Problemas de Física 4
§ Postulados, Formalismos y Operadores Cuánticos

1. **Conceptos Básicos de Probabilidad**:

(a) En una sala hay 14 personas cuyas edades son las siguientes:
1 persona tiene 14 años
1 persona tiene 15 años
3 personas tienen 16 años
2 personas tienen 22 años
2 personas tienen 24 años
5 personas tienen 25 años

i. Dibujar un histograma de los datos
ii. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga 15 años?
iii. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 14 o 15 años?
iv. ¿Cuál es la edad mas probable?
v. ¿Cuál es el promedio de edad?
vi. ¿Cuál es el promedio del cuadrado de las edades?
vii. ¿Cuál es la *standard deviation* de esta distribución?

(b) Considerar las primeras 25 cifras significativas de π.

i. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los 10 dígitos?
ii. ¿Cuál es el dígito mas probable?
iii. ¿Cuál es el promedio?
iv. ¿Cuál es la *standard deviation* de esta distribución?

(c) La aguja de un velocímetro roto está libre de dar cualquier valor, indicando cualquier ángulo entre 0 y π

i. Calcular la densidad de probabilidad $\rho(\theta)$
ii. Graficar $\rho(\theta)$ en función de θ entre $\frac{-\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$
iii. Calcular $< \theta >$, $< \theta^2 >$ y σ.
iv. Calcular $< \sin(\theta) >$, $< \cos(\theta) >$ y $< \cos^2(\theta) >$.

(d) Considerar el problema anterior, pero ahora interesados en la proyección que hace la aguja con el eje x.

i. Calcular la densidad de probabilidad $\rho(x)$
ii. Graficar $\rho(x)$ en función de x entre $-2r$ y $2r$ (r es el largo de la aguja).
iii. Calcular $< x >$, $< x^2 >$ y σ.

(e) (**) Se tira una aguja de largo l aleatoriamente en una hoja con renglones separados por una distancia l. ¿Cuál es la probabilidad que la aguja cruce una línea?

(f) Considerar una distribución Gaussiana: $\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$.

i. Graficar $\rho(x)$ en función de x
ii. Encontrar A
iii. Calcular $< x >$, $< x^2 >$ y σ.

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

2. **Valores Propios**:
   Determinar cuáles de los siguientes funciones son funciones propias del operador $\hat{p_x}$ (en la representación x) y cuáles son autofunciones del operador $\hat{H}$ (partícula libre).
   (a) $\psi(x) = Asin(kx)$
   (b) $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$
   (c) $\psi(x) = Ae^{ax^2}$
   (d) $\psi(x) = Ae^{ax}$
3. **Operadores Hermíticos**:
   (a) Señalar cuáles de los siguientes operadores son Hermíticos:
      i. $\hat{x}$
      ii. $\hat{p_x} = -i\hbar\frac{d}{dx}$
      iii. $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$
      iv. $\hat{W} = \hat{S} + \hat{J}$ ($\hat{S}$ y $\hat{J}$ son Hermíticos)
      v. $\hat{W} = \hat{S} + i\hat{J}$
   (b) Demostrar que los valores propios de un operador Hermítico son reales.
   (c) Demostrar que las funciones propias de un operador Hermítico (no degenerado) son ortogonales.
4. Supongamos que $\{u_j\}$ es un grupo completo de autofunciones de dos operadores lineales $\hat{W}$ y $\hat{S}$. Demostrar que $[\hat{W}, \hat{S}] = 0$
5. **Conmutadores**:
   (a) Verificar las siguientes propiedades
      i. $[\hat{r}, \hat{s}] = -[\hat{s}, \hat{r}]$
      ii. $[\hat{r}, s \hat{+} t] = [\hat{r}, \hat{s}] + [\hat{r}, \hat{t}]$
      iii. $[\hat{r}, \hat{st}] = [\hat{r}, \hat{s}]t + s[\hat{r}, \hat{t}]$
      iv. $[\hat{rs}, \hat{t}] = [\hat{r}, \hat{t}]s + r[\hat{s}, \hat{t}]$
   (b) Evaluar los siguientes operadores
      i. $[\hat{x}, \hat{\frac{d}{dx}}]$
      ii. $[\hat{\frac{d}{dx}}, \hat{x^2}]$
      iii. $[\hat{x}, \hat{p_x}]$
      iv. $[\hat{z}, \hat{p_x}]$
      v. $[\hat{H}, \hat{x}]$ ($\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano en 1 dimensión)
      vi. $[\hat{H}, \hat{p}]$
6. **Transformación de Fourier**:
   (a) Calcular la transformada de Fourier de una función Lorentziana:
   $$f(x) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2 + x^2} \quad (\alpha > 0).$$
   (b) La transformada de Fourier de una función Gaussiana:
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}.$$
   es
   $$F(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$
   Calcular el producto $\sigma_x\sigma_k$

7. **Bases**
   (a) Demostrar que las funciones $A\sin(\frac{n\pi}{a}x)$ forman una base completa entre 0 y a
   (b) Dibujar la función $y(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}}(a-x)x$ expandiendola en sólo un término de la base, en 2 y en 4.
8. **Función de Onda**:
   (a) Si la función de onda se puede escribir como $\Psi = \sum_i a_i\psi_i$, ¿significa que tenemos un conglomerado de sistemas en el cual una parte está en el estado ψ_1, otra en ψ_2, etc.?
   (b) Si la función de onda se puede escribir como $\Psi = \sum_i a_i\psi_i$, ¿significa que el sistema está en el estado ψ_i con probabilidad a_i?
   (c) Sean infinitos estados ψ_i tales que $\hat{H}\psi_i = E_i\psi_i$. ¿Eso significa que los ψ_i son los únicos estados posibles del sistema?
   (d) ¿Un vector estado cuántico, describe un conjunto de sistemas clásicos?
   (e) ¿Un vector estado cuántico, describe un sistema único promediado sobre un tiempo determinado?
   (f) Se tiene un operador $\hat{Q}$ y sus autovalores $\hat{Q}\psi_i = q_i\psi_i$. ¿Cómo se expresa el valor medio de $\hat{Q}$ en función de los q_i?
   (g) Supongamos que se mide una cantidad Q en varios sistemas idénticos. ¿El valor medio es el resultado que tiene mayor probabilidad de ser obtenido en éstas mediciones?
   (h) Se mide Q en un estado Ψ y da como resultado q_j. Si se repite la medición inmediatamente despues, ¿qué valor obtendremos?
9. Demostrar el *teorema de Ehrenfest*:

$$\frac{d<p>}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$