Problemas de Física 4
§ Momento angular

1. **Calculos básicos**
   Demostrar las siguientes expresiones:

   (a) $[\hat{L}_z, x] = i\hbar y$, $[\hat{L}_z, y] = -i\hbar x$, $[\hat{L}_z, z] = 0$
   (b) $[\hat{L}_z, p_x] = i\hbar p_y$, $[\hat{L}_z, p_y] = -i\hbar p_x$, $[\hat{L}_z, p_z] = 0$
   (c) $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$
   (d) $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$

   Utilizando las expresiones anteriores, calcular:

   (a) $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$, $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$
   (b) $\hat{L} \times \hat{L}$ (comparar con el resultado clásico y explicar)
   (c) $[\hat{L}^2, \hat{L}]$
   (d) $[\hat{L}_z, r^2]$ $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$
   (e) $[\hat{L}_z, p^2]$
   (f) El conmutador de $H = p^2/2m + V(r)$ con $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$

2. **Algunas propiedades**

   (a) Mostrar que $\hat{L}_x$ y $\hat{L}^2$ son Hermíticos
   (b) Si $[\hat{A}, \hat{L}_x^2] = [\hat{A}, \hat{L}_y^2] = 0$, ¿Cuánto vale $[\hat{A}, \hat{L}^2]$?
   (c) Supongamos que un sistema está rotando en el espacio, y que medimos su momento angular. ¿Es posible que hallemos el valor $L = \hbar\sqrt{7}$?
   (d) Supongamos que encontramos que $L^2 = 30\hbar^2$. Luego medimos L_z. ¿Qué valores vamos a encontrar?

3. **Sumatoria de momentos angulares**
   Demostrar que si J_1 y J_2 son dos momentos angulares, entonces la suma de ellos $J = J_1 + J_2$ también lo es.

4. **Autofunciones simultáneas de momentos angulares**
   Demostramos antes que $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$. Esto significa que se pueden encontrar autofunciones simultáneas de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$. Los pasos para hallar esas funciones son los siguientes:

   (a) Definimos $\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$
      i. demostrar: $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$
      ii. demostrar: $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$
      iii. demostrar que si f es una autofunción de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, entonces la función $\hat{L}_\pm f$ también lo es. ¿Cuáles son los autovalores?
   (b) Demostrar que $\hat{L}^2 = \hat{L}_\pm\hat{L}_\mp + \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z$
   (c) Supongamos entonces que f son las autofunciones simultáneas que buscamos $\hat{L}^2 f = \lambda f$ y $\hat{L}_z f = \mu f$. Entre estas f, existe una f_t a la cual, si se le aplica el operador $\hat{L}_+ f_t = 0$ (esto es debido a que la componente z del vector L no puede exceder su módulo). Supongamos que para ésta función se obtiene: $\hat{L}_z f_t = \hbar l_{max} f_t$ y $\hat{L}^2 f_t = \lambda f_t$. l_{max} es el máximo autovalor que puede tener el operador $\hat{L}_z$. Demostrar (aplicando la expresión anterior de $\hat{L}^2$) que $\lambda = \hbar^2 l_{max}(l_{max} + 1)$.

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

(d) Repetir el paso, pero para el caso $\hat{L}_- f_b = 0$. En este caso $\hat{L}_z f_b = \hbar l_{min} f_b$ y $\hat{L}^2 f_b = \lambda f_b$. Demostrar que $\lambda = \hbar^2 l_{min}(l_{min} - 1)$.

(e) Igualar las dos expresiones de λ y encontrar la relación entre l_{max} y l_{min}

(f) Conclusión: Por medios *puramente algebraicos* hemos determinado los autovalores de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, aún sin saber nada de sus autofunciones. Sintetizar los resultados.

5. **Operadores Escalera**
Vimos que estos operadores cambian el autovalor de $\hat{L}_z$ en una unidad de $\hbar$:

$$\hat{L}_\pm f_l^m = A_l^m f_l^{m\pm 1}$$

(a) ¿Son Hermíticos estos operadores?

(b) ¿Cuánto vale A_l^m?

(c) ¿Cuánto vale A_l^m en la cima y en el fondo de la escalera?

(d) Dado el armónico esférico $Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{15/(8\pi)}\sin\theta\cos\theta\ e^{i\phi}$, calcular $Y_2^2(\theta,\phi)$.

6. **Autofunciones del momento angular**

(a) Expresar $\hat{L}_z$ en coordenadas esféricas

(b) Expresar $\hat{L}_\pm$ en coordenadas esféricas

(c) Suponer que la autofunción del momento angular Y_l^l se puede escribir como:

$$Y_l^l(\theta,\phi) = f_l^l(\theta)e^{il\phi}.$$

Aplicar $\hat{L}_+ Y_l^l(\theta,\phi) = 0$ y demostrar que

$$Y_l^l(\theta,\phi) = c_l(\sin\theta)^l e^{il\phi}.$$

7. **Por qué l no puede ser semi–entero**:

(a) Supongamos que $l = 1/2$. Vimos antes que a partir de $\hat{L}_+ Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = 0$ se llega a

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = c_{1/2}\sqrt{\sin\theta}e^{i\frac{\phi}{2}}$$

(b) Aplicar $\hat{L}_-$ a $Y_{1/2}^{1/2}$ y construir $Y_{1/2}^{-1/2}$

(c) Suponer que $Y_{1/2}^{-1/2}$ se puede escribir $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi) = f(\theta)e^{-i\frac{\phi}{2}}$. Aplicar $\hat{L}_- Y_{1/2}^{-1/2} = 0$ y verificar que se obtiene una $Y_{1/2}^{-1/2}$ distinta a la hallada anteriormente. Esto prueba que l no puede ser $1/2$.

8. **Representaciones del momento angular**

(a) Expresar la matriz $\hat{L}_x$ en la base de autofunciones del momento angular, para $l = 0, 1, 2$

(b) Expresar la matriz $\hat{L}_\pm$ en la base de autofunciones del momento angular, para $l = 0, 1, 2$