LES CLASSIQUES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES ET DE L'HYDRAULIQUE

SÉRIE PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE ENZO O. MACAGNO

Les textes de cette série seront publiés sans corrections d'aucune sorte, excepté lorsqu'il s'agira d'erreurs typographiques évidentes. Le lecteur sera ainsi confronté avec le texte original tel qu'il se présentait. Les traductions seront aussi littérales que possible, de façon à permettre l'accès le plus direct au texte original.
Les suggestions concernant les textes à inclure dans cette série seront les bienvenues, spécialement si des indications précises sont données, dans le cas d'articles très longs ou de livres, sur les parties considérées comme les plus importantes.

CLASSICAL WORKS IN FLUID MECHANICS AND HYDRAULICS

A SERIES SELECTED BY ENZO O. MACAGNO

No attempt to correct errors, if they would be detected, will be made, unless they appear as obvious misprints. Each reader will be confronted with the original writing as it was. Translations in this series are intended to be quite literal with the purpose of providing an access as direct as possible to the original form of the writing.
Suggestions to include material in this series will be most welcome, especially if indications are given of the excerpts that are considered valuable in the case of long papers or books.

AIMÉ VASCHY

1857-1899

SUR LES LOIS DE SIMILITUDE EN PHYSIQUE

Annales Télégraphiques,
troisième série, tome XI, année 1892

Ce document, de même que les pages de Galilée, Newton et Fourier sur la similitude et l'analyse dimensionnelle, ne traite pas directement de mécanique des fluides ou d'hydraulique. Le rôle important joué par l'analyse dimensionnelle et la similitude dans la mécanique des fluides et dans toutes ses applications justifie cependant son inclusion dans la présente série.

This paper, like the excerpts on similitude and dimensional analysis from Galilei, Newton, and Fourier, does not deal directly with fluid mechanics or hydraulics. It is included in this series because of the important role of dimensional analysis and similitude in fluid mechanics and in all of its applications.

SUR

LES LOIS DE SIMILITUDE EN PHYSIQUE

La loi de similitude la plus générale en mécanique et en physique résulte du théorème suivant :

Soient a_1, a_2, a_3, ... a_n des quantités physiques, dont les p premières sont rapportées à des unités fondamentales distinctes et les $(n - p)$ dernières à des unités dérivées des p unités fondamentales (par exemple a_1 peut être une longueur, a_2 une masse, a_3 un temps, et les $(n - 3)$ autres quantités a_4, a_5, ... a_n seraient des forces, des vitesses, etc.; alors $p = 3$). Si entre ces n quantités il existe une relation :

$$F(a_1, a_2, \dots a_n) = 0, \tag{1}$$

qui subsiste quelles que soient les grandeurs arbitraires des unités fondamentales, cette relation peut se ramener à une autre entre $(n - p)$ paramètres au plus, soit :

$$f(x_1, x_2, \dots x_{n-p}) = 0, \tag{2}$$

les paramètres x_1, x_2, ... x_{n-p} étant des fonctions monomes de a_1, a_2, ... a_n (par exemple $x_1 = A\, a_1^{\alpha 1}\, a_2^{\alpha 2} \dots a_n^{\alpha n}$).

Dans le cas particulier où $n = 5$ et $p = 3$, on retrouve le théorème donné par M. Carvallo (*).

Pour démontrer le théorème que nous venons d'énoncer, remarquons que les quantités a_{p+1}, a_{p+2}, ... a_n étant rapportées à des unités dérivées, cela revient à dire que l'on peut trouver des exposants α, β, ... α', β' ... tels que les valeurs numériques des rapports

$$\frac{a_{p+1}}{a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta} \dots a_p^{\lambda}} = x_1, \qquad \frac{a_{p+2}}{a_1^{\alpha'}\, a_2^{\beta'} \dots a_p^{\lambda'}} = x_2, \dots,$$

soient indépendantes des valeurs arbitraires des unités fondamentales. (Ainsi a_1, a_2, a_3, a_4 désignant respectivement une longueur, une masse, un temps et une force, le rapport $\dfrac{a_4}{a_1\, a_2\, a_3^{-2}}$ aurait une valeur indépendante du choix des unités). Or, la relation donnée (1)

(*) Voir p. 21.

$$F(a_1, a_2, \dots a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots) = 0,$$

peut s'écrire :

$$F(a_1, a_2, \dots a_p, x_1\, a_1^{\alpha} \dots a_p^{\lambda}, x_2\, a_1^{\alpha'} \dots a_p^{\lambda'}, \dots) = 0,$$

ou plus simplement :

$$f(a_1, a_2, \dots a_p, x_1, x_2, \dots x_{n-p}) = 0, \qquad (3)$$

Mais, en faisant varier les grandeurs des unités fondamentales, on pourra faire varier arbitrairement les valeurs numériques des quantités a_1, a_2, ... a_p dont les grandeurs intrinsèques sont supposées fixes, tandis que les valeurs numériques de x_1, x_2, ... x_{n-p} ne changeront point. La relation (3) devant subsister, quelles que soient les valeurs arbitraires de a_1, a_2, ... a_p, doit être indépendante de ces paramètres; cette relation prend ainsi la forme la plus simple (2).

C.Q.F.D.

Applications. 1° Si la durée T de l'oscillation d'un pendule ne dépend que de sa longueur l, de sa masse m, de l'accélération de la pesanteur g et de l'écart angulaire initial α, on aura la relation inconnue :

$$F(T, l, m, g, \alpha) = 0.$$

En prenant comme unités fondamentales celles de longueur, temps et masse, et posant :

$$\frac{gT^2}{l} = x_1,$$

on écrira :

$$F(T, l, m, x_1\, l T^{-2}, \alpha) = 0,$$

ou :

$$f(T, l, m, x_1, \alpha) = 0,$$

T, l, m, devant disparaître de cette relation, il vient :

$$f(x_1, \alpha) = 0,$$

ce qui peut se mettre sous la forme connue :

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\, \varphi(\alpha).$$

Nota. — Ici l'un des deux paramètres (α) a une valeur numérique indépendante du choix des unités.

2° Si l'intensité du courant reçu à l'extrémité d'une ligne télégraphique à l'époque t (comptée à partir du moment où la pile a été mise en communication avec la ligne) ne dépend que du temps t, de la longueur l de la ligne, de sa capacité C, de sa résistance R et de la force électromotrice E de la pile (hypothèse justifiée dans certains cas), on posera la relation :

$$F(t, l, C, R, E, i) = 0,$$

ou encore :

$$f\left(t, l, C, \frac{t}{CR}, CE^2, \frac{Ri}{E}\right) = 0$$

Les rapports $\frac{t}{CR}$ et $\frac{Ri}{E}$ ont des valeurs numériques indépendantes du choix des unités, tandis que t, l, C et CE^2 représentant un temps, une longueur, une capacité et une énergie (ou travail) sont rapportés à quatre unités fondamentales distinctes. Ces quatre derniers paramètres doivent donc disparaître, et il reste :

$$f\left(\frac{t}{CR}, \frac{Ri}{E}\right) = 0$$

où :

$$i = \frac{E}{R}\,\varphi\left(\frac{t}{CR}\right),$$

ce qui donne la loi de similitude bien connue de Sir W. Thomson. Pour étudier le régime du courant, il suffit de construire une seule courbe ayant pour abscisse $\frac{t}{CR}$ et pour ordonnée $\frac{Ri}{E}$.

On voit qu'en électricité on a une quatrième unité fondamentale. (Dans l'exemple précédent on a $n = 6$, $p = 4$.)

Notre raisonnement ne suppose nullement que l'on ait fait le choix d'un système électrostatique, électromagnétique ou autre d'unités.

VASCHY.

En 1896, Vaschy publia un livre, *Théorie de l'Electricité,* dans lequel il donna une forme plus générale de son théorème sur l'analyse dimensionnelle :

« ... *Toute relation homogène entre* p *quantités* $a_1\, a_2 \ldots a_p$ *dont les valeurs numériques dépendent du choix des unités, est réductible à une relation entre* (p — k) *paramètres qui sont des combinaisons monomes de* $a_1\, a_2 \ldots a_p$ *et ont des dimensions nulles* ($L^\circ M^\circ T^\circ \ldots = 1$), *pourvu que, parmi les* p *unités des grandeurs* $a_1, a_2 \ldots a_p$, *on en puisse choisir* k *arbitrairement.* Ce nombre k ne peut évidemment être supérieur au nombre n des unités fondamentales. »