Dinámica de la alta Atmósfera
Física de la Atmósfera Terrestre
Guía 1

1. Todas las moléculas en un volumen tienen sus vectores velocidad uniformemente distribuidos dentro de una esfera de radio v_0 en el espacio de velocidades. Cuál es la función de distribución de velocidades normalizada? Calcule la velocidad promedio $< \vec{v} >$, el valor medio del módulo de la velocidad $< |\vec{v}| >$ y la energía media $< mv^2/2 >$.

2. Para un gas en equilibrio a temperatura T encuentre el cociente entre las velocidades características de las moléculas, $< v >$, $\sqrt{< v^2 >}$ y v_m (la velocidad más probable).

3. La función de distribución de velocidades escalares de las moléculas de un gas es
$$f(v) = Av^3 e^{-\beta m v^2/2} \quad .$$
Halle A y la velocidad cuadrática media.

4. Encuentre la relación entre el camino libre medio (l) de las partículas que forman un gas ideal en función de la sección eficaz de choque (σ) y la densidad de partículas (n). Estime l para un gas con presión igual a 1 atmósfera, temperatura 300 K, y $\sigma = \pi R^2$, con $R = 10^{-8}$cm.

5. Muestre que la energía cinética media de las partículas térmicas en un gas ideal, con sus 3 grados de libertad dados por las componentes del vector velocidad, resulta igual a $(3/2)k_B T$.

6. Cómo podría estimar el coeficiente politrópico del gas de la atmósfera a partir de observaciones del perfil de presión y densidad? Qué tipo de proceso espera en cada una de las diferentes capas de la atmósfera?

7. * En el sistema rotante, la fuerza ficticia (no inercial) centrífuga puede ser importante para ciertos procesos en la atmósfera. Estime la forma funcional de la aceleración de la gravedad efectiva en función de la velocidad angular de rotación de la Tierra.

8. Calcule la altura de la escala de presión heterosférica para condiciones de equilibrio termodinámico ($T_i = T$).

9. El oxígeno atómico es el constituyente primario de la termosfera de un planeta a alturas por encima de los 200 km. La temperatura del gas a esa altura ya ha alcanzado su valor de termopausa, teniéndose $T_\infty \approx 200$ K.
   a) Calcule el decrecimiento relativo en la densidad en esta región para un incremento en la altura de 100 km. Asuma que la gravedad es constante e igual a su valor a 200 km de altura ($g_{200} \approx 3.3$ m/s^2).
   b) Estime el error relativo si se calculara la densidad de oxígeno a 3000 km de altura sin tener en cuenta la dependencia con la altura de la gravedad. Considere nuevamente como altura de referencia 200 km ($M_p = 6.41 \times 10^{23}$ kg, $G = 6.6726 \times 10^{-11}$m^3 kg^{-1} s^{-2}).

10. Encuentre la distribución de densidad de la especie i en la baja termosfera tomando un perfil de temperaturas de Bates

$$T(h) = T_\infty - [T_\infty - T(h_0)]\ e^{-s(h-h_0)} \quad .$$

   Valores típicos para las constantes son $h_0 = 120$ km, $T(h_0) = 350$ K, $T_\infty = 1000$ K, $s = 0.021$ km^{-1}. Grafique el perfil de densidad y compare con observaciones (página 30 del libro de Prölss).

11. Explique por qué el oxígeno atómico, el cual no es un constituyente natural de la baja atmósfera, se torna el componente atmosférico principal en la termosfera.

12. Muestre que la función de distribución barosférica

$$f_{bar}(r, v) = n_{bar}(r) g_M(v) \quad ,$$

   es una forma especial de la función de distribución de Maxwell–Boltzmann independiente del tiempo, donde $n_{bar}(r)$ representa el perfil de densidad resultante de la ley barométrica bajo condiciones isotérmicas y $g_M(v)$ es la función de distribución de velocidades Maxwelliana. Indique para qué rango de alturas resulta adecuada esta función de distribución.

13. Muestre que para un gradiente vertical de temperaturas constante e igual a Γ, la presión en la atmósfera está dada por

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Gamma z}{T_0}\right)^{\gamma/(\Gamma R)} \quad ,$$

   siendo $p_0 = p(z = 0)$ y $T_0 = T(z = 0)$.
   Calcule la altura a la cual $p = 0.1\ p_0$ si $T_0 = 290$ K y **(i)** $\Gamma = 10$ K km^{-1} **(ii)** T es uniforme.

14. * Titán ($M = 1.35 \times 10^{23}$ kg, $R = 2575$ km), una de las lunas de Saturno, tiene una atmósfera de nitrógeno extraordinariamente densa. La densidad numérica de partículas a una altura de 1000 km alcanza un valor de aproximadamente 10^{16} m^{-3}, siendo la temperatura en esta región casi constante con un valor de 186 K.
a) Calcule la altura de la exobase para hidrógeno molecular ($\sigma_{H2,N2} \approx 2 \times 10^{-19}$ m^2).
b) Compare la velocidad térmica y de escape para las moléculas de H_2 a esta altura. Cuál es la fracción de partículas que escapan?
c) Calcule el flujo de escape de Jeans y el tiempo de escape para el componente H_2 de la atmósfera de Titán. Tómese una temperatura superficial de 94 K, una presión superficial de 1496 mbar y una abundancia superficial de H_2 de 0.2 %.

15. Considere ondas de Rossby que varían con x e y pero son independientes de la profundidad z, en un flujo zonal uniforme U. Muestre que pueden existir ondas estacionarias sólo si la longitud de onda zonal es mayor que un cierto valor L. Calcule L a 60° N para $U = 50$ m s^{-1} y $U = 150$ m s^{-1}. Compare esto con la longitud de un círculo de latitud y comente.

16. * Las ondas de gravedad–inercia son una generalización de las ondas de gravedad interna en donde se consideran movimientos con escala horizontal lo suficientemente grande para que no pueda despreciarse el término de Coriolis en el sistema de ecuaciones de Boussinesq linealizadas. Busque soluciones tipo onda plana de la forma

$$\{u, v, w, \delta p, \delta\rho\} = \Re\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \delta\hat{p}, \delta\hat{\rho}\} \exp[i(kx + mz - \omega t)] \quad .$$

En particular muestre que

$$\rho_0 \hat{u} = \frac{\omega k \hat{p}}{\omega^2 - f_0^2}$$
$$\rho_0 \hat{v} = \frac{-ikf_0\hat{p}}{\omega^2 - f_0^2} \quad ,$$

y que la relación de dispersión es

$$\omega^2 = f_0^2 + \frac{k^2 N_B^2}{m^2}$$

con $N_B^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho}{dz}$. Note que la componente de velocidad v debe ser no nula. Cuál es la mínima frecuencia angular de estas ondas? Muestre que para una dada frecuencia y longitud de onda vertical, estas ondas tienen una longitud de onda horizontal mayor que las que corresponden a ondas de gravedad interna.

17. * Para un flujo turbulento isótropo y homogéneo, obtenga la ley de los 2/3 a partir de argumentos dimensionales $v_l^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}$, donde v_l es la velocidad característica en la escala l, y ϵ es el flujo de energía entre escalas. Usando este resultado y la definición del espectro de energía $E(k) = de/dk$ (donde k es el número de onda, y $e(k)$ es la energía acumulada desde escalas grandes ($k = 0$) hasta escalas del orden de k^{-1}) obtenga el espectro de Kolmogorov: $E(k) = C\epsilon^{2/3} K^{-5/3}$, donde C es una constante.

18. A partir del espectro de Kolmogorov, muestre que la escala espacial en la que la viscosidad ν comienza a ser relevante (la escala de disipación en un flujo turbulento) resulta $l_\nu \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$.

19. * Un satélite aproximadamente esférico de 1 metro de radio y 100 kg de masa orbita la Tierra en el plano ecuatorial a una altura de 300 km.
    a) Muestre que el número de Knudsen (ℓ/R) a esta altura es mucho mayor que la unidad, por lo que el flujo de aire sobre el satélite corresponde a flujo molecular libre. Qué implicancias tiene esto en el movimiento del satélite? Considere $T \approx$ 1000 K.
    b) Calcule la velocidad del satélite, su período orbital y su energía total.
    c) Estime cuán grande es, en promedio, el cambio en el momento sufrido por un átomo de oxígeno durante el impacto con el satélite idealmente reflectante. Calcule también cuál es el correspondiente cambio en el momento experimentado por el satélite durante su vuelo a través de la atmósfera y cuál es la magnitud de la fuerza de arrastre asociada.
    d) El cambio temporal en la energía total del satélite corresponde a la energía gastada durante la desaceleración atmosférica (fuerza de arrastre por la velocidad del satélite). A partir de esto puede derivarse una expresión para el cambio temporal en el radio orbital del satélite. Cuál es la pérdida diaria en altura?

20. **a)** Muestre que en un modelo de atmósfera aerostática la masa de una columna vertical de aire que se extiende desde el suelo hasta un gran altura y de sección transversal unitaria, es p_0/g, donde p_0 es la presión superficial. Estime entonces la masa total de la atmósfera y su entalpía total, la cual puede tomarse como una medida del contenido total de calor.
    b) Suponga en forma hipotética que la temperatura de la atmósfera decrece 1 K en todos lados, el calor liberado es suministrado a una capa superficial oceánica de 100 m de profundidad, cuya temperatura se incrementa una cantidad δT. Encuentre δT y comente las posibles implicancias de este resultado para el cambio climático (la capacidad calorífica específica del agua marina es aproximadamente

4.2 kJ kg^{-1} K^{-1})