Ejercicios para el curso de Introducción a la Óptica Cuántica - parte 2

7. *Régimen dispersivo y eliminación adiabática (para el 12/6)*

   Consideramos de nuevo el modelo de Jaynes-Cummings del problema 5. Partimos del Hamiltoniano:

   $$H = \hbar[\omega_0|e\rangle\langle e| + \omega_c\, a^\dagger a + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)]$$

   Nos interesa calcular el Hamiltoniano efectivo en el régimen dispersivo, $|\Delta| \gg g$, con $\Delta = \omega_c - \omega_0$. Para empezar, definimos una representación de interacción con respecto al Hamiltoniano $H_0 = \hbar(\omega_0|e\rangle\langle e| + \omega_c a^\dagger a)$.

   a) Mostrar que en la nueva representación la evolución está dada por el Hamiltoniano dependiente del tiempo

   $$\tilde{H}(t) = \hbar g(a\sigma^+ e^{-i\Delta t} + a^\dagger\sigma^- e^{i\Delta t}).$$

   Este Hamiltoniano tiene la misma propiedad que el del problema 3 (es decir los términos oscilan en una escala mucho más rápida que la asociada a su amplitud). A continuación se pueden repetir los mismos pasos que en el problema 3 pero nos vamos a saltear algunos, ahora que ya se dan por entendidas las justificaciones del método.

   b) Indicar de qué orden es el término de orden uno en g, $\tilde{U}_1(t)$, que es oscilatorio en el tiempo.

   c) En el término de segundo orden en g, $\tilde{U}_2(t)$, evaluar la parte proporcional a $g^2 t/\Delta$, que aumenta en el tiempo (el resto es proporcional a $(g/\Delta)^2$ y es oscilatorio por lo que puede despreciarse igual que en el problema 3). Escribir la condición para que el término de orden 2 domine sobre el de orden 1.

   d) Identificar la contribución que aumenta en el tiempo con la evolución dada por un Hamiltoniano efectivo $\tilde{H}_{\text{eff}}$ independiente del tiempo y tal que el término lineal en t proviniente de $\tilde{U}_2(t)$ corresponda al primer orden de la evolución efectiva, $\tilde{U}_{1,\text{eff}}(t)$. Mostrar que este Hamiltoniano efectivo debe tener la forma:

   $$\tilde{H}_{\text{eff}} = \hbar\frac{g^2}{\Delta}(a^\dagger a|g\rangle\langle g| - aa^\dagger|e\rangle\langle e|) \equiv -\hbar\frac{g^2}{\Delta}(a^\dagger a + 1/2)\sigma_z$$

   donde la última equivalencia indica la eliminación de una constante irrelevante (para este problema).

   e) $\tilde{H}_{\text{eff}}$ conmuta con U_0 y por lo tanto la evolución en la representación original está dada por el Hamiltoniano efectivo $H_{\text{eff}} = H_0 + \tilde{H}_{\text{eff}}$. Escribir los autovectores de H_{eff} y sus correspondientes autovalores. Mostrar que el efecto de $\tilde{H}_{\text{eff}}$ puede verse como una modificación en la frecuencia de transición del átomo dependiente del número de fotones, o equivalentemente como un cambio en la frecuencia del modo dependiente del estado interno del átomo (y el signo de este cambio es el signo de Δ).

8. *Evolución de observables usando la ecuación maestra (para el 12/6)*

   El campo correspondiente a un modo en una cavidad interactúa, debido a reflexión imperfecta en los espejos, con un continuo de modos exteriores que induce pérdidas de los fotones dentro de la cavidad. La intensidad del campo dentro de la cavidad puede mantenerse constante si se bombea en forma continua por medio de un láser. En este escenario, la ecuación para la evolución del modo es de la forma:

   $$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \mathcal{L}_\kappa\rho$$

   donde la evolución coherente debida al láser y el Hamiltoniano libre de la cavidad es de la forma:

   $$H = -\hbar\Delta a^\dagger a - \mathrm{i}\hbar\eta(a - a^\dagger)$$

   en el marco rotante con la frecuencia del láser, con $\Delta = \omega_L - \omega_c$, y donde por simplicidad tomamos $\eta \in \mathbb{R}$ (que equivale a medir la fase del campo con respecto a la del láser) . La evolución no unitaria dada por las pérdidas se describe a través de:

   $$\mathcal{L}_\kappa\rho = \kappa\left(2a\rho a^\dagger - \{a^\dagger a,\rho\}\right)$$

a) Escribir la ecuación para la evolución temporal de un observable, usando $\langle \dot{A} \rangle = Tr(A\dot{\rho})$.

b) Evaluar para los operadores correspondientes al número de fotones y las dos cuadraturas del campo (para ese modo).

c) Calcular los valores asintóticos de los observables considerados y discutir su dependencia con respecto a los distintos parámetros del problema.

9. *Modelo de Jaynes-Cummings y decaimiento espontáneo para un ensamble formando un "superátomo" (para el 15/6)*

Suponemos que tenemos un modo de una cavidad con tasa de pérdidas despreciable. El modo interactúa con un átomo de acuerdo al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings del problema 5, pero el átomo además interactúa con el continuo de modos del campo exterior a la cavidad que induce emisión espontánea. La evolución completa del sistema está dada por una ecuación de la forma:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}_\Gamma \rho$$

donde

$$\mathcal{L}_\Gamma \rho = \frac{\Gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \{\sigma_+ \sigma_-, \rho\}).$$

Si $\Gamma \gg |g|$, la evolución coherente se encuentra dominada por el decaimiento espontáneo y no pueden verse oscilaciones coherentes en la dinámica.

Una manera de resolver esto es incorporando un ensamble de N átomos, con $N \gg 1$, que se acoplen todos de igual manera al campo. En lo sucesivo se analiza esta alternativa.

a) Escribir cuál es la forma del Hamiltoniano completo del sistema en este caso, suponiendo por simplicidad que todas las constantes de acoplamiento de los átomos son iguales. Escriba la forma de la cantidad $\tilde{N}$ conservada en este modelo, si despreciamos la emisión espontánea.

b) Escribir también cuál es la forma de los términos de evolución no unitaria, asumiendo que el proceso de emisión espontánea involucra a cada átomo por separado.

c) Teniendo en cuenta todos los términos de la evolución temporal, calcular la ecuación de evolución para la cantidad $\tilde{N}$ y mostrar que ya no se conserva, pero no puede aumentar.

d) Nos restringimos al subespacio con una sola excitación como máximo. Tomamos como base de este subespacio los estados $\{|0, g\rangle, |1, g\rangle, |0, j\rangle, j = 1, \ldots, N\}$ donde $|0, g\rangle$ es el estado sin ninguna excitación, $|1, g\rangle$ es el estado con un fotón en la cavidad y todos los átomos en su estado fundamental y $|0, j\rangle$ el estado con el modo en el vacío y el átomo j-ésimo excitado. Mostrar que de todos los estados generados por la base $\{|0, j\rangle, j = 1, \ldots, N\}$ solo una combinación lineal en particular $|0, \phi\rangle$ es conectada con $|1, g\rangle$ a través del Hamiltoniano; escribir la forma de esta combinación lineal, y explicar en términos de la simetría del Hamiltoniano.

e) Escribir el Hamiltoniano del sistema restringido al subespacio con base $\{|0, g\rangle, |1, g\rangle, |0, \phi\rangle\}$ e indicar la constante de acoplamiento efectivo entre el modo y los átomos.

f) Mostrar que la acción de la parte de evolución no unitaria actúa en el subespacio de interés igual que si escribiéramos la evolución no unitaria de un único átomo cuyo estado excitado es $|\phi\rangle$ y con la misma tasa Γ que para un único átomo (lo que implica que aumentar el número de átomos permite aumentar el acoplamiento efectivo sin aumentar la tasa de decaimiento). Ayuda: Para los términos en el anticonmutador, usar que $\sum_j \sigma_+^j \sigma_-^j |0, \phi\rangle = |0, \phi\rangle$ mientras que $\sum_j \sigma_+^j \sigma_-^j |0, g\rangle = \sum_j \sigma_+^j \sigma_-^j |1, g\rangle = 0$.

10. *Ecuación maestra para un entorno térmico (para el 15/6)*

Consideramos un átomo de dos niveles que interactúa con un entorno de modos a una temperatura T tal que la población de equilibrio del estado excitado es no despreciable. La ecuación maestra en la representación rotante a la frecuencia ω_0 del átomo es de la forma:

$$\dot{\tilde{\rho}} = \mathcal{L}_\Gamma \tilde{\rho} = \frac{\Gamma}{2}[(\bar{n} + 1)(2\sigma_- \tilde{\rho} \sigma_+ - \{\sigma_+ \sigma_-, \tilde{\rho}\}) + \bar{n}(2\sigma_+ \tilde{\rho} \sigma_- - \{\sigma_- \sigma_+, \tilde{\rho}\})]$$

donde $\bar{n}$ es la población de equilibrio a la temperatura T de los modos resonantes con el átomo. En esta fórmula, la contribución proporcional a $(\bar{n}+1)$ corresponde a desexcitación del átomo acompañada de emisión de fotones, mientras que la proporcional a $\bar{n}$ se origina en el proceso opuesto (absorción y excitación). El estado $\tilde{\rho}$ en esta representación se relaciona con el estado ρ en representación de Schrödinger a través de la ecuación:

$$\rho(t) = U_0(t)\tilde{\rho}(t)U_0^\dagger(t)$$

donde $U_0(t) = \exp(-iH_0 t/\hbar)$, $H_0 = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e|$.

a) Escribir las ecuaciones para la evolución de los elementos de matriz $\tilde{\rho}_{ee}$ y $\tilde{\rho}_{ge}$. Mostrar que las contribuciones de excitación y desexcitación tienen efectos opuestos en la evolución de $\tilde{\rho}_{ee}$, pero ambas dan lugar a decaimiento de los elementos no diagonales de la matriz densidad.

b) Indicar cuál es el estado asintótico. Resolver la evolución temporal de la matriz densidad completa en esta representación e indicar con qué tasa evolucionan las poblaciones y las coherencias (notar que la relación entre ambas tasas es independiente de $\bar{n}$). Mostrar que el estado asintótico se corresponde con la condición de equilibrio térmico.

c) Usando la relación dada entre las dos representaciones, mostrar que la ecuación de evolución temporal en representación de Schrödinger toma la forma:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho] + U_0(\mathcal{L}_\gamma U_0^\dagger \rho U_0)U_0^\dagger.$$

Luego usar la forma explícita de $\mathcal{L}_\gamma$ para mostrar que:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho] + \mathcal{L}_\gamma \rho,$$

es decir, la parte no unitaria tiene la misma forma en las dos representaciones. Ayuda: usar que al aplicar los operadores de evolución temporal, σ_+ y σ_- adquieren fases opuestas, y que $\sigma_+\sigma_-$ y $\sigma_-\sigma_+$ son invariantes.

d) Explicar cómo cambian los items (a) y (b) en esta representación.