Dinámica de la alta Atmósfera
Física de la Atmósfera Terrestre
Guía 4

1. Calcule las siguientes cantidades para la ciudad de Buenos Aires basado en la aproximación dipolar geocéntrica:
   (a) la intensidad de campo magnético en la superficie,
   (b) los ángulos de inclinación y declinación del campo magnético,
   (c) el parámetro L y la altura del punto de ápex para la línea de campo geomagnética local.

2. Obtenga una expresión para la longitud del elemento de camino ds de una línea de campo dipolar. Determine la longitud de una línea de campo dipolar desde su base en la superficie terrestre hasta el punto de ápex como una función de la latitud del punto base. Calcule la longitud (en unidades del radio terrestre) de una línea del campo dipolar terrestre con $L = 5$. Encuentre el radio de curvatura de una línea de campo en latitudes ecuatoriales (en función de la distancia de la línea de campo a la posición del dipolo, es decir al centro de la Tierra en la aproximación de campo geomagnético con dipolo centrado). Encuentre la intensidad del campo geomagnético a lo largo de la línea de campo; grafique B en función de la latitud para una línea de campo dada.

3. Muestre que el momento magnético (que resulta ser un invariante adiabático) que genera una partícula en un campo magnético B resulta proporcional a la energía cinética perpendicular dividido B.

4. * Derive la relación
$$\sin^2 \alpha = \frac{B}{B_0} \sin^2 \alpha_0$$
usando la definición del ángulo de paso α y la invariancia del momento magnético.

5. La densidad de energía de un campo magnético en vacío es $\varepsilon = B^2/(8\pi)$. Determine el contenido de energía del campo dipolar geocéntrico de la Tierra por encima de la superficie terrestre.

6. Muestre que la energía cinética de una partícula cargada moviéndose en un campo magnético estático se conserva en ausencia de fuerzas externas.

7. * Considere un protón de 50 keV con un ángulo de paso ecuatorial $\alpha_0 = 15°$ que se mueve a lo largo de una línea de campo dipolar con un parámetro $L = 3$.
   (a) Determine el giroradio de esta partícula en el Ecuador y su punto de retorno por

efecto de espejo magnético.
(b) Cuál es la distancia geocéntrica de sus puntos de retorno y cuál su período de oscilación?
(c) Qué valor debe tener la energía de un protón con ángulo de paso $\alpha_0 = 90°$ para que siempre permanezca sobre el mismo punto encima de la Tierra? (deriva geoestacionaria).
(d) Calcule el tiempo que le lleva al protón dar una vuelta a la Tierra debido a la deriva de curvatura y gradiente (tome valores sobre el ecuador magnético solamente).
(e) Considerando ahora que se tienen protones de 1 MeV y electrones de 100 keV, ambos con densidades 10^7 m^{-3}, calcule la corriente de deriva, de curvatura y de gradiente sobre el ecuador magnético (la denominada corriente de anillo). Estime el campo magnético generado por esta corriente cerca de la superficie terrestre.
(f) Argumente porqué la conservación del invariante J_2 asegura que en su viaje de deriva alrededor de la Tierra las partículas vuelven a estar sobre la misma línea de campo luego de dar una vuelta completa, a pesar de que las líneas están deformadas por el viento solar y no existe por lo tanto simetría de revolución alrededor del eje geomagnético.

8. Considere un planeta sin atmósfera pero con un fuerte momento dipolar intrínseco localizado en el centro. Un emisor de electrones está ubicado a 4 R_p del centro planetario, en el ecuador magnético (R_p es el radio del planeta). El emisor despide partículas de 1 keV en forma isótropa. Hay un detector de electrones muy cercano al emisor que detecta cada electrón que regresa hacia el emisor. Cuál es el cociente entre emitidos y detectados?

9. Considere un protón de 1 eV en la ionósfera terrestre con su velocidad perpendicular al campo magnético local. Calcule el cociente entre las intensidades de las fuerzas gravitatoria y de Lorentz que actúan sobre la partícula.

10. Cuál es el período de deriva ecuatorial para electrones, protones y iones O^+ con $\theta_0 = 45°$ sobre líneas de campo con $L = 2$, $L = 3$ y $L = 4$?

11. Considere el movimiento periódico de una partícula cargada sobre una línea de campo del dipolo terrestre que se extiende a una distancia máxima LR_E del dipolo. Considere específicamente una partícula que se refleja cerca del plano ecuatorial.
(a) Aplicando la ecuación para la intensidad del campo dipolar magnético, muestre que para puntos cercanos al plano ecuatorial la magnitud del campo magnético está dada por una expresión de la forma

$$B(L,s) \approx \frac{B_0}{L^3}\left[1 + \frac{\zeta}{2}\left(\frac{s}{LR_E}\right)^2\right] \quad ,$$

donde s es la distancia del plano ecuatorial y ζ es una constante numérica. Encuentre el valor de ζ.

(b) Substituyendo este resultado en la ecuación de la energía, muestre que para $s \ll LR_E$ la expresión para la conservación de la energía para el movimiento a lo largo de la línea de campo es como la de un oscilador armónico. Encuentre una expresión para la frecuencia de la oscilación en términos de la energía W de la partícula, el parámetro L y el peso atómico A.

12. Una partícula cargada se pierde en la densa atmósfera de neutros si su altura sobre la superficie terrestre es menor que 200 km. Calcule el mínimo ángulo de paso ecuatorial de los electrones y de los iones H^+ y O^+ para que continúen en atrapamiento magnético en los casos $L = 2$, $L = 3$ y $L = 4$. Cuál es el período de estas partículas?

13. Halle la expresión para la corriente generada debido a la trayectoria de iones y electrones en el entorno de una hoja (neutra) donde se produce el cambio de polaridad de campo magnético. Compare los valores de la corriente de anillo con la corriente de hoja neutra en la magnetocola para periodos típicos calmos de actividad geomagnética.

14. Demuestre que $\frac{\partial B}{\partial t} = rot(\underline{U} \times \underline{B})$ implica el congelamiento entre fluido y campo magnético. Mostrar que esta condición combinada con la ecuación de continuidad de la masa, implican que $\frac{d(B/\rho)}{dt} = (\underline{B}/\rho \bullet \nabla)\underline{U}$ (lo cual implica intensificación de B cuando las líneas de campo se estiran, y a la inversa, un mecanismo equivalente a lo que ocurre con la vorticidad en un fluido neutro, ver por ejemplo pag. 267 del libro clásico de Batchelor de fluidos).

15. * Considere un campo magnético inicial uniforme, $\underline{B} = B_0\widehat{y}$, en un plasma de resistividad nula. Suponga que un campo de velocidades $\underline{v} = v_0 \exp(-y^2)\widehat{x}$ es encendido en $t = 0$. Hallar la expresión para la evolución temporal del campo magnético. Realice un gráfico de las líneas de campo para una escala de longitud $d \sim 1$ (d en las mismas unidades en que está y), para tiempos $t \sim d/v_0$. Analice si existen diferentes regímenes según cuánto tiempo transcurre desde el encendido del campo de velocidades. Si es así encuentre las condiciones que debe cumplir t para cada régimen y grafique las líneas del campo $\underline{B}$.

16. Cuando el número de Reynolds magnético es mucho menor que la unidad,

$$R_B = \frac{|\nabla \times (\underline{U} \times \underline{B})|}{|\eta_0 \underline{\nabla}^2 \underline{B}|} \sim UL/\eta_0 \ll 1,$$

el término convectivo de la ecuación de inducción magnética puede ser despreciado, resultando una ecuación de difusión.
Suponga que la difusividad magnética η_0 es constante y que el campo $\underline{B}$ tiene sólo componente B_y, la cual es sólo función de la coordenada espacial x y del tiempo t.

a) Mostrar que la evolución del campo para $t > 0$ con una condición inicial arbitraria $B_y(x, t = 0) = f(x)$, puede ser obtenida de

$$B_y(x,t) = (4\pi t/\eta_0)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4\eta_0 t}\right] ds.$$

b) Considere ahora que inicialmente un campo magnético uniforme subyace la región $x < 0$, pero no se expande a la región $x > 0$. Obtener una expresión para la evolución de $B_y(x,t)$. Graficar $B_y(x,t)$ en función de la variable sin dimensiones x/λ_D, donde $\lambda_D = \sqrt{(4\eta_0 t)}$ es una distancia típica a través de la cual difunde campo magnético durante un tiempo t. Interprete el significado de λ_D en este problema.

17. a) Muestre que la fuerza de Lorentz ($\underline{J} \times \underline{B}$) puede ser descompuesta como

$$\underline{J} \times \underline{B} = -c\underline{\nabla}(B^2/8\pi) + \frac{c}{4\pi}(\underline{B} \bullet \underline{\nabla})\underline{B}, \ (1)$$

es decir como la suma de una presión magnética isótropa mas una fuerza que sólo es no nula cuando existen variaciones de $\underline{B}$ a lo largo de la dirección de $\underline{B}$. Muestre que el segundo término de (1) puede a su vez ser descompuesto en una tensión que actúa en la dirección de $\underline{B}$ (cancelando la presión paralela a $\underline{B}$) mas una tensión perpendicular a $\underline{B}$ ($T_\perp = B^2/R_c$) que actúa oponiéndose a la curvatura (tensión restitutiva), R_c es el radio de curvatura de la línea de campo magnético.

b) Considere una configuración de campo magnético $\underline{B_0} = y\widehat{x} + x\widehat{y}$, la cual contiene un punto magnético neutro tipo X en el origen. Muestre que esta configuración sólo es consistente con densidad de corriente nula. Calcule la expresión de las líneas de campo magnético y grafíquelas. Muestre que es una configuración de equilibrio e interprete este equilibrio desde la visión de presión y tensión magnética. A pesar de que existe un gradiente de presión no nulo, la tensión magnética perpendicular se encarga de cancelarla. Muéstrelo para aquellos elementos de fluido posicionados en $y = 0$ y $x = x_0 > 0$. Interprete este resultado.

c) Considere ahora $\underline{B_1} = y\widehat{x} + \alpha^2 x\widehat{y}$, con $\alpha^2 > 1$, configuración que también tiene un punto tipo X en el origen.
i- Encuentre la expresión para las líneas de campo magnético y grafíquelas.
ii- Halle las expresiones para la corriente que genera este campo magnético y para la

fuerza de Lorentz.
iii- Explique la fuerza de Lorentz desde la visión de presión y tensión magnética.
iv- El caso $\alpha - 1 << 1$ es una configuración perturbada a la presentada en b). Suponiendo situaciones con congelamiento magnético, ¿es esta configuración estable o inestable? Justifique cualitativamente su respuesta.

18. Linealice las ecuaciones MHD alrededor de equilibrios estáticos ($\vec{u}_0 = 0$) y homogéneos ($\rho_0 = cte$, $\vec{B}_0 = \vec{cte}$), en la aproximación adiabática.

    (a) Muestre que aparecen 3 modos de propagación, conocidos como los modos de Alfvèn, y magnetosónicos rápido y lento. Calcule la expresión de la velocidad de fase de cada uno de estos modos en función de: la velocidad de Alfvèn, la velocidad del sonido, y el ángulo que forma el vector número de onda con el campo magnético $\vec{B}_0$.

    (b) Grafique diagramas polares para los 3 modos de propagación, que muestren la dependencia de la velocidad de fase en unidades de la velocidad de Alfvèn (es decir $\omega/(kv_A)$) con la dirección de propagación de la onda. Confeccione estos diagramas para distintos valores del parámetro β del plasma.

19. a) Desarrollar en Taylor el campo $\vec{B}$ en el entorno de un punto neutro y mostrar que solo se pueden formar puntos tipo 'X' o tipo 'O'. Calcular la densidad de corriente en un punto 'X' en función del ángulo que forman las separatrices y de la variación del campo magnético sobre la escala de longitud en la que éste varía. b) Mostrar que si las condiciones de contorno lo permiten, un punto X tiende a desestabilizarse, formando una hoja de corriente, aumentando la corriente y la disipación Ohmica en la región de difusión.

20. (a) Enuncie las varias hipótesis involucradas en la derivación del modelo de Sweet-Parker.
    (b) Derive la ley de escalas de este modelo de reconexión, es decir

    $$M = \frac{U_{in}}{V_A} = \frac{l}{L} = S^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

    donde U_{in} es la velocidad de entrada del material a la zona de reconexión, de tamaño $(2l) \times (2L)$, V_A es la velocidad de Alfven y S es el número de Lundquist.

21. A partir de un modelo hidrodinámico con simetría esférica, halle las posibles soluciones al perfil de velocidad del gas en el entorno del Sol (que escapa debido a la gran presión en la corona solar). Cuál de estas soluciones del modelo corresponde al viento solar.

22. * (a) En un modelo MHD ideal de viento solar esférico (dependencia únicamente con la distancia al Sol, y simetría esférica), y a partir de suponer que cerca de la corona el

viento solar es radial, y que la velocidad (radial) es constante, mostrar que las líneas de campo son espirales. (b) Cuál es el ángulo que forman las líneas de campo a 1 Unidad Astronómica del Sol? Y en el entorno de Júpiter y Saturno? (c) Cuántas vueltas alrededor del Sol recorre la espiral de Parker hasta que alcanza el choque terminal (100 UA)?

23. Cuánto tiempo tardará un protón del viento solar, desde que sale del Sol hasta que llega al choque terminal (a unas 100 UA)? Compare este tiempo con lo que tarda la luz entre que parte del Sol y llega al choque terminal.

24. Calcule el valor típico de la velocidad de Alfveń en el viento solar. Compare con la velocidad del viento. Explique porqué existe una onda de choque en los planetas del sistema solar.