

Ejercicios para el curso de Introducción a la Óptica Cuántica

1. Energías y frecuencias típicas (para el 18/5)

- a) Una fuente típica para experimentos de óptica cuántica es el láser de titanio-zafiro, con una longitud de onda de 852 nm, correspondiente a una transición del átomo de cesio. Calcular la frecuencia de la radiación y a qué valor de temperatura corresponde la energía de esta transición ($\hbar\omega = k_B T$). Si se tiene un átomo de dos niveles con esa diferencia de energía entre los niveles, cuál es la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado si está en equilibrio térmico con un ambiente a 300 K?
- b) La transición más importante en el sodio (^{23}Na) tiene una longitud de onda de 589 nm. A qué energía en Joules corresponde esta transición? Qué velocidad del átomo se correspondería con esta energía cinética? Suponiendo que el átomo está inicialmente en su estado excitado y que decae emitiendo un fotón, teniendo en cuenta la conservación de energía e impulso, cuál será la velocidad final v_f del átomo y cuál su energía cinética final E_f ? (hacer la cuenta más fácil usando que $v_f \ll c$). Cuál es la frecuencia de un fotón que tiene esa energía E_f ?

Valores útiles: $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s, $h \simeq 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js, $k_B \simeq 1,4 \cdot 10^{-23}$ J/K, u.m.a $\simeq 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.

2. Evolución coherente (para el 18/5)

Consideramos un átomo con dos niveles internos, $|g\rangle$ (el fundamental) y $|e\rangle$ (un estado excitado). El átomo se encuentra bajo la acción de un láser tal que, en el marco rotante con el láser, el Hamiltoniano para la evolución de los niveles internos es de la forma:

$$H = \frac{\hbar}{2} [-\Delta\sigma_z + \text{Re}(\Omega)\sigma_x - \text{Im}(\Omega)\sigma_y]$$

donde $\Omega \in \mathbb{C}$ es proporcional a la amplitud del láser y Δ la desintonía respecto del átomo, $\Delta = \omega_L - \omega_a$.

- a) Se quiere reescribir el Hamiltoniano en la forma $H = (\hbar/2)\tilde{\Omega}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$, donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, \hat{n} es un vector real de norma 1, y $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}$. Escribir $\tilde{\Omega}$ y \hat{n} en función de los parámetros Δ y Ω .
- b) Mostrar que $(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{I}$.
- c) Usando la propiedad anterior y el desarrollo en serie de potencias de la exponencial, mostrar que la evolución temporal es de la forma:

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = \cos(\tilde{\Omega}t/2) - i\sin(\tilde{\Omega}t/2)\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$$

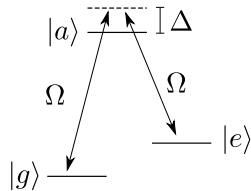
- d) Usando esa expresión, calcular la probabilidad de encontrar un átomo en el estado excitado como función del tiempo, suponiendo que el estado inicial es el fundamental. Indicar cuál es la población máxima que puede transferirse al estado excitado dados Ω y Δ .

Nota 1: $|\Omega|$ es la llamada “frecuencia de Rabi”, ya que es la frecuencia de las oscilaciones en la población para el caso resonante $\Delta = 0$, pero el operador de evolución $U(t)$ es periódico con la mitad de esa frecuencia, por lo que algunos autores llaman frecuencia de Rabi a $|\Omega|/2$ (observar que $U(t = 2\pi/\tilde{\Omega}) = -\mathbb{I}$).

Nota 2: Para evitar ambigüedades, cuando tratemos con átomos de dos niveles vamos a fijar la convención de que la base es $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, de modo que las matrices de Pauli en notación de Dirac son:

$$\sigma_x = |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|, \quad \sigma_y = i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|), \quad \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$$

Esto nos garantiza que $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ corresponden a los operadores de subida y bajada en forma tal que σ_+ es un operador que lleva al nivel excitado y σ_- hace lo opuesto.



3. Eliminación adiabática en un átomo de tres niveles (para el 29/5)

Consideramos en este ejercicio un átomo con tres niveles internos, que llamamos $|g\rangle$, $|e\rangle$, y $|a\rangle$ (por “auxiliar”). Los niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ están conectados con $|a\rangle$ a través de transiciones dipolares, pero no hay una transición directa que los conecte entre sí. Es posible sin embargo generar un sistema efectivo de dos niveles utilizando el nivel $|a\rangle$ como paso intermedio, en una situación que involucra dos láseres, cada uno de ellos muy lejos de la resonancia (ver figura). Esto se conoce como un sistema Λ (para este tratamiento no es importante la relación de energías entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$).

Tomando el cero de energía en el nivel $|g\rangle$ y usando una aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano del sistema es de la forma:

$$H = E_e|e\rangle\langle e| + E_a|a\rangle\langle a| + \hbar\frac{\Omega}{2}(|a\rangle\langle g|e^{-i\omega_1 t} + |g\rangle\langle a|e^{i\omega_1 t}) + \hbar\frac{\Omega}{2}(|a\rangle\langle e|e^{-i\omega_2 t} + |e\rangle\langle a|e^{i\omega_2 t})$$

donde $\omega_1 = E_a/\hbar + \Delta$, $\omega_2 = (E_a - E_e)/\hbar + \Delta$. Asumimos que Ω es real (en este caso esto no implica una pérdida de generalidad) y el mismo para los dos láseres (para simplificar la cuenta). Además, la desintonía $|\Delta|$ es mucho más grande que Ω y que el ancho de línea del nivel $|a\rangle$. En este caso, las transiciones que llevan al nivel $|a\rangle$ están lejos de resonancia mientras que los procesos de dos fotones son resonantes.

El objetivo de este ejercicio es mostrar cómo se deriva un Hamiltoniano efectivo que incluye transiciones entre los niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$, eliminando de la descripción el nivel auxiliar $|a\rangle$. Esta descripción permite tratar transiciones que involucran procesos de dos fotones de la misma manera que las transiciones directas (aclaración: hay un montón de métodos para eliminar el nivel auxiliar, al igual que para derivar ecuaciones maestras).

- a) Pasar a una representación rotante con respecto a $H_0 = E_e|e\rangle\langle e| + E_a|a\rangle\langle a|$, de modo que el Hamiltoniano $H'(t)$ en esta representación está dado por:

$$H'(t) = U_0(t)^\dagger H U_0(t) - H_0$$

donde $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$. Calcular $H'(t)$ y mostrar que todos sus términos oscilan a una frecuencia mucho más rápida que la escala asociada a su amplitud.

- b) El procedimiento que sigue se basa en esa diferencia de escalas temporales. Por claridad, conviene hacer una expansión en el parámetro adimensional y pequeño $\epsilon = \Omega/\Delta$. Para esto, definimos una variable temporal adimensional $\tau = t\Delta$, con lo que el Hamiltoniano obtenido en el ítem anterior se transforma según $H' \rightarrow \tilde{H} = H'/\Delta$. Escribir $\tilde{H}(\tau)$ y ver que sus términos son proporcionales a $\hbar\epsilon$, y oscilan en una escala temporal de orden 1.
- c) La evolución temporal $\tilde{U}(\tau)$ en esta representación puede escribirse como serie de potencias en ϵ según:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tau) &= \sum_{n=0} \tilde{U}_n(\tau) \\ &= \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^\tau d\tau_1 \tilde{H}(\tau_1) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \tilde{H}(\tau_2) \tilde{H}(\tau_1) + \sum_{n>2} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^\tau d\tau_n \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-1} \tilde{H}(\tau_n) \dots \tilde{H}(\tau_1) \end{aligned}$$

Dado que ya no hay escalas asociadas a la oscilación, resulta claro que $\tilde{U}_n(\tau)$ es proporcional a ϵ^n (y a alguna función de la variable adimensional τ).

En primer lugar, evaluar $\tilde{U}_1(\tau)$, el término de orden uno del operador de evolución, y mostrar que es una función puramente oscilatoria de τ , es decir que pasado un tiempo τ de orden 1 (o sea, un tiempo t de orden Δ^{-1}) esta función ya no sigue aumentando, y siempre resulta de orden ϵ .

- d) Evaluar ahora el término de segundo orden en el operador de evolución, $\tilde{U}_2(\tau)$, y mostrar que tiene dos componentes: una parte proporcional a τ , que aumenta en el tiempo, y otra parte que es oscilatoria. Indicar cuál es la condición sobre τ para que el término lineal en τ proveniente de \tilde{U}_2 sea mucho mayor que los términos oscilatorios de \tilde{U}_1 . Mostrar que esta condición también implica que los términos oscilatorios en \tilde{U}_2 pueden despreciarse. Escribir la misma condición pero para la variable temporal t .
- e) En forma similar pueden evaluarse todos los términos de la expansión. Los términos de orden impar siempre llevan a contribuciones oscilatorias en τ , mientras que los pares siempre dan lugar a algunas contribuciones que no oscilan. La idea es identificar las contribuciones dominantes con la evolución dada por un Hamiltoniano efectivo \tilde{H}_{eff} independiente del tiempo.
En particular, el término lineal en τ proveniente de \tilde{U}_2 corresponde al primer orden de la evolución efectiva, $\tilde{U}_{1,\text{eff}}(\tau)$ (y así sucesivamente con todas las contribuciones no oscilatorias). Inferir de $\tilde{U}_{1,\text{eff}}(\tau)$ la forma del Hamiltoniano efectivo \tilde{H}_{eff} . Notar que el acoplamiento al nivel $|a\rangle$ desaparece, mientras que se genera un acoplamiento efectivo entre los otros dos niveles, además del AC-Stark shift.
- f) Volver a la representación inicial con tiempo t (es decir multiplicar el Hamiltoniano obtenido por Δ). Indicar el valor del AC-Stark shift para cada uno de los tres niveles, y si la energía efectiva de cada uno aumenta o disminuye según sea el signo de Δ . Indicar también cuál es la frecuencia del acoplamiento efectivo entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$ (notar que el tratamiento perturbativo implica que esta frecuencia debe ser mucho menor que Ω).

4. Estados y operadores del campo electromagnético (para el 29/5)

Consideramos un único modo del campo electromagnético. Este modo corresponde a una onda plana con polarización lineal, y su contribución al operador de campo eléctrico en la dirección de polarización y en una cierta posición \vec{r} toma la forma: $E = E_0(ae^{i\chi} + a^\dagger e^{-i\chi})$, donde $\chi = \vec{k} \cdot \vec{r}$ (en representación de Heisenberg es $\chi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$). El Hamiltoniano para este único modo es de la forma $H = \hbar\omega a^\dagger a$ (proporcional al número de fotones en el modo).

- a) Calcular el valor medio del campo y su varianza (teniendo en cuenta sólo este modo) en un estado $|n\rangle$. Usando este resultado, calcular el valor medio del campo y su varianza para un estado térmico con número medio de fotones \bar{n} , teniendo en cuenta que el estado corresponde a una superposición estadística en la que se encuentran n excitaciones con probabilidad $p_n = \bar{n}^n / (\bar{n} + 1)^{n+1}$.
- b) Calcular el valor medio de H y su varianza para los mismos estados que en el ítem pasado, y explicar los resultados.
- c) En lo sucesivo vamos a analizar estados coherentes del campo, de la forma

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

donde los coeficientes son $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), y $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ es el operador de desplazamiento (notar que $D(\alpha)^\dagger = D(-\alpha)$). Usando la expansión en serie de potencias del operador D , calcular $[a, D(\alpha)]$. Usar este resultado para calcular la acción del operador de desplazamiento sobre el operador de creación y sobre el campo eléctrico, según $D(\alpha)^\dagger a D(\alpha)$ y $D(\alpha)^\dagger E D(\alpha)$ respectivamente.

- d) Usando los resultados del ítem anterior calcular valor medio y varianza para el campo eléctrico y el Hamiltoniano en el estado coherente $|\alpha\rangle$. Comparar las propiedades de estos estados con las de estados de Fock y térmicos.

5. Modelo de Jaynes-Cummings (para el 1/6)

Consideramos un átomo de dos niveles en una cavidad tal que el átomo se acopla a un único modo del campo electromagnético. Usando la aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano puede escribirse en la forma $H = H_0 + V$, con $H_0 = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c a^\dagger a$ y $V = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$ (el uso de la letra g para dos cosas distintas es convencional... dado el contexto tiene que ser claro a qué se refiere).

- a) Mostrar que el número total de excitaciones se conserva, es decir $[H, N] = 0$ donde $N = a^\dagger a + |e\rangle\langle e|$.
- b) De acuerdo al resultado anterior, el espacio puede descomponerse en subespacios de dos niveles de la forma: $\{|g, n+1\rangle, |e, n\rangle\}$, según los autovalores del operador N , y la evolución temporal sólo acopla pares de estados dentro del mismo subespacio (el estado $|g, 0\rangle$ queda desacoplado de los demás). Escribir el Hamiltoniano como matriz de 2×2 para cada uno de estos subespacios.

- c) Dibujar esquemáticamente el espectro del subespacio $\{|g, n + 1\rangle, |e, n\rangle\}$ como función de la desintonía $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$ (dejando fijo ω_c u ω_0 a elección). Indicar qué forma toman los autoestados y autovalores en el caso resonante y en los límites muy lejos de la resonancia.
- d) Considerar el caso resonante, $\Delta_c = 0$, y calcular todos los autoestados y autovalores. Graficar los primeros siete niveles de energía (recordar que el modelo asume $\omega_0 \gg g$), e indicar los autoestados correspondientes. Calcular la evolución temporal de un estado inicial $|g, n + 1\rangle$, y la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado como función del tiempo. Indicar la frecuencia de oscilación de esta probabilidad.
- e) Suponer que en el caso resonante, el estado inicial es de la forma $|g, \alpha\rangle$ con el átomo en el estado fundamental y el campo en un estado coherente. Calcular la evolución temporal del estado, y la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado como función del tiempo, teniendo en cuenta que $P_e(t) = \sum_n P_{e,n}(t)$, es decir la suma de las probabilidades de encontrar el átomo en el estado excitado y el campo en cualquier estado $|n\rangle$. Graficar (numéricamente) para los casos $|\alpha|^2 = 10, 20, 30, 50$. Discutir el comportamiento para $|\alpha|^2 \gg 1$ y comparar con el resultado semiclassical.

6. *Acoplamiento coherente entre átomos y campo electromagnético (para el 1/6)*

Buscar en internet o en revistas información sobre al menos dos grupos distintos que realicen experimentos acoplando transiciones atómicas con el campo electromagnético a nivel cuántico (es decir, con un acoplamiento no despreciable al nivel de uno o pocos fotones). Averiguar en cada caso:

- a) Si se trata de experimentos con un único átomo o muchos, y si se trata de iones o átomos neutros.
- b) Cuál es la longitud de onda del campo y a qué rango de frecuencias corresponde (óptico, infrarrojo, microondas?).
- c) A qué transición atómica se acopla el campo (entre qué niveles atómicos), y cuál es la vida media de los niveles involucrados.
- d) El experimento considerado, corresponde al régimen en resonancia o fuera de resonancia? Si se trata del segundo caso, cuál es la diferencia de frecuencias entre el campo y la transición atómica?
- e) Se trata de un campo en una cavidad? Si es así, cuál es la tasa de pérdidas o el ancho de línea del modo relevante de la cavidad? (nota: se puede inferir si se menciona el factor de calidad, la definición puede variar un poco pero básicamente $Q = \omega/\Delta\omega$). Se menciona el tamaño de la cavidad?Cuál es la magnitud del acoplamiento entre el campo y el (los) átomo(s)?
- f) Si no hay cavidad: se menciona la constante de acoplamiento entre el campo y el (los) átomo(s)? Alternativamente, se brinda alguna información parecida, por ejemplo cuántas repeticiones del experimento son necesarias para lograr que un fotón sea absorbido por el átomo?
- g) Alguna otra cosa que sea importante para la descripción del experimento?