Estructura de la Materia 1
Problemas-tipo para el Segundo Examen Parcial
1er cuatrimestre de 2015

Problema 1

Considere el flujo estacionario y adiabático de un gas ideal de exponente γ, en el interior de una tobera convergente–divergente (de área mínima A_{min}) conectada a una cámara de combustión. En la cámara, la velocidad del gas puede considerarse despreciable, mientras que la densidad y velocidad del sonido adoptan valores de reservorio dados por ρ_* y c_*, respectivamente. En condiciones generales, el caudal másico de gas expulsado por la tobera es Q.

1. A partir de consideraciones termodinámicas, obtenga una expresión que le permita determinar la densidad local del gas como función de la velocidad local del sonido, del exponente γ y de las magnitudes de reservorio ρ_* y c_*, únicamente.
2. Escriba las ecuaciones de conservación pertinentes al sistema cámara de combustión–tobera.
3. Derive, para el caso general, la condición que debe cumplirse para que el flujo sea supersónico a la salida de la tobera, si el mismo es inicialmente subsónico.
4. Obtenga una expresión para el valor crítico del caudal másico, Q_{crit}, que satisface la condición anterior, **únicamente** en términos de los parámetros del problema.

Datos: γ, A_{min}, c_*, ρ_*.

Problema 2

Considere un flujo estacionario e incompresible de un fluido de viscosidad dinámica μ, que ocurre entre dos planos paralelos separados por una distancia h. El plano superior se mueve a una velocidad U_1. El campo de velocidades puede modelarse mediante la expresión: $V(x, y) = u_x(y)\,\hat{x} + u_y(y)\,\hat{y}$. Las condiciones de contorno son las siguientes: $u_x(y = 0) = 0$, $u_x(y = h) = U_1$, $u_y(y = 0) = u_y(y = h) = U_2$, las cuales corresponden a la inyección estacionaria de fluido en el contorno inferior y su posterior remoción en el contorno superior (es decir, este modelo permite considerar contornos *permeables*). La figura adjunta muestra un esquema del escenario considerado.

1. Muestre que la única solución admisible para la componente vertical del campo de velocidades es $u_y(y) = U_2$.
2. A partir de lo hallado en el inciso anterior, demuestre que el gradiente de presiones debe ser constante.
3. Considerando el resultado obtenido en (b), resuelva la ecuación de Navier–Stokes para $u_x(y)$.
4. Calcule el esfuerzo viscoso sobre la superficie superior.
5. Muestre que en el límite $U_2 \to 0$ (contornos impermeables) se obtiene el flujo de Couette–Poiseuille dado por:
$$u_x(y) = U_1 \frac{y}{h} - \frac{Ph^2}{2\mu} \left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$
donde P es el gradiente de presiones constante.

Ayuda: La solución general a la ecuación $af''(x) - bf'(x) + c = 0$ siendo a, b y c coeficientes constantes es:

$$f(x) = A \exp\left(\frac{b}{a}\,x\right) + B + \frac{c}{b}\,x$$

siendo A y B constantes a determinar.

Problema 3

Considere las ondas de gravedad de amplitud pequeña que se propagan en la interfaz entre dos fluidos ideales e inmiscibles de densidades ρ_1 y ρ_2 (con $\rho_2 > \rho_1$), de extensión infinita y dispuestos en la configuración estable. A los efectos de modelizar este flujo, considere que se trata de fluidos incompresibles e irrotacionales.

1. Escriba el conjunto completo de ecuaciones que debe satisfacer el potencial de velocidades en el seno de cada capa y en los contornos.
2. Obtenga la relación de dispersión $\omega(k)$ para estas ondas interfaciales. Un paquete de ondas que viaja en la interfaz, conserva su forma a medida que transcurre el tiempo?
3. Cómo se compara la velocidad de fase de estas ondas con la correspondiente al caso de aguas profundas (para las cuales vale $\omega^2 = gk$)?

Figura(s)

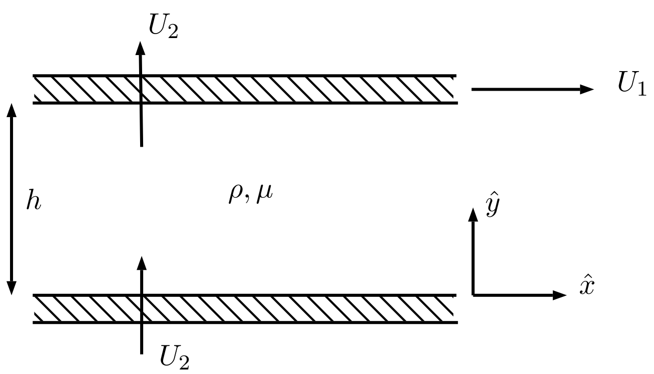

Figura asociada al Problema 2.