1er Parcial Física 1, 1er Cuatrimestre 2010
Cátedra Jorge Miraglia

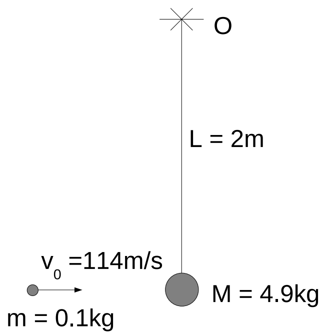
Nota: Use $g = 10m/s^2$ y justifique todas sus respuestas.

1. Un péndulo de masa $M = 4{,}9kg$ y longitud $L = 2m$ está en reposo en su posición de equilibrio. Una bala de masa $m = 0{,}1kg$, que se mueve en una trayectoria rectilínea con velocidad $v_0 = 114m/s$ choca plásticamente con el péndulo. (Ver figura)
a) Cuál es el apartamiento máximo al que llegan ambas masas después del choque? Mida los ángulos respecto de la posición de equilibrio.
b) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria entre el punto más bajo y el punto máximo al que llegan ambas partículas.
c) Cuál tendría que haber sido el valor de v_0 para que ambas masas puedan dar una vuelta completa, con el hilo siempre tensionado?
d) Calcule el torque de todas las fuerzas respecto del punto O, y en base al resultado obtenido determine si se conserva el momento angular desde ese punto.

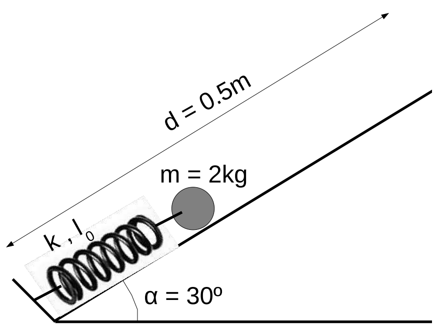
2. Un cuerpo de masa $m = 2kg$ está unido a un resorte de constante elástica $k = 800N/m$ y longitud natural $l_0 = 20cm$, sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha = 30^{\text{o}}$, como se esquematiza en la figura. La longitud total del plano inclinado es $d = 0{,}5m$.
a) Plantee las ecuaciones de Newton y escriba la ecuación de movimiento del sistema. Determine la posición de equilibrio.
b) Si inicialmente se comprime al resorte 15cm a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle la posición de la masa en función del tiempo.
c) En uno de los ciclos se corta el resorte cuando la masa está pasando por la posición de equilibrio, yendo hacia arriba del plano inclinado. Determine a qué distancia de la base del plano inclinado va a caer la masa.

3. Un bloque $m_1 = 1kg$ está apoyado sobre otro bloque de masa $m_2 = 2kg$ como indica la figura. El bloque de masa m_2 está unido, mediante un hilo inextensible de masa despreciable, a un tercer bloque de masa m_3 desconocida. Considere que no hay rozamiento entre el bloque m_2 y la superficie horizontal donde se apoya ni tampoco entre el bloque m_3 y el plano inclinado. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre los bloques m_1 y m_2 son $\mu_e = 0{,}3$ y $\mu_d = 0{,}2$, respectivamente.
a) Haga el diagrama de cuerpo libre y escriba las ecuaciones de Newton para los tres cuerpos.
b) Cuánto puede valer m_3 como máximo, para que los cuerpos de masa m_1 y m_2 no deslicen uno respecto del otro. Halle la aceleración del sistema en ese caso.
c) Si $m_3 = 3kg$, cuánto vale la fuerza de rozamiento? Es estática o dinámica?

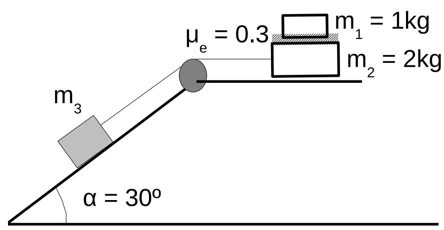
4. **Tercera ley de Kepler:** Aproximando el movimiento de los planetas a un movimiento circular uniforme demostrar que el periodo de los planetas es proporcional a la potencia 3/2 de la longitud del radio de sus orbitas



Problema 1



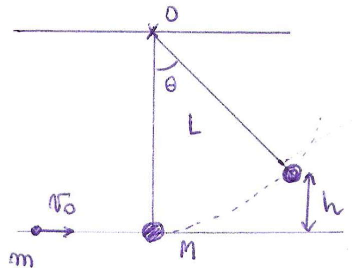
Problema 2



Problema 3

Problema 1

Parcial 11/05/2010



$L = 2m$

$M = 4.9\,kg$

$m = 0.1\,kg$

$v_0 = 114\,m/s$

$\boxed{\text{Sistema: } m + M}$

a) Considero q' el choque ocurre instantáneamente $(\Delta t \to 0)$ ⇒ en el choque $\bar{p} = cte$ y puedo calcular la velocidad de ambas masas. (T y $(m+M)g$ son externas, pero desprecio su efecto durante el choque)

$$m v_0 = (m+M) v_f \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{m}{m+M} v_0 = 2.28\,m/s}$$

Como la ! F_{NC} es la T y no realiza W ⇒ $E_M = cte$ → calculo la altura a la q' llegan, de la conservación de E_M

- Llamo i al instante inicial justo después del choque
- f al final (altura máxima)

$$E_i = \frac{1}{2}(m+M) v_i^2 = \frac{1}{2}(5\,kg)(2.28\,m/s)^2$$

$$E_f = \cancel{(m+M)} g h_{max} = \frac{1}{2}\cancel{(m+M)} v_i^2 \Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{(2.28\,m/s)^2}{20\,m/s^2} = 0.26\,m}$$

Como $h = L(1-\cos\alpha) \Rightarrow \frac{h}{L} = 1 - \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{h}{L} = 0.87$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 30^\circ}$$

b) $W_{mg} = \int_0^{\pi/6} Mg(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}) \cdot l\,d\theta\,\hat{\theta} = \int_0^{\pi/6} -mg \operatorname{sen}\theta\, l\,d\theta =$

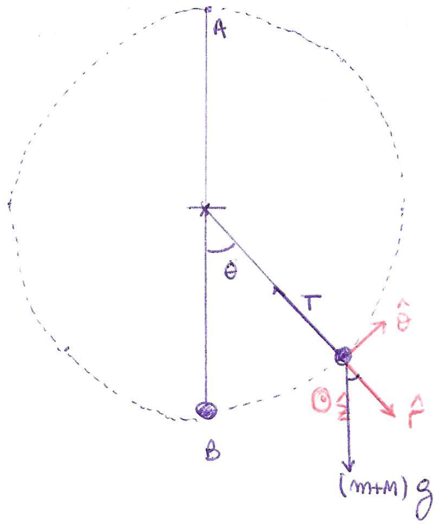
$= -mgl \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = mgl\cos\theta \Big|_0^{\pi/6} = mgl\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 5\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 2m \times 0.13$

$$\boxed{= W_{mg} = -13\,J}$$

Además, por otro lado, como $W_{mg} = -\Delta U_{mg} = -(U_f - U_i) = -(mgh_{max} - 0)$

$$\boxed{W_{mg} = -mgh_{max} = -5\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.26\,m = -13\,J} \quad //$$

c)



Veo cuánto tiene que valer v_A para que dé la vuelta completa

$$\sum F_r = mg\cos\theta - T = m(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2) = -mr\dot{\theta}^2$$

$$\sum F_\theta = -mg\,\text{sen}\,\theta = m(2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = mr\ddot{\theta}$$

De la ecuación en $\hat{r}$), con $r = L$

$$mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2 = T$$

Como $v_A = L\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_A}{L}\right)^2$; $\cos\theta = -1$

$$\Rightarrow mg\underbrace{\cos\theta}_{-1} + m\cancel{L}\frac{v_A^2}{L^{\cancel{2}}} = T$$

$\Rightarrow T = m\left(\frac{v_A^2}{L} - \cancel{m}g\right) > 0$ para que esté siempre tensionado (T no puede ser ≤ 0)

$$\Rightarrow \frac{v_A^2}{L} - g > 0 \Rightarrow \boxed{v_A > \sqrt{gL} = \sqrt{10\,m/s^2 \cdot 2m} = 4.47\,m/s}$$

Para q' v_A sea como mínimo 4.47 m/s, busco cuánto tiene q' valer v_B como mínimo; por conservación de E_M

$$E_B = E_A$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}(m+M)}\,v_B^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}(m\cancel{+}M)v_A^2 + 2(m\cancel{+}M)g\,2L \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 4gL = gL + 4gL = 5gL$$

$v_A^2 = gL$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{5gL} = 10\,m/s}$$

$\Rightarrow$ Para ver el choque de nuevo: $m v_0 = (m+M) v_B \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{(m+M)\,v_B}{m} = 500\,m/s}$

d) $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}^0_{(m+M)\bar{g}} + \underbrace{\bar{\tau}^0_{\bar{T}}}_{0} = \bar{\tau}^0_{(m+M)\bar{g}}$

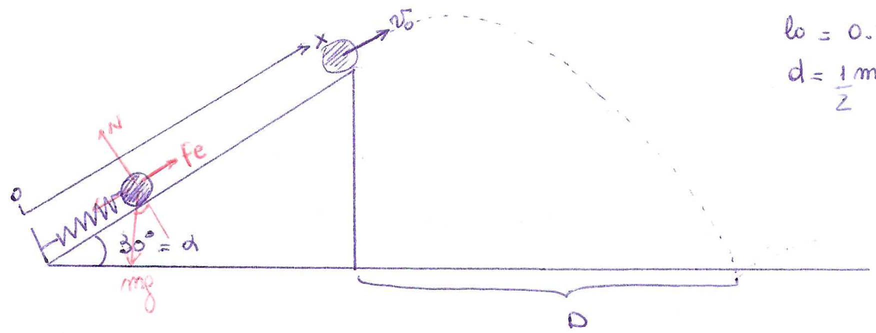
0 xq' $\left.\begin{array}{l}\bar{T} = T\hat{r} \\ \bar{r} = r\hat{r}\end{array}\right\}$ son ∥

vectorialmente $\left\{\begin{array}{l}\text{el peso se escribe como } (m+M)g(\cos\theta\,\hat{r} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}) \\ \text{el } \bar{r}_0 = L\hat{r}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\tau}_{\bar{p}} = \underbrace{L\hat{r} \wedge (m+M)g(\cos\theta\,\hat{r}}_{\hat{r}\wedge\hat{r}=0} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}) = -L(m+M)g\,\text{sen}\,\theta\,\hat{z} \neq 0}$$

$\Rightarrow$ Como $\sum \bar{\tau}^0_{ext} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\bar{L}_0 \text{ no se conserva}}$

Problema 2:



$m = 2kg$
$k = 800 N/m$
$l_0 = 0.2 m$
$d = \frac{1}{2} m$

a) $\Sigma F_x = -k(x - l_0) - mg \operatorname{sen}\alpha = m\ddot{x}$

$\Sigma F_y = N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$

De ΣF_x escribo la ecuación de movto: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}l_0 - g\operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 - g\operatorname{sen}\alpha}$ → Ecuación de movimiento

$x_{eq} \rightarrow \ddot{x}_{eq} = 0 \Rightarrow \frac{k}{m}x_{eq} = \frac{k}{m}l_0 - g\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg\operatorname{sen}\alpha}{k} = 0.1875 m}$ $0.2m - \frac{2kg \cdot 10 m/s^2 \cdot 0.5}{800 N/m}$

b) $x(t=0) = x_{eq} - 15 cm$

$\dot{x}(t=0) = 0$

Planteando $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_{eq}$

$x(t=0) = A\cos\varphi + \cancel{x_{eq}} = \cancel{x_{eq}} - 0.15m \Rightarrow A = -15 cm = -0.15 m$

$\dot{x}(t=0) = 0 \rightarrow -A\omega \operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = -0.15m\cos(\omega t) + 0.1875 m}$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 1/s}$

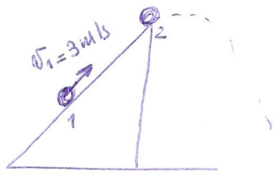
c) Cuando se corta el resorte → no hay más fuerza elástica.

Calculo la velocidad que tenía la masa cuando se corta el resorte: como estaba en x_{eq} ⇒ tiene la velocidad máxima.

$\dot{x}(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t)$ → es máximo cuando $\operatorname{sen}(\omega t) = 1$

$\Rightarrow \dot{x}_{max} = -A\omega = +0.15m \times 20 1/s = 3 m/s$

Si $d = 0.5 m$



$E_1 = mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1^2$

$E_2 = mgh_2 + \frac{1}{2} m v_2^2$

$h_1 = 0.1875 \operatorname{sen} 30 = 0.09375 m$

$h_2 = 0.5 \operatorname{sen} 30 = 0.25 m$

$\Rightarrow gh_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = gh_2 + \frac{1}{2} v_2^2$

$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} v_2^2$

$10 \frac{m}{s^2} (0.09375 - 0.25) m + \frac{1}{2} 9 \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} v_2^2$

$\sqrt{2 \times 2.9375 \frac{m^2}{s^2}} = \boxed{v_2 = 2.42 \frac{m}{s}}$ //

Por cinemática:

$v(t) = 3 \frac{m}{s} - 5 \frac{m}{s^2} t$

$x(t) = 0.1875 m + 3 \frac{m}{s} t - \frac{5}{2} \frac{m}{s^2} t^2$

$0.5 m - 0.1875 m = 3t - \frac{5}{2} t^2$

$0.3125 = 3t - 2.5 t^2 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2.5 \times 0.3125}}{5} = \frac{3 \pm 2.42}{5}$

$2.5 t^2 - 3t + 0.3125$

$t_{1,2}$: 0.116 ; 1.084

me quedo con el t + chico xq' es la 1ra vez que pasa x ese pto... después se cae y no vuelve a pasar

$t = 0.116 \rightarrow v = 3 \frac{m}{s} - 5 \frac{m}{s^2} \, 0.116 s = \boxed{2.42 \frac{m}{s} = v_2}$ //

Una vez que llega a la punta: tiro oblicuo

$\vec{v}_0 = 2.42 \frac{m}{s} (\cos 30 \, \hat{x} + \operatorname{sen} 30 \, \hat{y})$

$h = \frac{0.5}{2}$

$v_{0x} = 2.1 m/s$

$v_{0y} = 1.21 m/s$

$x(t) = x_0 + v_{0x} t = v_{0x} t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$ ($x_0 = 0$)

$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$y(x) = y_0 + v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$

x tq' $y = 0$ $\quad 0 = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2$

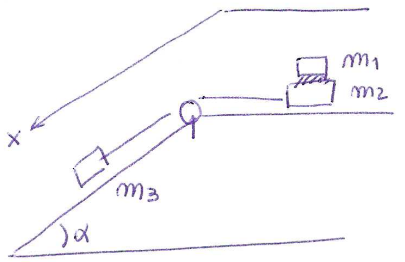
$x = \left[- \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{4 g}{2 v_{0x}^2} y_0} \right] \underbrace{\frac{1}{2 \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}}}_{2.27} (-1) = + 0.58 \mp \frac{\sqrt{0.33 + 1.14}}{2.27}$ (1.21)

$\boxed{x_A = 0.8 m}$

$x_{A2} = -0.28 m$

esto es la solución $y = 0$ antes de salir

Problema 3



$\alpha = 30°$

$m_1 = 1\,kg$

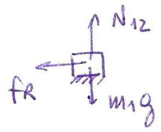
$m_2 = 2\,kg$

$m_3 = ?$

$\mu_e = 0.3$

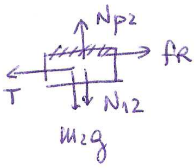
a)

m_1



$$\begin{cases} \Sigma F_x = f_R = m_1 a_1 & (1) \\ \Sigma F_y = N_{12} - m_1 g = 0 \Rightarrow \boxed{N_{12} = m_1 g} \end{cases}$$

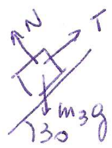
m_2



$$\begin{cases} \Sigma F_x = T - f_R = m_2 a_2 & (2) \\ \Sigma F_y = N_{p2} - N_{12} - m_2 g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{p2} = m_2 g + N_{12} = (m_1 + m_2) g}$$

m_3



$$\begin{cases} \Sigma F_x = -T + m_3 g \,\text{sen}\, \alpha = m_3 a_3 & (3) \\ \Sigma F_y = N - m_3 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N = m_3 g \cos \alpha} \end{cases}$$

b) Si m_1 y m_2 no deslizan uno respecto del otro $\Rightarrow a_1 = a_2$
Como el hilo es inextensible $\rightarrow a_3 = a_2$
$\Big\} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a$

$\Rightarrow$ (1) $f_R = m_1 a \leq \mu_e N_{12} \Rightarrow \quad a \leq \dfrac{\mu_e N_{12}}{m_1} = \dfrac{\mu_e m_1 g}{m_1} = \mu_e g = 0.3 \; 10 \dfrac{m}{s^2} = 3 \dfrac{m}{s^2}$

(2) $T - f_R = m_2 a$

$\Rightarrow \boxed{a \leq 3 \dfrac{m}{s^2}}$

(3) $m_3 g \,\text{sen}\, \alpha - T = m_3 a$

Sumo (2)+(3) $\rightarrow$ $m_3 g \,\text{sen}\, \alpha - f_R = (m_2 + m_3) a$

$$m_3 g \,\text{sen}\, \alpha = (m_3 + m_2) a + f_R = (m_3 + m_2) a + m_1 a$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3) a$$

$$\Rightarrow m_3 g \,\text{sen}\, \alpha = (m_1 + m_2 + m_3) a \leq (m_1 + m_2 + m_3) \cdot 3 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow m_3 (\underbrace{g \,\text{sen}\, \alpha - 3\,m/s^2}_{2\,m/s^2}) \leq \underbrace{(m_1 + m_2)}_{3\,kg} \, 3\,m/s^2 = 9\,N$$

$$\Rightarrow \boxed{m_3 \leq \frac{9\,N}{2\,m/s^2} = 4.5\,kg}$$

Si $m_3 = 4.5\,kg \Rightarrow a = 3\,m/s^2$

c) Si $m_3 = 3\,kg \Rightarrow$ el rozamiento va a ser estático (xq $m_3 < 4.5\,kg$)

$\Downarrow$ $a_1 = a_2 = a_3 = a$

$\Rightarrow$ (1) $f_{Re} = m_1 a$

(2) $T - f_{Re} = m_2 a$

(3) $m_3 g \operatorname{sen}\alpha - T = m_3 a$

(2) + (3) $\rightarrow$ $m_3 g \operatorname{sen}\alpha - f_{Re} = (m_3 + m_2)\,a$ (uso (1))

$m_3 g \operatorname{sen}\alpha = (m_1 + m_2 + m_3)\,a$

$$\Rightarrow a = \frac{m_3 g \operatorname{sen}\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\cancel{3}\,\cancel{kg}\ 5\,m/s^2}{2\cancel{6}\ \cancel{kg}} = \frac{5}{2}\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2.5\ \frac{m}{s^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{Re} = m_1 a = 1\,kg \cdot 2.5\,\frac{m}{s^2} = 2.5\,N}$$