_{B1} , S_{B2} y S_{B3}). Todas estas superficies tienen normales orientadas hacia afuera de la region que ellas delimitan. Observemos en particular que las ultimas tres superficies (S_{B1} , S_{B2} y S_{B3}), marcadas en rojo en el esquema de la figura 6, coinciden con aquellas sobre las cuales deberiamos calcular las integrales de presion, **con la unica salvedad de que en este caso las normales apuntan hacia afuera, es decir, desde el fluido hacia la pared del conducto**. Dicho de otra forma: se trata de las mismas superficies que las S_{B1}^* , S_{B2}^* y S_{B3}^* , pero orientadas con las normales invertidas en sentido. De acuerdo a esto, la fuerza que el fluido ejerce sobre la bifurcacion resulta:

Out[30]/TraditionalForm=

$$\vec{F}_{fl \rightarrow bif} = - \left(\int p \hat{n} dS_{B1}^* + \int p \hat{n} dS_{B2}^* + \int p \hat{n} dS_{B3}^* \right) = + \int p \hat{n} dS_{B1} + \int p \hat{n} dS_{B2} + \int p \hat{n} dS_{B3}$$

Apliquemos ahora el teorema de la cantidad de movimiento sobre el volumen de control considerado. El teorema de la cantidad de movimiento (en su version estacionaria) establece que, para un volumen de control V_C fijo en el espacio y delimitado por una superficie S_C , vale:

Out[31]/TraditionalForm=

$$\int \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \cdot \hat{n} dS_C + \int p \hat{n} dS_C = \int \rho \vec{f}_{ext} dV_C$$

teniendo en cuenta que las dos integrales sobre S_C son integrales cerradas (ya que S_C lo es). Si no hay fuerzas externas actuantes sobre el fluido en el volumen de control, resulta

Out[32]/TraditionalForm=

$$\int \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \cdot \hat{n} dS_C = - \int p \hat{n} dS_C$$

Para poner de manifiesto la forma en la que la fuerza que el fluido hace sobre la bifurcacion ingresa naturalmente en la expresion para el teorema de la cantidad de movimiento, observemos que:

Out[33]/TraditionalForm=

$$- \int p \hat{n} dS_C = - \int p \hat{n} d(S_{B1} + S_{B2} + S_{B3}) - \int p \hat{n} d(S_E + S_{R1} + S_{R2})$$

es decir que

Out[34]//TraditionalForm=

$$-\int p \hat{n} dS_C = -\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} - \int p \hat{n} d(S_E + S_{R1} + S_{R2})$$

Notemos ahora que la presion del fluido sobre la superficie de entrada es uniforme y de valor p_1 , y nos dicen que sobre las de salida tambien es uniforme pero de valor p_2 , desconocido y en principio distinto del valor de presion a la entrada de la bifurcacion.

Esto nos permite evaluar las integrales de presion a la derecha de la ultima igualdad, para obtener:

Out[35]//TraditionalForm=

$$-\int p \hat{n} dS_C = -\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} + \{p_1 A_1 - 2 p_2 A_2 \cos(\theta)\}(\hat{x})$$

Luego el teorema de la cantidad de movimiento establece

Out[36]//TraditionalForm=

$$\int \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \hat{n} dS_C = -\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} + \{p_1 A_1 - 2 p_2 A_2 \cos(\theta)\}(\hat{x})$$

A fin de evaluar ahora las integrales a la izquierda de la ultima expresion, es conveniente observar que el producto $(\vec{u} \cdot \hat{n})$ que figura en el integrando solo es no nulo sobre las superficies de entrada y salida (ambas ramas). Luego

Out[37]//TraditionalForm=

$$\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} = -\left(\int \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \hat{n} dS_E + \int \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \hat{n} dS_{R1} + \int \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \hat{n} dS_{R2} \right)$$

Escribamos entonces el valor de cada uno de estos tres integrandos:

Out[38]//TraditionalForm=

$$\{\rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \hat{n})\}_E = \rho u_1(\hat{x})(u_1 \hat{x} \cdot (-\hat{x})) = -\rho u_1^2(\hat{x})$$

Out[39]//TraditionalForm=

$$\{\rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \hat{n})\}_{R1} = \rho u_2(\hat{n}_{R1})(u_2 \hat{n}_{R1} \cdot (\hat{n}_{R1})) = \rho u_2^2(\hat{n}_{R1}) = \rho u_2^2 \cos(\theta)(\hat{x}) + \rho u_2^2 \sin(\theta)(\hat{y})$$

Out[40]//TraditionalForm=

$$\{\rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \hat{n})\}_{R2} = \rho u_2(\hat{n}_{R2})(u_2 \hat{n}_{R2} \cdot (\hat{n}_{R2})) = \rho u_2^2(\hat{n}_{R2}) = \rho u_2^2 \cos(\theta)(\hat{x}) - \rho u_2^2 \sin(\theta)(\hat{y})$$

Dado que los integrandos son constantes sobre cada seccion correspondiente, la ultima expresion resulta:

Out[41]//TraditionalForm=

$$\vec{F}_{\text{fl} \rightarrow \text{bif}} = \{\rho u_1^2 - 2 \rho u_2^2 \cos(\theta) + p_1 A_1 - 2 p_2 A_2 \cos(\theta)\}(\hat{x})$$

dando lugar a una fuerza unicamente en la direccion (\hat{x}) , como cabia suponer en virtud de la simetria del problema.

Velocidad y presion de salida: uso de la conservacion de masa y de energia

Notemos que el resultado obtenido en la seccion precedente depende aun de los valores de parametros no conocidos, como son u_2 y p_2 . Para calcular sus valores nos haran falta dos ecuaciones. La primera de ellas surgira de la condicion de conservacion de masa, mientras que la segunda correspondera a considerar la conservacion de energia.

La conservacion de masa resulta, para este fluido incompresible, dada por la conservacion de caudal volumetrico:

Out[42]//TraditionalForm=

$$u_1 A_1 = 2 u_2 A_2$$

La condicion de conservacion de energia nos lleva a la expresion del teorema de Bernoulli para el flujo estacionario e irrotacional de un fluido incompresible (dado que esas son las hipotesis de

trabajo que figuran en el enunciado del problema). Consideramos entonces la conservacion de energia para un elemento de fluido que fluye desde la entrada a la bifurcacion hasta una de las dos ramas de salida. Esto arroja,

Out[43]/TraditionalForm=

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2}$$

En la seccion siguiente resolveremos las tres ecuaciones (conservacion de masa, energia y la expresion para la fuerza del fluido sobre la bifurcacion) empleando las herramientas de manejo simbolico de *Mathematica*.

Obtencion de las ecuaciones del problema

En la seccion precedente, obtuvimos una expresion para la fuerza que el fluido ejerce sobre la bifurcacion, que aqui llamaremos simplemente F_x , y cuya forma esta dada por:

In[44]= **Eq1 = Fx == $\rho * u_1^2 * A_1 - 2 * \rho * u_2^2 * A_2 * \text{Cos}[\theta] + p_1 * A_1 - 2 * p_2 * A_2 * \text{Cos}[\theta]$**

Out[44]=

$$F_x = A_1 p_1 + A_1 \rho u_1^2 - 2 A_2 p_2 \cos(\theta) - 2 A_2 \rho u_2^2 \cos(\theta)$$

Por otro lado, vimos que la integral primera de Bernoulli resulta en la condicion

In[45]= **Eq2 = $p_1 + \rho / 2 * u_1^2 == p_2 + \rho / 2 * u_2^2$**

Out[45]=

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2}$$

Finalmente, observamos tambien que la conservacion de masa sumada a la incompresibilidad del fluido impone

In[46]= **Eq3 = $u_1 * A_1 == 2 * u_2 * A_2$**

Out[46]=

$$A_1 u_1 = 2 A_2 u_2$$

Las tres ecuaciones del problema resultan entonces:

In[47]= **eqn = {Eq1, Eq2, Eq3}**

Out[47]=

$$\left\{ F_x = A_1 p_1 + A_1 \rho u_1^2 - 2 A_2 p_2 \cos(\theta) - 2 A_2 \rho u_2^2 \cos(\theta), p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2}, A_1 u_1 = 2 A_2 u_2 \right\}$$

Determinacion de la velocidad y presion en las ramas de salida

A partir de la ecuacion de Bernoulli y la de conservacion de caudal volumetrico (siendo que el flujo puede considerarse incompresible), obtenemos la velocidad y la presion en las ramas de salida:

In[48]= **FullSimplify[Solve[{Eq2, Eq3}, {u2, p2}]]**

Out[48]=

$$\left\{ \left\{ u_2 \rightarrow \frac{A_1 u_1}{2 A_2}, p_2 \rightarrow p_1 - \frac{\rho u_1^2 (A_1^2 - 4 A_2^2)}{8 A_2^2} \right\} \right\}$$

Determinacion de la fuerza sobre el stent

Tomamos la ecuacion proveniente del teorema de la cantidad de movimiento para la fuerza F_x , y

eliminamos en ella las variables derivadas u_2 y p_2 que obtuvimos en el apartado anterior

```
In[49]:= Eliminate[eqn, {u2, p2}]
```

```
Out[49]= -A1^2 ρ u1^2 cos(θ) + 4 A1 A2 p1 + 4 A1 A2 ρ u1^2 - 8 A2^2 p1 cos(θ) - 4 A2^2 ρ u1^2 cos(θ) = 4 A2 Fx
```

y finalmente resolvemos para la fuerza en funcion de los parametros del problema:

```
In[50]:= sol = FullSimplify[Solve[%, Fx]]
```

```
Out[50]= {{Fx -> A1 (p1 + ρ u1^2) - \frac{\cos(\theta) (\rho u1^2 (A1^2 + 4 A2^2) + 8 A2^2 p1)}{4 A2}}}
```

Para poder analizar graficamente este resultado, resulta conveniente definir esta expresion en *Mathematica* como una funcion, para lo cual hacemos:

```
In[51]:= Fx[A1_, A2_, ρ_, p1_, u1_, θ_] = Fx /. sol[[1]];
```

Valores tipicos para la aorta abdominal humana

En el caso de la aorta abdominal humana, los valores tipicos de los parametros del problema son los siguientes:

- Diametro del cuello de la aorta: entre 20 y 30 mm,
- Densidad de la sangre: 1060 kg/m³,
- Presion a la entrada de la aorta: 120 mmHg = 16000 Pa,
- Angulo de bifurcacion: entre 0 y 80° (semiangulo entre ramas secundarias),
- Caudal volumetrico: entre 500 y 2000 mL/min.

Para convertir unidades (por ejemplo, las de caudal volumetrico) directamente en *Mathematica*, y expresar el resultado en notacion cientifica, hacemos:

```
In[52]:= ScientificForm[N[
```

```
UnitConvert[Quantity[1000, "Milliliters" / "Minutes"], "Meters" ^ 3 / "Seconds"]]]
```

```
Out[52]//ScientificForm=
```

```
1.66667 × 10-5 m3/s
```

Entonces en terminos de las unidades fundamentales del SI (kg, m, s), podemos tomar los siguientes valores realistas para los parametros del problema en el caso de la aorta abdominal humana:

```
D1 = 22 / 1000; (* diametro de la entrada, en metros *)
D2 = 12 / 1000; (* diametro de las ramas de salida, en metros *)
ρ0 = 1060; (* densidad en kg/m^3 *)
pE = 16 000; (* presion a la entrada *)
θa = 30 Degree; (* semi-angulo entre ramas de salida *)
Qv = 1.6 * 10 ^ (-5);
(* caudal volumetrico medio correspondiente a 1 litro/min *)
```

A partir de estos valores (y los resultados que obtuvimos) podemos calcular las areas de entrada y salida, y la velocidad de entrada:

```
In[59]:= AE = π * (D1 / 2) ^ 2; (* area de entrada *)
```

```
AS = π * (D2 / 2) ^ 2; (* area de salida *)
```

```
uE = Qv / AE; (* velocidad de entrada *)
```

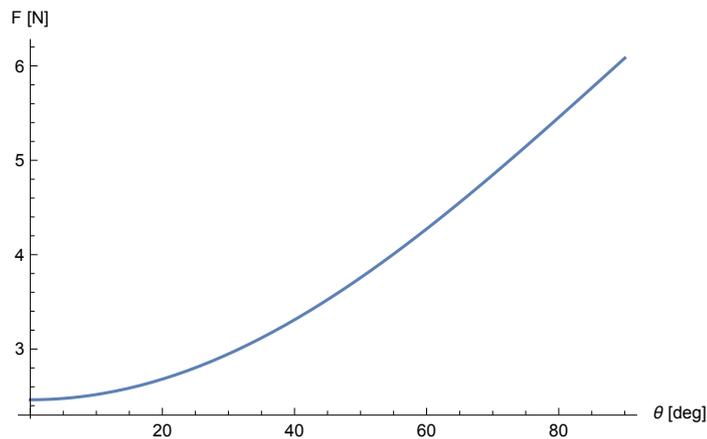
Analisis grafico de los resultados obtenidos

Variando el angulo de bifurcacion

Dejamos todos los parametros del problema con sus valores tipicos (para el caso de la aorta abdominal humana) fijos, y analizamos la variacion de la fuerza que el fluido ejerce sobre el stent cuando varia unicamente el semi-angulo de la bifurcacion.

```
In[62]:= Plot[Fx[AE, AS, ρ0, pE, uE, θ Degree], {θ, 0, 90}, AxesLabel → {"θ [deg]", "F [N]"}]
```

Out[62]=

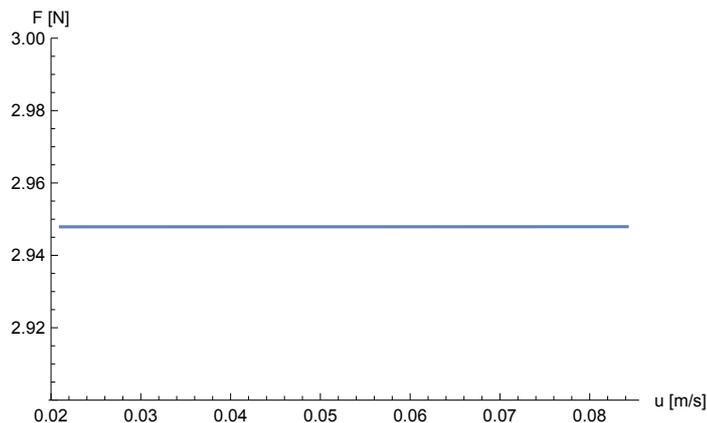


Variando la velocidad de entrada

En este apartado dejamos todos los parametros fijos, consideramos un semi-angulo de bifurcacion de 30° y variamos unicamente la velocidad de flujo, entre la mitad y el doble de su valor tipico. Observamos que la fuerza no depende sensiblemente de este parametro.

```
In[63]:= Plot[Fx[AE, AS, ρ0, pE, u, 30 Degree], {u, uE / 2, uE * 2}, AxesLabel → {"u [m/s]", "F [N]"}, PlotRange → {2.9, 3}]
```

Out[63]=

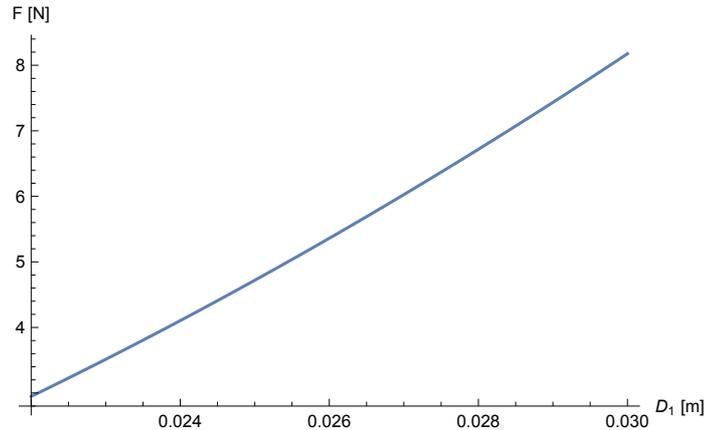


Variando el diametro de entrada

Finalmente, variamos el diametro de la entrada a la bifurcacion, dejando todos los demas parametros fijos en sus valores tipicos. Observamos aqui tambien una variacion amplia cuando el diametro solo varia ligeramente entre valores de 22 a 30 mm.

```
In[64]:= Plot[Fx[ $\pi * (D / 2)^2$ , AS,  $\rho 0$ , pE, Qv / ( $\pi * (D / 2)^2$ ), 30 Degree],
{D, 22 / 1000, 30 / 1000}, AxesLabel -> {"D1 [m]", "F [N]"}]
```

Out[64]=

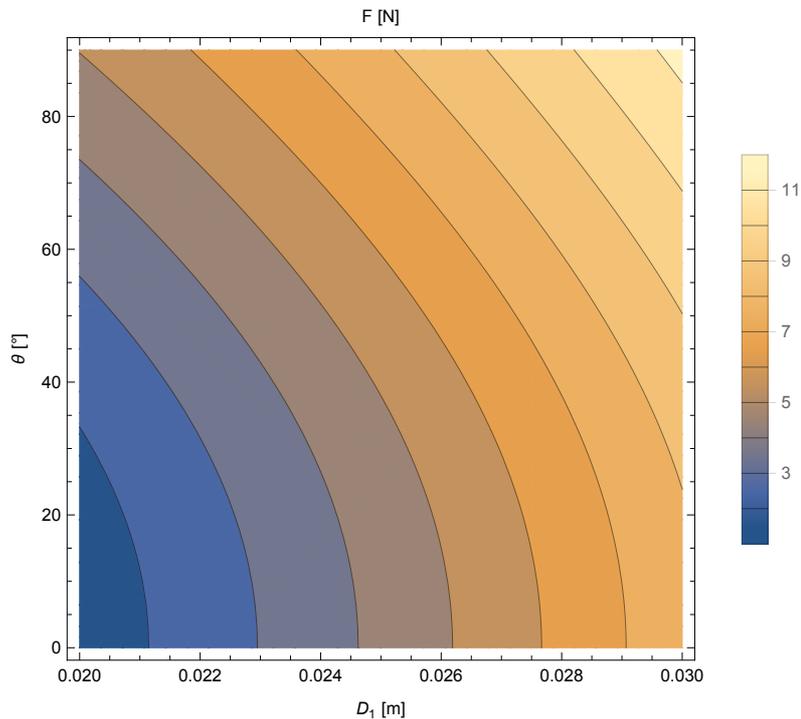


Variando el diametro de entrada y el angulo de la bifurcacion conjuntamente

En este apartado variamos conjuntamente el diametro de entrada y el angulo de bifurcacion, para poder comparar los efectos que una variacion de ellos tiene sobre la fuerza que el flujo realiza sobre el stent.

```
In[65]:= ContourPlot[Fx[ $\pi * (D / 2)^2$ , AS,  $\rho 0$ , pE, Qv / ( $\pi * (D / 2)^2$ ),  $\theta$  Degree],
{D, 20 / 1000, 30 / 1000}, { $\theta$ , 0, 90},
FrameLabel -> {"D1 [m]", " $\theta$  [°]", "F [N]"}, PlotLegends -> Automatic]
```

Out[65]=



Comentarios acerca de la modelizacion del problema y pertinencia del resultado obtenido

A partir del resultado obtenido es posible concluir que la velocidad de entrada del flujo sanguineo al stent tiene un efecto menor sobre la fuerza axial. Por el contrario, la fuerza axial aumenta al crecer

la seccion del tubo principal (de entrada) y el angulo de bifurcacion. Esto se debe a que tanto una reduccion brusca de la seccion como un angulo de bifurcacion grande causan una mayor variacion de la cantidad de movimiento, es decir, una caida de presion mayor.

Conviene tambien mencionar que los efectos debidos a la friccion del fluido (que hemos despreciado en este calculo al suponerlo ideal) dan lugar solo a contribuciones menores, y que el rango calculado para la fuerza de migracion del stent (entre 2 y 8 N) esta en acuerdo con analisis mas detallados del problema (referencias).

Preguntas adicionales y/o variaciones a este problema

A la luz de los resultados obtenidos, resulta interesante tratar de pensar las respuestas a las siguientes preguntas:

- Como se modifica el resultado si orientamos la bifurcacion de manera vertical (tal y como sucede con la aorta abdominal humana) y consideramos los efectos de la gravedad? Que se modifica en el calculo de la fuerza necesaria para evitar la migracion del stent?
- Como cambiarian los resultados obtenidos si la bifurcacion estuviese caracterizada por dos angulos distintos, θ_1 y θ_2 , correspondientes a cada rama de salida?
- Por que razon el resultado depende unicamente de las areas de entrada y salida de la bifurcacion y no depende de la longitud de cada una de las 3 ramas (1 entrante y 2 salientes) consideradas?

In[66]:=

Referencias

1. Avgerinos E.D. et al. "An Overview of Anatomical Fixation and Implications for Long-term Stent-Graft Stability" (review article), *Journal of Endovascular Therapy*, Volume 18, 2011, pp. 462-470.
2. Heikkinen M.A. et al. "The Importance of iliac fixation in prevention of stent graft migration" (clinical research study), *Journal of Vascular Surgery*, Volume 43, Issue 6, 2006, pp. 1130-1137.
3. Benharash P. et al. "Iliac fixation inhibits migration of both suprarenal and infrarenal aortic endografts", *Journal of Vascular Surgery*, Volume 45, Issue 2, 2006, pp. 250-257.
4. Tonnessen B.H. et al., "Mid- and long-term device migration after endovascular abdominal aortic aneurysm repair: A comparison of AneuRx and Zenith endografts", *Journal of Vascular Surgery*, Volume 42, Issue 3, 2005, pp. 392-401.
5. Zarins C.K. et al. "Stent graft migration after endovascular aneurysm repair: importance of proximal fixation", *Journal of Vascular Surgery*, Volume 38, Issue 6, 2003, pp. 1264-1272.
6. Cao P. et al. "Device migration after endoluminal abdominal aortic aneurysm repair: Analysis of 113 cases with a minimum follow-up period of 2 years", *Journal of Vascular Surgery*, Volume 35, Issue 2, 2002, pp. 229-235.

Acerca de esta notebook de *Mathematica*

Mas alla del calculo concreto que se propone en este problema, en esta notebook se ilustra el uso de *Mathematica* como herramienta para la resolucion simbolica, la evaluacion numerica y el analisis grafico de problemas complejos. En particular, se muestra como:

- Usar un notebook Mathematica como un verdadero documento, no solo como una herramienta de calculo, pudiendo definir titulos, secciones, estilos, y componer ecuaciones (sin operar matematicamente sobre ellas) a traves de los comandos HoldForm y TraditionalForm.
- Plantear y resolver un sistema de ecuaciones algebraicas usando Solve.
- Eliminar variables dependientes en las ecuaciones para reexpresar las mismas en terminos de los parametros del problema a traves de la funcion Eliminate.
- Simplificar expresiones utilizando el comando FullSimplify.
- Utilizar los comandos UnitConvert y Quantity para convertir unidades.
- Mostrar un resultado numerico en notacion cientifica usando el comando ScientificForm.
- Definir funciones en *Mathematica* para facilitar el calculo de cantidades o bien su representacion grafica.
- Usar el comando Degree para pasar de grados a radianes sin complicar la lectura del codigo.
- Construir diversos tipos de representaciones graficas (y ajustar detalladamente sus propiedades):
 - Graficar funciones de una variable via el comando Plot.
 - Graficar mapas de contornos 2D via el comando ContourPlot.
 - Crear representaciones graficas en 3D (esquemas) a traves del comando Graphics3D en conjuncion con otros como Cylinder, Sphere, Line y Text.
- Borrar variables al inicio y finalizacion de la evaluacion del notebook usando el comando ClearAll.