Problemas de Física 4
§ Atomo de Hidrógeno

1. Sean $\Psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ las soluciones del átomo de hidrógeno. Sean $R_{nl} = \frac{u_{nl}}{r}$ las funciones radiales reducidas. Mostrar que u_{10}^2 tiene un máximo en $r = a_0$ (el radio de Bohr).

2. Calcular el radio, la energía y la longitud de onda de la transición $n = 2 \rightarrow n = 1$ de los siguientes sistemas de 2 partículas: (Calcular significa con unidades !!)
   (a) H^2 (hidrógeno pesado = deuterón + electrón)
   (b) He^+
   (c) positronio
   (d) mesonio ($m_\mu = 207\ m_e$)

3. Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado

$$\Psi(r,0) = \frac{4}{(2a_0)^{3/2}}\left[e^{-r/a_0} + A\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}(-iY_1^1 + Y_1^{-1} + \sqrt{7}Y_1^0)\right]$$

   (a) Calcular el valor de normalización A
   (b) Calcular la probabilidad de medir $\hbar^2 l(l+1)$ en una medición de L^2
   (c) Calcular la densidad de probabilidad $P_r(r)$ de encontrar el electrón en una capa dr alrededor del protón
   (d) Calcular el radio en el cual P_r es máximo
   (e) Calcular la energía media
   (f) Supongamos que se mide $L_z|\Psi(r,t=0)\rangle$ y resulta un valor $+\hbar$. ¿Cuánto vale $\Psi(r,t>0)\rangle$?
   (g) ¿Y si el resultado anterior fue $L_z|\Psi(r,t=0)\rangle = 0$?

4. Encontrar la energía mas baja y el menor radio de inflexión (*classical turning point*) para el átomo de hidrógeno en estados con $l = 6$

5. Encontrar la densidad de probabilidad para un estado con $E = 3.40$ eV.

6. Usando la regla de recursión, demostrar que la solución radial del átomo de hidrógeno cumple con

$$R_{n(n-1)} = N_n r^{n-1} e^{-r/(na_0)} \tag{1}$$

7. Mostrar que un estado estacionario nl del átomo de hidrógeno cuyo momento angular es máximo
   (a) $\langle r\rangle = a_0 n(n+\frac{1}{2})$
   (b) $\langle r^2\rangle = a_0^2 n^2(n+1)(n+\frac{1}{2})$
   (c) Usar los resultados anteriores para mostrar que si n y l son muy grandes el electrón está localizado cerca de la superficie de una esfera de radio $a_0 n^2$ y su energía es igual a la de un electrón clásico
   (d) Calcular el valor mas probable del radio para $l = n - 1$

§http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII

8. La función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} Z^{3/2}(6 - Zr)Zre^{-\frac{Zr}{3}}\cos\theta$$

   (a) Determinar los valores de los números cuánticos n, l y m_l de Ψ por inspección.
   (b) Generar otra función con los mismos valores de n y l, pero con $m_l + 1$.
   (c) Determinar el valor más probable de r en el estado especificado por Ψ, para $Z = 1$.

9. ** Calcular el estado básico de hidrógeno en la representación de momento. Ayuda: Usar coordenadas esféricas con el eje en la dirección de p. Hacer la integral de θ primero.

$$\Phi(p) = \frac{1}{\pi}(\frac{2a_0}{\hbar})^{3/2}\frac{1}{\left[1 + (\frac{a_0 p}{\hbar})^2\right]^2}$$

   (a) Graficar la función
   (b) Chequear la normalización
   (c) Calcular $\langle p^2 \rangle$
   (d) Calcular $\langle T \rangle$ (chequear teorema virial)

10. En las figuras siguientes están dibujadas las soluciones radiales $\Psi_{nl}(r)$ y las funciones radiales reducidas $P_{nl}(r) = r\Psi_{nl}(r)$, para los orbitales $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $3d$, $4s$, $4p$ y $4d$ del átomo de Hidrógeno. Identificar cada figura.

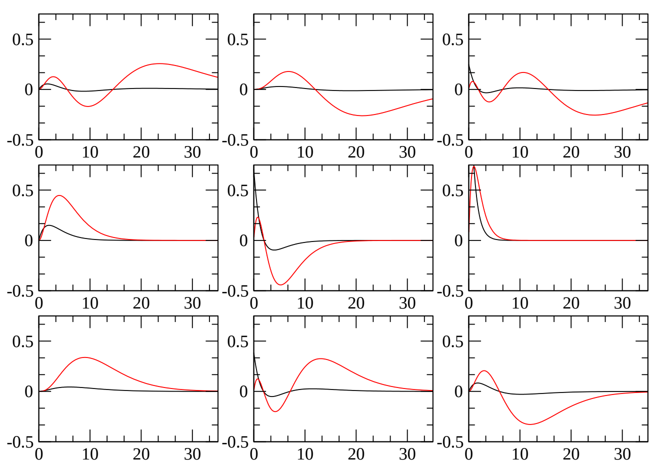

Figure 1: Soluciones radiales del átomo de Hidrógeno.