Ejercicios para el curso de Introducción a la Óptica Cuántica

11. *Optical pumping (para el 26/6)*

Consideramos un problema con un láser con dirección de propagación a lo largo del eje z y polarización circular σ_+. Consideramos el eje z como dirección de cuantización para el momento angular. Tomamos un átomo cuyo estado fundamental tiene momento angular orbital $l = 0$ y espín $s = 1/2$, y llamamos a los dos estados fundamentales $|g_{\pm 1/2}\rangle$ según la proyección del espín en z. Asumimos que la intensidad del láser es débil de modo de trabajar en el límite no saturado, es decir, la población del estado excitado es despreciable.

a) Consideremos que el láser está cerca de resonancia con una transición entre el nivel fundamental $|g_{\pm 1/2}\rangle$ y un estado excitado con $l = 1$, $s = 1/2$, $j = 1/2$ (es decir también con dos subniveles, según la proyección m_j en la dirección z). Usando los coeficientes de Clebsch-Gordan, escribir los dos subniveles del estado excitado en términos de los autoestados de L_z y S_z, es decir de los estados caracterizados por los números cuánticos m_l, m_s.

b) Las reglas de selección para transiciones ópticas (debidas a campos con un frente de onda plano, sin estructura espacial) implican que el estado de espín no puede cambiar, y que la componente z del momento angular orbital del átomo cambia al absorber un fotón según:

- Polarización σ_+: $\Delta m_l = +1$
- Polarización σ_-: $\Delta m_l = -1$
- Polarización lineal en $\hat{z}$: $\Delta m_l = 0$

(para un campo que se propaga en z, la polarización debe ser en el plano x-y y siempre puede escribirse como combinación de σ_+ y σ_-). Dibujar en un esquema los dos estados fundamentales y los dos excitados y, usando estas reglas, indicar las transiciones que el láser con polarización σ_+ puede inducir en este sistema en la base de autoestados del Hamiltoniano del átomo, es decir usando el número cuántico m_j. Notar que estas transiciones son las mismas para absorción y emisión estimulada (es decir son reversibles).

c) Teniendo en cuenta que la emisión espontánea puede ser, en principio, en cualquier dirección de propagación y con cualquier polarización, dibujar las transiciones posibles en un proceso de emisión espontánea. Notar que esta clase de procesos sólo corresponde a desexcitación del átomo.

d) Usando los resultados de los ítems anteriores, explicar cuál es el estado asintótico del átomo.

e) Repetir los mismos pasos pero para un caso en que el estado excitado considerado tiene $l = 1$, $s = 1/2$, $j = 3/2$.

12. *Interacciones mediadas entre iones (para el 29/6)*

Para realizar computación cuántica con un conjunto de sistemas de dos niveles (qubits), es suficiente poder aplicar transformaciones unitarias arbitrarias sobre cada uno de los qubits, y al menos un tipo de operaciones unitarias capaces de generar entrelazamiento.

Este ejercicio muestra en forma simplificada cómo es posible, en principio, realizar esta clase de operaciones entre los estados internos de dos iones por medio de un modo normal de oscilación común a los dos. Vamos a considerar que cada ion es un sistema de tres niveles: dos de ellos, $|g\rangle$ y $|e\rangle$, corresponden a los estados de la base computacional, y un tercero, $|e'\rangle$, es puramente auxiliar. La oscilación del modo centro de masa corresponde a un oscilador armónico cuantizado con operadores a y $a^\dagger$.

Por medio de un láser actuando sobre el ion j ($j = 1$ ó 2) con la frecuencia apropiada podemos generar un Hamiltoniano que en una representación rotante con respecto al Hamiltoniano H_0 del sistema libre tome la forma:

$$H_j = \hbar \frac{\Omega}{2} \left[(|e\rangle\langle g|)_j \, a + (|g\rangle\langle e|)_j \, a^\dagger \right]$$

(es decir es análogo al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings del problema 4, y no actúa sobre el nivel $|e'\rangle$). Alternativamente, cambiando la frecuencia y/o la polarización del láser podemos generar un Hamiltoniano H'_j del mismo tipo pero que involucra al estado $|e'\rangle$ en lugar de $|e\rangle$.

Calcular en cada paso los efectos de la siguiente secuencia, suponiendo que el estado inicial es de la forma:

$$|\psi_0\rangle = \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} |0\rangle$$

que es un estado sin entrelazamiento entre los dos iones, y donde el modo se encuentra en su estado fundamental.

a) Se aplica el Hamiltoniano H_1 durante un tiempo π/Ω, lo que opera sobre el ion 1 y el modo la transformación:

$$|g\rangle|1\rangle \to -i|e\rangle|0\rangle, \quad |e\rangle|0\rangle \to -i|g\rangle|1\rangle$$

mientras que el estado $|g\rangle|0\rangle$ no se modifica.

b) Se aplica el Hamiltoniano H_2' durante un tiempo $2\pi/\Omega$, lo que opera sobre el ion 2 y el modo la transformación:

$$|g\rangle|1\rangle \to -|g\rangle|1\rangle, \quad |e'\rangle|0\rangle \to -|e'\rangle|0\rangle$$

mientras que el estado $|g\rangle|0\rangle$ no se modifica, ni tampoco ningún estado en que el ion 2 se encuentre en $|e\rangle$.

c) Se aplica nuevamente un pulso igual al del primer paso.

Mostrar que el estado final es un estado en el que el modo vuelve al estado fundamental, mientras que los iones 1 y 2 se encuentran en un estado máximamente entrelazado de dos qubits, es decir, mientras que el estado de ambos es puro, la matriz densidad reducida de cada uno de los iones es igual a $(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)/2$.