## Distribución electrónica

#### Función densidad electrónica

# Bibliografía

- Methods of Molecular Quantum Mechanics- McWeeny- ed. 1992. capítulo 5.
- -Per-Olov Löwdin, "Present Situation of Quantum Chemistry, en Journal. Phys. Chem, 1957, 61(1) pp. 55-68
- -Per-Olov Löwdin, "Quantum Theory of Many-Particle Sistems. I Physical Interpretations by Means of Density Matrices, Natural Spin-Orbitals, and Convergence Problems in the Method of Configurational Interaction", *Phys- Rev.* 97, 6(1955) pp. 1474-1489.

# Bibliografía (continuación)

Per-Olov Löwdin, Phys- Rev. 97, 6(1955) pp. 1490.

-Charles Bender and Ernest Davidson," A Natural Orbital Based Energy Calculation for Helium Hydride and Lithium Hydride" en Journal Phys. Chem, 70,8 (1955) pp. 2675-2685

## **NBO**

- \*Laimutis Bytautas, Joseph Ivanic y Klaus Ruedenberg,"Splitlocalized orbital can yield stronger configuration interaction convergence than natural orbitals", *Journal Phys. Chem*, 119,16 (2003) pp.8217-8224
- -A. Reed, L. Curtiss, F. Weinhold, Chem. Rev.88 (1988),899-926
- F. Weinhold and C. Landis, Chemistry education: research and practice in Europe. Vol. 2, nº 2, (2001) 91-104.

## Problema general

Bohr 1913--→ átomo de hidrógeno

generalizar la teoría para el caso de dos o más electrones??

El problema de muchos cuerpos debe ser resuelto de manera aproximada

Aproximación más simple-→modelo de un electrón,
N electrones --→ producto de N spines-orbitales (**Producto de Hartree**)

Función de onda ———— Antisimetrizada: determinantes de Slater

Dado que los electrones pertenecen a la molécula como un todo aparecen las funciones que los representan: los **orbitales moleculares** 

Aproximación de Hartree - Fock

restricto irrestricto

Hartree-Fock **no tiene en cuenta la correlación electrónica**: más allá del modelo de campo medio :

$$v^{HF}(i) = \sum_{j} (J_j(i) - K_j(i))$$

$$E_{corr} = \varepsilon_o - E_o$$

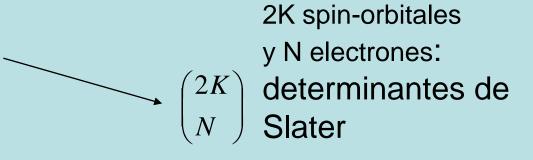
**E**<sub>corr</sub>: energía de correlación

ε<sub>o</sub> energía exacta resultado de resolver la ec. de Schrödinger en forma exacta

E<sub>o</sub>: solución de Hartree-Fock

Configuración de interacción (CI): función de onda de muchos electrones, combinación de determinantes de Slater con todas las excitaciones posibles, simples, dobles, triples, etc., construidos con los orbitales moleculares de la solución Hartree Fock

CI :solución exacta, computacionalmente inmanejable



La expansión CI presenta el problema de convergencia lenta.

Es posible **CI** construyendo los determinantes de Slater con una base de orbitales que tenga la propiedad de de **convergencia rápida** 

base de orbitales naturales

# Función densidad de 1 electrón

# <u>ejemplo</u>

$$\chi_A(\mathbf{X}) = \psi_A(r)\alpha(s)$$
 Spin orbital

$$\rho(\mathbf{x}) = \left| \psi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \right|^2$$

Función densidad de una partícula

$$\rho(\mathbf{x})dx = \left|\psi_{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\right|^{2} \left|\alpha(s)\right|^{2} drds$$

$$P(r)dr = dr \int \rho(\mathbf{x})ds = \left|\psi_{\mathbf{A}}(r)\right|^{2} dr$$

### **MUCHOS ELECTRONES**

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \Psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \ldots d\mathbf{x}_N$$

Probabilidad de encontrar simultáneamente: un electrón alrededor de  $x_1$ , otro alrededor de  $x_2$ , ...de  $x_n$ 

$$\rho_{1}(x_{1}) = N \int \psi(x_{1}x_{2}x_{3}...x_{N}) \psi^{*}(x_{1}x_{2}x_{3}...x_{N}) dx_{2}dx_{3}...dx_{N}$$

Cualquier electrón en x<sub>1</sub>

*X*<sub>1</sub> es un punto en el espacio de coordenadas

$$P_1(\mathbf{r}_1) = \int \rho_1(\mathbf{x}_1) \, \mathrm{d}s_1$$

Densidad medida en X-ray

### Densidad de una partícula

$$\rho_2(x_1, x_2) = N(N-1) \int \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_3 \dots dx_N$$

X<sub>1</sub> y X<sub>2</sub> son puntos en el espacio de coordenadas

$$P_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2$$

Densidad de 2 partículas

# Ej.: Atomo de He en (1s 2s) : A y B orbitales ortogonales

$${}^{1}\Psi(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{x}_{2}) = \frac{1}{2}[A(\mathbf{r}_{1})B(\mathbf{r}_{2}) + B(\mathbf{r}_{1})A(\mathbf{r}_{2})][\alpha(s_{1})\beta(s_{2}) - \beta(s_{1})\alpha(s_{2})]$$

$${}^{3}\Psi(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{x}_{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}[A(\mathbf{r}_{1})B(\mathbf{r}_{2}) - B(\mathbf{r}_{1})A(\mathbf{r}_{2})]$$

$$\times \begin{cases} \alpha(s_{1})\alpha(s_{2}) & (M = +1), \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}[\alpha(s_{1})\beta(s_{2}) + \beta(s_{1})\alpha(s_{2})] & (M = 0), \\ \beta(s_{1})\beta(s_{2}) & (M = -1). \end{cases}$$

# singlete

$$\rho(\mathbf{x}_1) = 2 \times \frac{1}{4} \int |A(\mathbf{r}_1)B(\mathbf{r}_2) + B(\mathbf{r}_1)A(\mathbf{r}_2)|^2 |\alpha(s_1)\beta(s_2) - \beta(s_1)\alpha(s_2)|^2 d\mathbf{r}_2 ds_2$$

$$= \frac{1}{2} [|A(\mathbf{r}_1)|^2 + |B(\mathbf{r}_1)|^2] [|\alpha(s_1)|^2 + |\beta(s_1)|^2].$$

$$P(\mathbf{r}_1) = \int \rho_1(\mathbf{x}_1) \, \mathrm{d}s_1 = |A(\mathbf{r}_1)|^2 + |B(\mathbf{r}_1)|^2,$$

$$\rho(\mathbf{x}_1) = P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) |\alpha(s_1)|^2 + P_{\beta}(\mathbf{r}_1) |\beta(s_1)|^2, \qquad P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} P(\mathbf{r}_1) = \frac$$

# triplete

$$P_{\beta}(\mathbf{r}_1) = P(\mathbf{r}_1), \quad P_{\beta}(\mathbf{r}_1) = P(\mathbf{r}_1), \quad P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = 0$$
 M= -1

$$P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = P(\mathbf{r}_1), P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = P(\mathbf{r}_1), P_{\beta}(\mathbf{r}_1) = 0 |_{M = +1}$$

$$P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = P_{\beta}(\mathbf{r}_1)$$
  $P_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = P_{\beta}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}P(\mathbf{r}_1)$  M= 0

# **Matrices densidad**

$$\rho(\mathbf{x}_1) = N \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \Psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) d\mathbf{x}_2 \ldots d\mathbf{x}_N,$$

$$\pi(x_1, x_2) = N(N-1) \int \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_3 \dots dx_N,$$

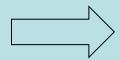
$$P(\mathbf{r}_1) = \int \rho(\mathbf{x}_1) ds_1, \quad \Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) ds_1 ds_2.$$

Permiten pasar de N variables a una o dos variables

Valores medios

?

Operador de una partícula



$$\langle \mathsf{F} \rangle = \int \psi^*(x) \mathsf{F} \psi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Si F no actúa sobre las coordenadas: ej F=-e *r (momento dipolar)* 

$$\langle \mathsf{F} \rangle = \int \mathsf{F} \psi(x) \psi^*(x) \, \mathrm{d}x = \int \mathsf{F} \rho(x) \, \mathrm{d}x,$$

Si F actúa sobre las coordenadas F=F(x):ej, F=p=-i $\hbar \partial_x$ 

$$\langle \mathsf{F} \rangle = \int_{x'=x}^{\int} \mathsf{F} \psi(x) \psi^*(x') \, \mathrm{d}x,$$

$$\rho(x) = \rho(x; x).$$
  $\langle F \rangle = \int_{x'=x}^{x} F \rho(x; x') dx,$ 

# Densidad generalizada

$$\rho(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_1') = N \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$$

$$\times \Psi^*(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \, \mathrm{d}\mathbf{x}_2 \dots \, \mathrm{d}\mathbf{x}_N,$$

$$\pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') = N(N-1) \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \, \mathrm{d}\mathbf{x}_3 \dots \, \mathrm{d}\mathbf{x}_N,$$

$$\overset{\text{2 particulas}}{\times} \qquad \times \Psi^*(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \dots, \mathbf{x}_N) \, \mathrm{d}\mathbf{x}_3 \dots \, \mathrm{d}\mathbf{x}_N,$$

# Cálculo de la energía

$$\left\langle \sum_{i} h(i) \right\rangle = \int_{x'_1=x_1} h(1) \rho(x_1; x'_1) dx_1.$$

$$\left\langle \sum_{i} V(i) \right\rangle = \int_{x_1'=x_1} V(1) \rho(x_1; x_1') dx_1 = \int V(1) \rho(x_1) dx_1,$$

$$\left\langle \sum_{i,j}' g(i,j) \right\rangle = \int_{\substack{x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2}} g(1,2) \pi(x_1, x_2; x_1', x_2') dx_1 dx_2$$

$$= \int g(1,2) \pi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

# Integración en el spin

$$P(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_1') = \int_{s_1' = s_1} \rho(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_1') \, \mathrm{d}s_1,$$

$$\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = \int_{\substack{s_1' = s_1 \\ s_2' = s_2}} \pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2.$$

# Finalmente.....

$$E = -\frac{1}{2} \int \nabla^2 \rho(x_1) dx_1 + \int V \rho(x_1) dx_1 + \frac{1}{2} \int g \pi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

$$E = -\frac{1}{2} \int \nabla^2 P(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int VP(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \int g\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

$$= T + V_{\text{en}} + V_{\text{ee}},$$

# Matriz densidad (notación McWeney)

matriz densidad reducida de primer orden (en diapositivas previas: $\underline{\rho(x_1|x_1')}$ )

$$\gamma(\mathbf{x}_1'|\mathbf{x}_1) = N \int \Psi^*(\mathbf{1}'23\cdots N)\Psi(\mathbf{1}23\cdots N)(dx_1')$$

matrices densidad de distintos órdenes

$$\Gamma(\mathbf{x_1'x_2'}|\mathbf{x_1x_2}) = {N \choose 2} \int \Psi^*(1'2'3\cdots N)\Psi(123\cdots N)(dx_{12'})$$

$$\Gamma^{(N)}(\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'\cdots\mathbf{x}_N'|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N) = \Psi^*(1'2'3'\cdotsN')\Psi(123\cdotsN)$$

Orden N

$$\Gamma(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2') = \Gamma^*(\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$$

Son hermíticas

$$\Gamma(\mathbf{x}_{2}'\mathbf{x}_{1}'|\mathbf{x}_{1}\mathbf{x}_{2}) = -\Gamma(\mathbf{x}_{1}'\mathbf{x}_{2}'|\mathbf{x}_{1}\mathbf{x}_{2})$$

y antisimétricas

# Interpretación de elementos diagonales

representan la probabilidad de encontrar una partícula en el interior del elemento de volumen dx 1, alrededor del punto  $\mathbf{r}_1$  y con spin  $\mathbf{s}_1$ .

$$\gamma(x_1)dx_1 = \gamma(x_1 : x_1)dr_1ds_1$$
  
$$x_1 = x_1$$

$$\int \gamma(\mathbf{x}_1) dx_1 = N$$

Análogamente para las matrices densidad de orden superior, 2 partículas, 3 partículas, etc.

Una cantidad física **Ω** asociada con el sistema (ej. desarrollo multipolar) puede ser representada en el espacio de configuración por un operador hermítico que es simétrico en los índices de las partículas. Este puede ser expresado como:

$$\Omega_{\text{op}} = \Omega_{(0)} + \sum_{i} \Omega_{i} + \frac{1}{2!} \sum_{ij}' \Omega_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{ijk}' \Omega_{ijk} + \cdots$$

El valor de expectación del operador puede calcularse como:

$$\langle \Omega_{\rm op} \rangle_{\rm AV} = \int \Psi^* \Omega_{\rm op} \Psi(dx) = \Omega_{(0)} + \int \Omega_1 \gamma(\mathbf{x}_1'|\mathbf{x}_1) dx_1 + \int \Omega_{12} \Gamma(\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) dx_1 dx_2$$

$$+ \int \Omega_{123} \Gamma(\mathbf{x}_1' \mathbf{x}_2' \mathbf{x}_3' | \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) dx_1 dx_2 dx_3 + \cdots$$

 $\Omega_{o},\,\Omega_{i},\,\Omega_{ij},$  etc., representan operadores de 0,1,2... cuerpos.

# Ventajas de la densidad en el desarrollo CI

 Sea ahora un desarrollo CI de la función de onda que genera las matrices densidad.

$$\gamma(x_1, x_1)$$

función de dos variables que se puede expandir en la base ortonormal de spin-orbitales de Hartree-Fock

$$\gamma(x_1, x_1') = \sum_{lk} \gamma(l/k) \chi_k^*(x_1) \chi_l(x_1')$$

- $\gamma(l/k)$  elemento *lk* de la matriz densidad de primer orden. forman una matriz hermítica y se determinan a partir
  - forman una matriz hermítica y se determinan a partir de los coeficientes  $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$  de la función de onda suma infinita de determinantes de Slater:

$$\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_N) = \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} \Psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_N)$$

Los coeficientes **c**<sub>k</sub> pueden determinarse por el método variacional

 $\gamma(x_1/x_1')$  es hermítica  $\rightarrow$  existe una transformación unitaria U que la diagonaza :

$$U^{\dagger} \gamma U = n$$

Para los elementos de la diagonal vale:

$$\gamma_{
m kk} \, = \, \sum_{K}^{(k)} \, |C_{
m K}|^{\,2}$$

El conjunto de funciones que diagonaliza la matriz densidad son los **orbitales naturales** y los  $\eta_k$ , sus autovalores,  $\lambda_k$ , son los **números de ocupación, y** representan el número promedio de partículas en cada uno de los spin-orbitales naturales.

# RELACIÓN ENTRE ORBITALES NATURALES y spin ORBITALES

$$\gamma = UnU^{\dagger}$$

$$\eta_k = \sum_{l} U_{lk} \chi_l$$

$$\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_N) = \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} \Psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_N)$$

$$\Psi_K =$$

Determinantes de SLATER en base canónica

$$\psi(x_1,....x_N) = \sum_K A_K \det(\eta_i, \eta_j, ..... \eta_l)$$

## Base de orbitales naturales

Löwdin: recurre a un teorema que afirma que la suma de los *r* autovalores más altos es siempre mayor que la suma de r elementos de la diagonal .

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{k} \geq \sum_{k=1}^{r} \gamma_{kk}$$

$$\gamma_{kk} = \sum_{K}^{(k)} |C_{K}|^{2}$$

$$\psi(x_1,....x_N) = \sum A_K \det(\eta_i, \eta_j,.....\eta_l)$$

Se obtiene

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{K}^{(k)} |A_{K}|^{2} \ge \sum_{k=(1)}^{(r)} \sum_{K}^{(k)} |C_{K}|^{2}$$

# Cálculo de la energía usando orbitales naturales

Dificultad para encontrar los orbitales naturales: surgen de diagonalizar la matriz densidad, pero ello implica conocerla y de algún modo ya haber resuelto el problema.

#### El método de Davidson consta de los siguientes pasos:

- 1) Se realiza un pequeño cálculo **CI** en la base canónica a partir de un número <u>razonable</u> de configuraciones de donde se obtiene la matriz densidad y de allí un primer conjunto de orbitales naturales mediante diagonalización.
- 2) Se construye una función de onda empleando para las configuraciones los orbitales naturales más importantes (ie. Los de mayor número de ocupación)
- 3) Se vuelve a repetir el procedimiento hasta que la función de onda y los orbitales converjan.

# Dificultades típicas del método.

Selección apropiada de las configuraciones para el **paso 1** (en un cálculo tipo pueden haber muchísimas con la simetría apropiada)

No es generalmente posible formar tantos orbitales naturales como funciones base no ortogonales debido a problemas de dependencia lineal.

#### **ANALISIS POBLACIONAL**

#### OA > NOAs -> NOHs > NBOs > NLMOs > MOs

**OA**: base atómica **NOH**: orbitales híbridos

NOA: autovectores del bloque asociado

al átomo A

**NBO**: bond orbitals

**NLMO**: orbitales localizados **MO=OM**: orbital molecular

•Orbitales híbridos: pertenecen a la capa de valencia

Todos conjuntos completos

- •Orbitales naturales localizados: autovectores de determinados bloques de la matriz densidad
- Ejemplo: bloques asociados a cada átomo
- Los autovalores de cada bloque A son ortogonales a los de otro bloque B

**NOA**s :naturales asociados a bloque A.



$$q_i^A = \langle \Phi_i^A / \Gamma / \Phi_i^A \rangle$$

Contribución a la carga de A. Vale para cualquier base, también base *canónica*: Análisis de **Mülliken** 

$$q^A = \sum_i q_i^A$$

Carga asignada al átomo A

$$0 \le q_i^A = <\Phi_i^A/\Gamma/\Phi_i^A > \le 2 \qquad \text{Pauli}$$

$$N_{elec} = \sum_{A} q^{A}$$

# **NBO**

útil para distinguir uniones y pares no ligantes en la molécula.

unión AB (bonding) (ocupado)
$$\sigma_{AB} = c_A h_A + c_B h_B$$

unión AB antibonding (ocupación pequeña). NO es un virtual de SCF-MO!!!!!

$$\sigma *_{AB} = c_B h_A - c_A h_B$$

# **Análisis NBO**

base atómica → NOs MQs

Orb. natural

NOs Orb. molecular

Matriz densidad

sus autovectores son los NOs

NAOs:

core: ocupación mayor a 1.9999 (eliminados para armar excitaciones)

<u>n</u><sub>A</sub>: pares no ligantes, ocupación mayor a 1.90 (no participan en excitaciones)

 $\Gamma AB$ 

bloque de 2 centros: sus autovectores corresponden a los

 $\sigma_{AB}$ 

$$(n_O)_{LMO} \simeq (n_O)_{NBO} + \lambda (\sigma^*_{OH})_{NBO}$$

$$\Phi_{AB}^{LMO} \approx \sigma_{AB} + \lambda \sigma_{CD}^* + \dots$$

 $\sigma^*$  Delocalización irreducible de\_  $\sigma_{AB}$  Respecto a localización idealizada

I)la matriz densidad queda particionada en bloques

 $\Gamma^{\sigma}AB$  fuertemente ocupados y

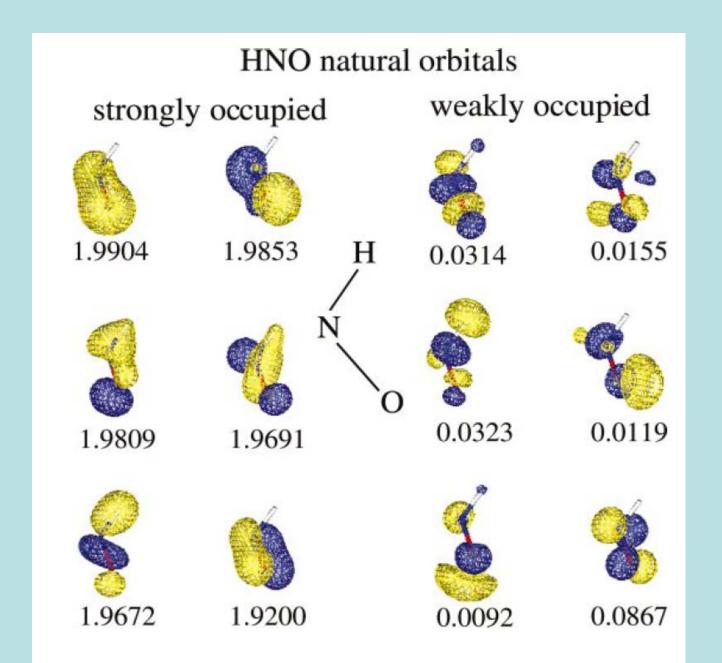
 $\Gamma\sigma^*AB$  débilmente ocupados

# **GENERACION DE NBOs**

- OMs
- Matriz densidad sus autovectores son los ONs
- NAOs (autovectores del bloque asociado al átomo A)
- NAOs :
- core: ocupación mayor a 1.9999 (eliminados)
- n<sub>A</sub>: pares no ligantes, ocupación mayor a 1.90
  - bloque de 2 centros: sus autovectores corresponden a los  $\sigma_{AB}$ 
    - la matriz densidad queda particionada en
- bloques  $\Gamma^{O}AB$  fuertemente ocupados y

 $\Gamma \sigma^* AB$  débilmente ocupados

### Resultados para la molécula de HNO



#### Resultados para la molécula de NCCN

# Strongly-occupied natural orbitals of NCCN











1.9933-σ

1.9931-σ

 $1.9847-\sigma$ 

 $1.9792-\sigma$ 

 $1.9786-\sigma$ 







1.9508-πx



1.9298-πу



1.9298-πx

Weakly-occupied natural orbitals of NCCN







 $0.0182-\sigma$ 

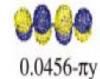


 $0.0082-\sigma$ 



 $0.0819 - \pi y$ 







#### NCCN split-localized orbitals

strongly occupied weakly occupied



1.9845-CC-σ

0.0167-CC-σ\*



0.0191-NC-σ\*









