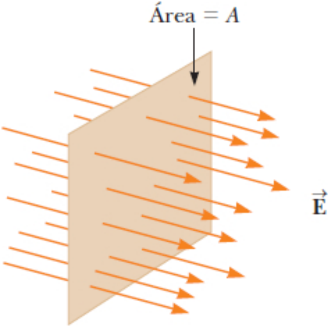
6. Flujo Eléctrico y Ley de Gauss

Recordemos que dibujamos las líneas de campo eléctrico con un número de líneas N:

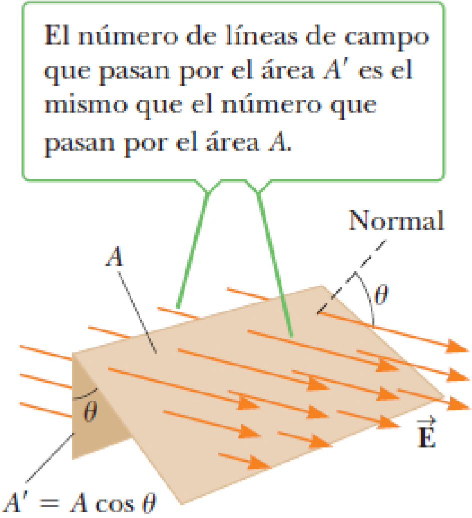
$$\frac{N}{A} \propto E$$

El número de líneas N se llama **flujo eléctrico**:

$$\Phi_E = N = E\,A \qquad [\frac{Nm^2}{C}]$$



Flujo Eléctrico



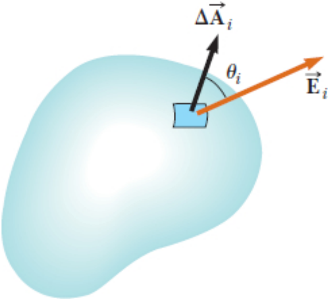
Flujo Eléctrico

Si la superficie A es un plano:

$$\Phi_E = E\,A_\perp = E\,A\,\cos\theta$$

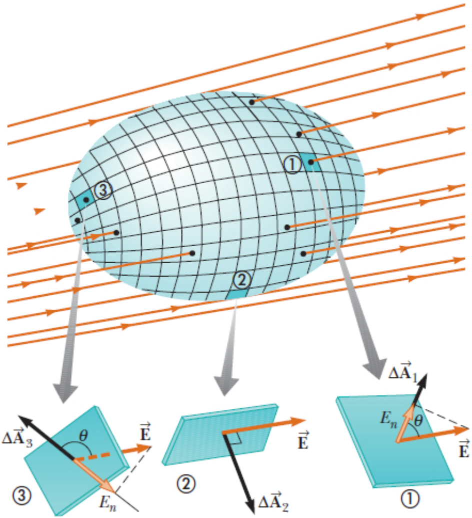
En una distribución general, se define el **elemento normal de superficie** $\Delta\vec{A}_i$:

$$\Delta\Phi_E = E_i\,\Delta A_i\,\cos\theta_i = \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{A}_i$$



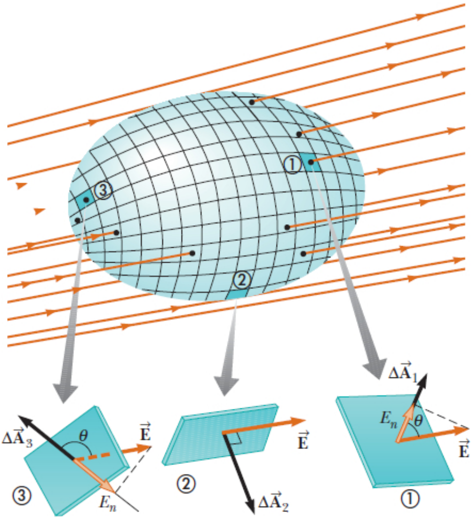
Flujo Eléctrico

El flujo eléctrico se define como la cantidad de líneas que **salen** de la superficie.
Si las líneas entran, el flujo es **negativo**.



Flujo Neto

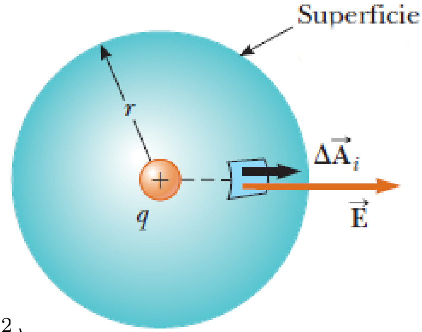
El flujo eléctrico neto se define como la cantidad de líneas que **salen menos** la cantidad de líneas que **entran** a una superficie **cerrada**.



Flujo en esfera que rodea a carga puntual

$$\Delta\Phi_{E_i} = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Pero $\vec{E}$ y $\Delta\vec{A}_i$ son paralelos (ambos salen radialmente de la superficie).



$$\begin{aligned}\Phi_E &= \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i = \\ &= \sum_i E\,\Delta A_i = \\ &= E\sum_i \Delta A_i = EA = E(4\pi r^2) = \\ &= k_e \frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e\, q\end{aligned}$$

Flujo en esfera que rodea a carga puntual

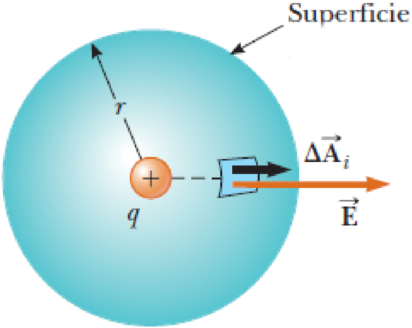
$$\Phi_E = 4\pi k_e \, q$$

Como la constante esta aparece muchas veces, se define una nueva constante

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{4\pi k_e} = 8.8542\times 10^{-12} \, \frac{C^2}{Nm^2}$$

De esta manera el flujo es:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad [\frac{Nm^2}{C}]$$



Flujo neto en esfera que rodea a carga puntual

Pregunta 2.14

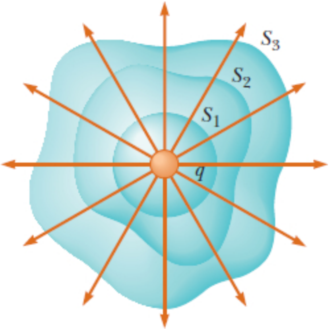
Una carga puntual se ubica en el centro de una superficie esférica. Sabemos calcular tanto el campo eléctrico en la superficie, y el flujo eléctrico a través de ella. Si el radio de la esfera se reduce a la midad:

1. El flujo y el campo aumentan.
2. El flujo y el campo disminuyen.
3. El flujo aumenta y el campo disminuye.
4. El flujo disminuye y el campo aumenta.
5. El flujo permanece igual y el campo aumenta.
6. El flujo disminuye y el campo permanece igual.

Flujo neto en superficie que rodea a carga puntual

Pregunta 2.15

¿Sobre cuál de estas 3 superficies atraviesa mas flujo neto?



Flujo de E uniforme a través de un cubo

En las caras perpendiculares al campo

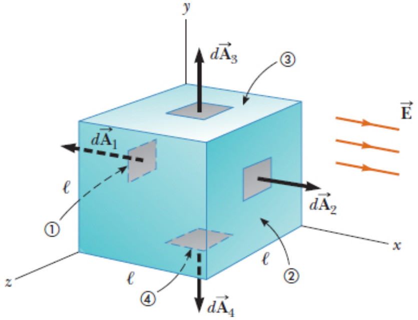
$$\Delta\Phi_{E_3} = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_3 = \\ = E\,A_3\cos 90^\circ = 0$$

Del mismo modo

$$\Phi_{E_4} = \Phi_{E_5} = \Phi_{E_6} = 0$$

El flujo total en estas caras es

$$\Phi_{E_3} = \Phi_{E_4} = \sum_i \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = 0$$



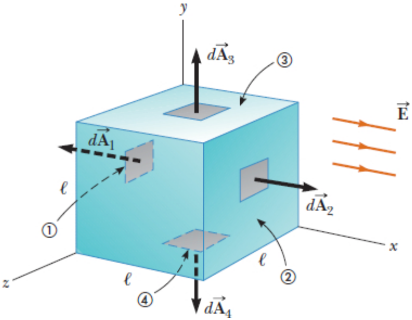
Flujo de E uniforme a través de un cubo

En la cara 2, paralela al campo

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{E_2} &= \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_2 = \\ &= E\,\Delta A_2 \cos 0^\circ = E\,\Delta A_2 \end{aligned}$$

El flujo total en esta cara es

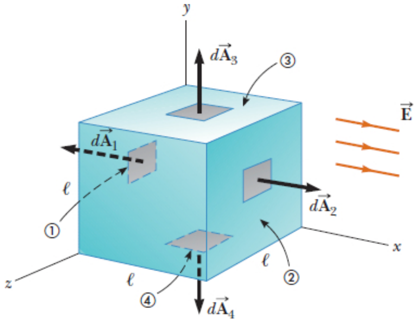
$$\begin{aligned} \Phi_{E_2} &= \sum_i \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = \\ &= E\sum_i \Delta\vec{A}_i = E\,A = E\,l^2 \end{aligned}$$



Flujo de E uniforme a través de un cubo

En la cara 1, antiparalela al campo

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{E_1} &= \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_1 = \\ &= E\,\Delta A_1 \cos 180^\circ = \\ &= -E\,\Delta A_1\end{aligned}$$



El flujo total en esta cara es

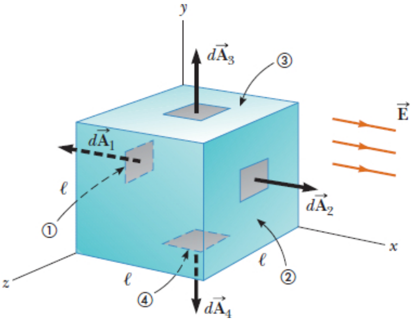
$$\begin{aligned}\Phi_{E_1} &= \sum_i \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = \\ &= -E\sum_i \Delta\vec{A}_i = -E\,A = -E\,l^2\end{aligned}$$

Flujo de E uniforme a través de un cubo

Sumando los flujos totales de todas las caras obtenemos

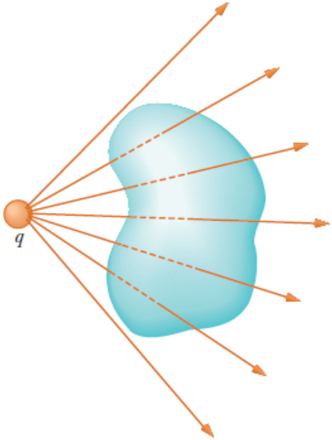
$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} + \Phi_{E_3} + \Phi_{E_4} + \Phi_{E_5} + \Phi_{E_6}$$

$$= -E\,l^2 + E\,l^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$



Carga puntual fuera de la superficie

El número de líneas de campo que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de la misma.
El flujo neto **es nulo**.



Ley de Gauss

(Ley de Gauss)

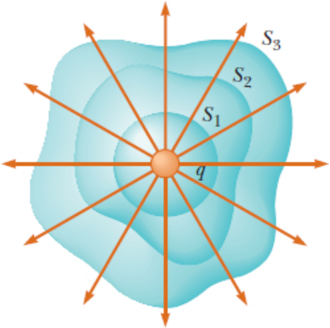
El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual, tiene un valor que depende de esa carga y es independiente de la forma de la superficie.

Karl Gauss
1777–1855

Ley de Gauss

(Ley de Gauss)

El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual, tiene un valor que depende de esa carga y es independiente de la forma de la superficie.



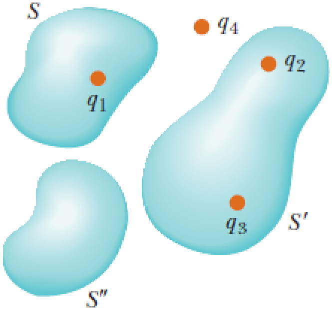
$$\Phi_{E_1} = \Phi_{E_2} = \Phi_{E_3} = 4\pi\, k_e\, q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss

Pregunta 2.16

¿Cuál es el flujo neto en cada una de estas superficies?

1. Φ_E en S: $\frac{q_1}{\epsilon_0}$.
2. Φ_E en S': $\frac{q_2+q_3}{\epsilon_0}$.
3. Φ_E en S'': 0.



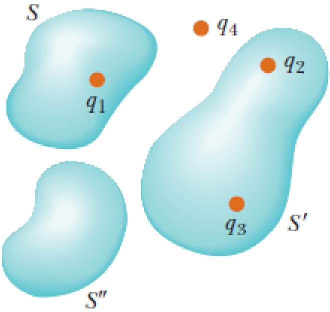
Ley de Gauss

(Ley de Gauss)

El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por esta.

$$\Phi_E = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0} \,,$$

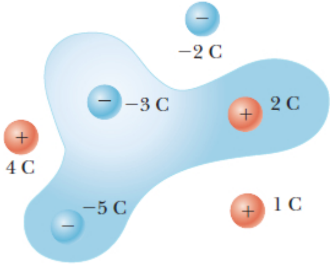
donde $Q_{interior}$ es la suma de las cargas q_i que se encuentran **dentro** de la superficie.



Ley de Gauss

Pregunta 2.17

¿Cuál es el flujo neto a través de esta superficie?



Ley de Gauss

Pregunta 2.18

Si el flujo neto que pasa a través de una superficie gaussiana es cero, las cuatro declaraciones siguientes podrían ser verdaderas. ¿Cuál de ellas es cierta?

1. No hay cargas dentro de la superficie.
2. La carga neta dentro de la superficie es cero.
3. El campo eléctrico es cero en cualquier lugar de la superficie.
4. El número de líneas del campo eléctrico que entra a la superficie es igual al número que sale de ella.

Ley de Gauss

Pregunta 2.19

Una superficie gaussiana esférica rodea a una carga puntual q.
¿Qué le sucede al flujo total a través de la superficie si:

1. La carga se triplica.
2. Se duplica el radio de la esfera.
3. La superficie se cambia a la forma de un cubo.
4. La carga se mueve a otro punto dentro de la superficie.

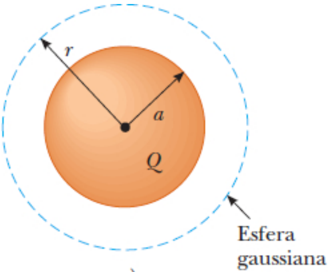
Cuidado !

1. Un flujo nulo no significa un campo nulo. (La ley de Gauss dice que el flujo es proporcional a la carga encerrada, no al campo).
2. Las superficies gaussianas no son reales.

Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría esférica

1) Afuera de la esfera: (para $r > a$)

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \sum_i \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}_i = \\ &= E \sum_i \Delta A_i = E\, 4\pi r^2 \end{aligned}$$



a)

por otro lado, la ley de Gauss dice que

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría esférica

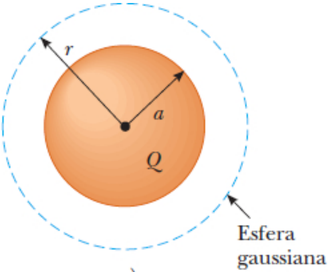
1) Afuera de la esfera: (para $r > a$)

$$\Phi_E = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por lo tanto, el campo afuera de la esfera se calcula haciendo:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e\,\frac{Q}{r^2}$$

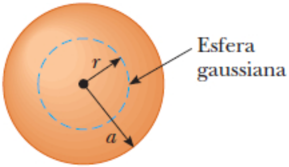


a)

Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría esférica

2) Adentro de la esfera: (para $r < a$)

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i = \\ &= E \sum_i \Delta A_i = E\, 4\pi r^2\end{aligned}$$



b)

por otro lado, la ley de Gauss dice que

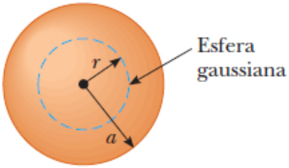
$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{q_{in}}{V'} = \frac{q_{in}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría esférica

2) Adentro de la esfera: (para $r < a$)

$$\Phi_E = E\,4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$



b)

Por lo tanto, el campo afuera de la esfera se calcula haciendo:

$$\begin{aligned} E\,4\pi r^2 &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \\ \rightarrow \quad E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,r = k_e\,\frac{Q}{a^3}\,r \end{aligned}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría esférica

3) Campo total

1. Adentro:

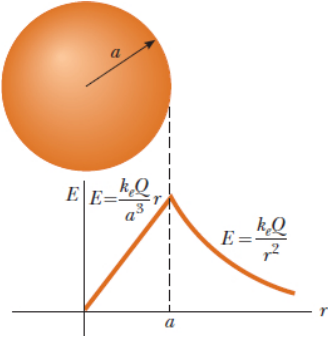
$$k_e \frac{Q}{a^3} r$$

2. Afuera:

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

3. En el borde $(r = a)$:

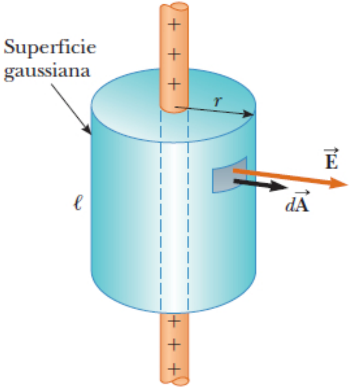
$$E = k_e \frac{Q}{a^2}$$



Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría cilíndrica

(línea infinita con densidad de carga constante)

Las superficies de arriba y abajo no contribuyen ya que el campo es radial ($\vec{E} \cdot \vec{A} = E\,A \cos 90^\circ = 0$).



En la superficie curva del cilindro

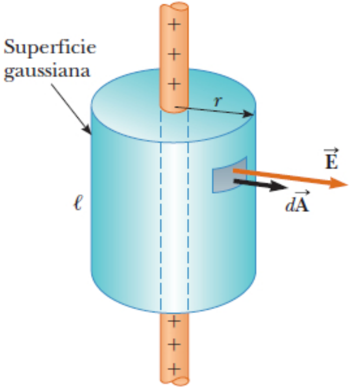
$$\begin{aligned} \Phi_E &= E\,A = E(2\pi r l) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss: Distribución de carga con simetría cilíndrica

(línea infinita con densidad de carga constante)

Por lo tanto, el campo se calcula haciendo:

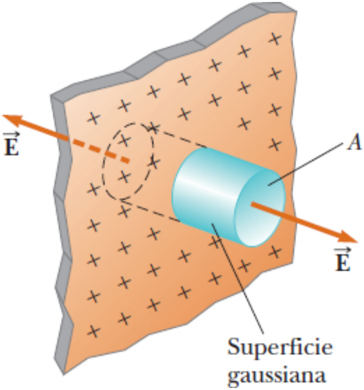
$$
\begin{aligned}
E\,2\pi r l &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \\
&\rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \\
&= \quad 2k_e\,\frac{\lambda}{r}
\end{aligned}
$$



Aplicaciones de la Ley de Gauss: Plano de carga

Las superficies curvas del cilindro no contribuyen. Sólo hay que calcular el campo en los discos de área A cuya carga es $q_{in} = \sigma A$.
Ambos discos contribuyen con el flujo, ya que en ambos casos el campo es **saliente**.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= E\,A + E\,A = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

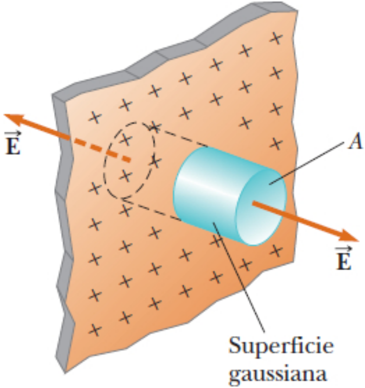


Aplicaciones de la Ley de Gauss: Plano de carga

Por lo tanto, el campo se calcula haciendo:

$$E\,2\,A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

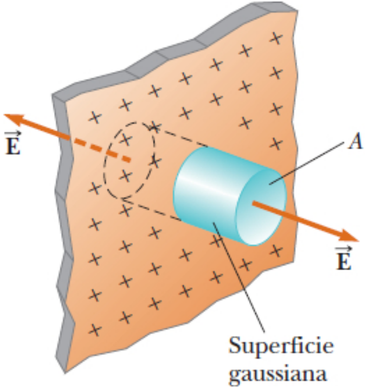
$$\rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Aplicaciones de la Ley de Gauss: Plano de carga

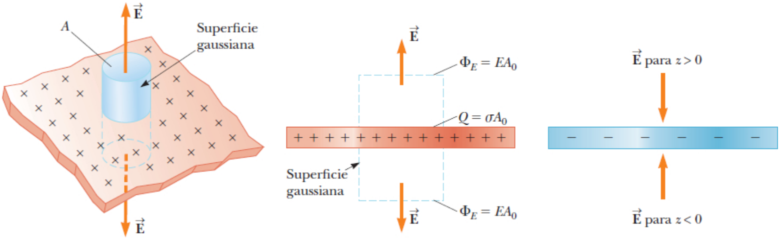
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Dado un plano infinito de cargas, el campo es uniforme en todas partes.



Aplicaciones de la Ley de Gauss: Plano de carga

Si el plano tuviera carga negativa:



Aplicaciones de la Ley de Gauss: Plano de carga

Y si ponemos a ambas placas enfrentadas: **Capacitor**