Problemas

§ Oscilador Armónico (unidimensional)

1. **Operadores Creación y Aniquilación**

   (a) Sean $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ los operadores de creación y aniquilación. Comprobar que

   $$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$$

   (b) Comprobar si estos operadores son Hermíticos

   (c) Normalizar los estados $|n\rangle$ (producidos por la aplicación sucesiva de $\hat{a}^\dagger$ a $|0\rangle$)

   (d) Escribir la representación matricial de estos operadores

2. **Espectro de potenciales similares al del oscilador armónico**

   (a) Calcular las energías de un electrón sujeto a un potencial

   $$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}\kappa\hat{x}^2$$

   i. Se sabe que la diferencia entre $E_4 - E_5 = 10$ eV, y que $V_0 = 2$ eV. Calcular E_3

   ii. Calcular cuánto varía la energía de E_1 si se multiplica la constante κ por 9.

   (b) Calcular el espectro de una partícula que se mueve en un potencial

   $$V(x) = \frac{1}{2}\kappa\hat{x}^2 + b\hat{x}$$

3. **Comparación con caso clásico**

   (a) Un oscilador armónico consiste en una masa de 1 gr oscilando a una frecuencia de 1 Hz. La masa pasa a través de la posición de equilibrio a una velocidad de 10 cm/s. Calcular el número cuántico asociado a la energía de este sistema. Calcular la distancia entre los distintos ceros de su función de onda.

4. **Estados estacionarios del oscilador armónico**

   (a) Calcular $\langle\hat{x}\rangle$ y $\langle\hat{p}\rangle$, para un estado $|n\rangle$

   (b) Mostrar que $\langle\hat{V}\rangle = \langle\hat{T}\rangle = \frac{\langle E\rangle}{2}$

   (c) Calcular $\langle n+\eta|\hat{x}^2|n\rangle$ para η=1,2,3,4

   (d) Calcular $\langle n+\eta|\hat{p}^2|n\rangle$ para η=1,2,3,4

   (e) Calcular el cociente (para $\eta = 0, \pm 2$)

   $$\frac{\langle n+\eta|\hat{T}|n\rangle}{\langle n+\eta|\hat{V}|n\rangle}$$

5. **Estados coherentes**

   (a) Considerar un *estado coherente* $|\alpha\rangle$ que es una combinación lineal de autoestados del Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional con frecuencia ω

   $$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/

i. Normalizar $|\alpha\rangle$
ii. Calcular la probabilidad de encontrar $E = \frac{5\hbar\omega}{2}$ en este estado
iii. Comprobar que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
iv. Calcular el elemento de matriz $\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle$ (usar (iii))

6. **Otras combinaciones de estados estacionarios del oscilador armónico**

(a) Construir la combinación $\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ tal que $\langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle$ sea máximo

(b) Calcular el valor medio de $\hat{p}$ y $\hat{\mathcal{P}}$ en Ψ

(c) Repetir el problema para una combinación lineal cualquiera de estados con la misma paridad

7. **Evolución temporal**

(a) Sea $|\Psi_n(x,0)\rangle = |n\rangle$. Calcular $|\Psi_n(x,t)\rangle$.

(b) Sea $|\Psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\Psi_0(x,t)\rangle + |\Psi_1(x,t)\rangle]$. Calcular $\langle\hat{x}\rangle$ en $\Psi(x,t)$.

(c) Repetir el problema con la misma combinación, pero ahora entre Ψ_1 y Ψ_3

8. **Principio de Correspondencia**
En clase demostramos que la probabilidad de encontrar una partícula clásica está dada por

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}.$$

(a) Comparar esta probabilidad con el caso cuántico

(b) Repetir el problema, en el espacio de los momentos