

Estructura de la materia 3

TEMA 11. REPASO. CAMPOS CLASICOS Y PRIMERA CUANTIFICACION

J. Miraglia

*Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.*

(Dated: February 29, 2016)

Abstract

Primera cuantificación. Estados de Volkov. Invariancia de gauge. Repaso. Radiación electromagnética clásica. Campos eléctricos y magnéticos. Densidad de energía. Vector de Poynting. Aproximación dipolar. Trabajando en una caja y la densidad de estados.

falta dibujos , español y bibliografía.

(sería interesante re-llamar $\lambda \vec{k} \rightarrow \underline{k}$ ahorraría mucho espacio)

PACS numbers:

I. PRIMERA CUANTIFICACIÓN

El Hamiltoniano clásico de una partícula de carga q sujeto al potencial V y al campo electromagnético caracterizado por el potencial vector \vec{A} esta dado por (Goldstein p. 256)

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV, \quad (1)$$

Y este es el punto de partida. La Eq(1) nos permite cuantificar el movimiento de una partícula según las reglas de la (primera) cuantificación (habra una segunda), que asume

$$\begin{cases} \vec{p} \rightarrow \widehat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}}, \\ \vec{r} \rightarrow \vec{r}, \\ H \rightarrow \widehat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} \quad (2)$$

luego

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}} - q\vec{A} \right)^2 + qV \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (3)$$

Desarrollando el cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}} - q\vec{A} \right)^2 &= \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}} \right)^2 - \frac{\hbar}{i}q \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{A} \right) + q^2 A^2, \\ &= -\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2 - 2q\frac{\hbar}{i}\vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + q^2 A^2, \end{aligned} \quad (4)$$

donde hemos hecho

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\vec{A}\Psi) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi + \underbrace{(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{A})}_{=0 \text{ gauge de Coulomb!}} \Psi \quad (5)$$

Finalmente podemos reescribir la ecuación de Schrödinger así

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = [H_0 + H' + H''] \Psi(\vec{r}, t), \quad (6)$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{r}}^2 + qV = \text{Hamiltoniano mecánico o de la materia}, \quad (7)$$

$$H' = -\frac{q}{m}\frac{\hbar}{i}\vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} = \text{interacción materia-radiación}, \quad (8)$$

$$H'' = \frac{q^2}{2m}A^2 = \text{energía ponderomotriz}, \quad (9)$$

Este es el Hamiltoniano semiclásico en el sentido que las magnitudes \vec{A} y V son clásicas y el electrón es puramente cuántico.

A. Estados de Volkov (1935)

Supongamos una partícula libre ($V = 0$), cuya solución es la conocida onda plana

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = H_0 \psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t), \quad (10)$$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(-it\varepsilon_k/\hbar), \quad (11)$$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}}, \quad y \quad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (12)$$

Supongamos que a partir de $t = t_0$, aparece en todo el espacio un potencial vector $\vec{A}(t)$ (pero $\vec{A} \neq \vec{A}(\vec{r})$, o sea **independiente** de la posición!). Entonces la solución del hamiltoniano son los llamados estados de Volkov :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}} - q\vec{A} \right)^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (13)$$

$$= [H_0 + H' + H''] \Psi(\vec{r}, t) \quad (14)$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(-iS(t)/\hbar), \quad (15)$$

$$S(t) = \frac{1}{2m} \int_{t_0}^t dt \left(\hbar \vec{k} - q\vec{A}(t) \right)^2, \quad (16)$$

donde hemos supuesto que $V = 0$. Luego veremos que V y $\vec{A}(t)$ están conectados via un *gauge* determinado. La verificación es obvia. El LHS de (13)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\Psi(\vec{r}, t)}_1 i\hbar \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \frac{1}{2m} \left(\hbar \vec{k} - q\vec{A}(t) \right)^2, \quad (17)$$

Por otro lado

$$H_0 \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t), \quad (18)$$

$$H' \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{q}{m} \frac{\hbar}{i} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{q}{m} \frac{\hbar}{i} \vec{A} \cdot i\vec{k} \Psi(\vec{r}, t), \quad (19)$$

$$H'' \Psi(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{2m} A^2 \Psi(\vec{r}, t). \quad (20)$$

Vemos que la suma de las Eqs.(18), (19) y (20) y sabiendo que $H = H_0 + H' + H''$, nos da el RHS Eq.(13)

B. Invariancia de gauge

En el curso básico de electricidad se vió que los campos eléctrico \vec{E} y magnetico \vec{B} ,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad (21)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (22)$$

quedan inalterados si se cambia

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad (23)$$

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi,$$

donde $\chi(\vec{r}, t)$ es una función arbitraria. En efecto, recordemos

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}V' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\vec{\nabla}\left(V - \frac{\partial}{\partial t}\chi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right) = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}, \quad (24)$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{B}. \quad (25)$$

Por lo tanto hay un espacio infinito de soluciones $\chi(\vec{r}, t)$ tal que permiten hacer en el gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = 0 \quad \text{con lo que,} \quad (26)$$

$$\nabla^2\chi = 0 \quad \text{condición de } \chi, \quad (27)$$

que es un excelente elección para tratar campos de radiación (luz) (A veces al *gauge* de Coulomb se los llama también *transverse gauge*). Sin embargo hay muchísimas posibilidades aún en el gauge de Coulomb. Nos queda ver que impacto tiene la introducción de $\chi(\vec{r}, t)$ en la ecuación de Schrödinger.

Problema. Nos preguntamos: Si $\Psi(\vec{r}, t)$ es la autofunción de la ecuación de Schrödinger cuando tenemos A , como es la solución $\Psi'(\vec{r}, t)$ cuando hacemos $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ y $V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi$? Reemplazandolo \vec{A}' en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}} - q\underbrace{[\vec{A} + \vec{\nabla}\chi]}_{\vec{A}'} \right)^2 + q\underbrace{\left[V - \frac{\partial}{\partial t}\chi\right]}_{V'} \right] \Psi'(\vec{r}, t). \quad (28)$$

Puede demostrarse que (queda para la práctica)

$$\Psi'(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t) \exp[iq\chi(\vec{r}, t)/\hbar]. \quad (29)$$

O sea la inclusión de $\chi(\vec{r}, t)$ conlleva simplemente a una rotación de la función de onda. Tenemos libertad para elegir $\chi(\vec{r}, t)$. Por ejemplo si elijo

$$\chi(\vec{r}, t) = -\vec{A}(t) \cdot \vec{r}, \quad \text{que verifica,} \quad (30)$$

$$\nabla^2 \chi(\vec{r}, t) = 0, \quad (31)$$

y por lo tanto satisface el *gauge* de Coulomb de acuerdo a la Eq.(27). Los términos de interés en la Eq.(29)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi = \vec{A} + \vec{\nabla}(-\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A} - \vec{A} = 0, \quad (32)$$

$$V' = V - \frac{\partial}{\partial t} \chi = 0 - \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{A} \cdot \vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \cdot \vec{r} = -\vec{E}(t) \cdot \vec{r}, \quad (33)$$

donde hemos usado el hecho que $\vec{E}(t) = -\partial \vec{A}(t)/\partial t$. Reemplazando en la Eq.(28), resulta

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi'(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 - q \vec{E}(t) \cdot \vec{r} \right] \Psi'(\vec{r}, t), \quad (34)$$

que se llama forma de la **longitud**, mientras que la Eq(3) se la conoce como la forma de la **velocidad**. Hay una tercera forma que involucra a una expresión determinada del Hamiltoniano que se llama forma de la **aceleración o fuerza** que veremos mas adelante, si tenemos tiempo.

Como trabajamos en MKS, podemos ver que la dimensión es correcta, $\vec{F} = q\vec{E}(r)$ es la fuerza que realiza el campo sobre la carga y $\vec{F} \cdot \vec{r}$ es la energía que se suma a la energía cinética. Mas aún, podríamos haber introducido directamente el Hamiltoniano Eq(34) de la misma manera que se trabajó cuando se vió el **efecto Stark** en teoría de perturbaciones.

C. Radiación electromagnética clásica

Repasemos la radiación electromagnética. Las 4 ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}, \quad (35)$$

y los potenciales

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad (36)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (37)$$

En el **gauge de Coulomb (temporal)** los potenciales satisfacen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (38)$$

por lo que las ecuaciones para \vec{A} y V se reducen a

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (39)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad (40)$$

En ausencia de cargas ($\rho = 0$) y corrientes eléctricas ($\vec{J} = 0$), o sea lejos de la fuente, las soluciones de \vec{A} en una caja en el vacío de un campo de luz clásico de frecuencias ω , es

$$\vec{A}_{\lambda \vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = \vec{A}_{\lambda \vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) + \vec{A}_{\lambda \vec{k}}^*(\omega, \vec{r}, t), \quad (41)$$

$$\vec{A}_{\lambda \vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} A_N \exp[i \vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + i\delta_\omega], \quad (42)$$

$$\vec{A}_{\lambda \vec{k}}^*(\omega, \vec{r}, t) = \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}}^* A_N^* \exp[-i \vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t - i\delta_\omega], \quad (43)$$

$$V = 0. \quad (44)$$

Como pedimos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (de (38) con $V = 0$), resulta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \propto \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \hat{k}$ con lo que el *gauge* de Coulomb se satisface ya que los dos versores de polarización son ortogonales a \vec{k}

$$\hat{\epsilon}_{1 \vec{k}} \cdot \hat{k} = \hat{\epsilon}_{2 \vec{k}} \cdot \hat{k} = \hat{\epsilon}_{1 \vec{k}} \cdot \hat{\epsilon}_{2 \vec{k}} = 0, \quad (45)$$

y los tres forman una terna ortonormal. Si pedimos que $\vec{A}_{\lambda \vec{k}}$ satisfaga la Eq.(40) entonces

$$\omega = c k, \quad (46)$$

c es la velocidad de la luz, $[c]=\text{metro/segundo}$, k es el número de onda ($[k]=1/\text{metro}$), y $\omega = 2\pi\nu$, ν es la frecuencia $[\omega] = [\nu]=1/\text{segundo}$, de modo tal que la energía de lo que se denominará fotón es

$$E = \hbar\omega = h(\omega/2\pi) = h\nu. \quad (47)$$

En general la función $\omega = \omega(k)$ representa una relación de dispersión, y conocemos algunos casos particulares

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{fotones,} & \hbar\omega = \hbar c k, & \text{lineal en } k, \\ \text{partículas} & \hbar\omega = \hbar^2 k^2/2m, & \text{cuadrático en } k, \\ \text{plasmones} & \hbar\omega \simeq cte, & \text{independiente de } k, \\ \text{fonones} & \hbar\omega \simeq 0, & \text{nulo,} \end{array} \right. \quad (48)$$

Físicamente, podemos decir esquemáticamente que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \text{ y } \widehat{\varepsilon}_{2\vec{k}}, & \text{son versores de polarización} \\ \omega \text{ ó } k \text{ ó } \nu, & \text{representa la energía ó color ,} \\ \delta_\omega, & \text{es la fase aleatoria (si la luz es no ,} \\ & \text{coherente debería ser promediada)} \end{array} \right. \quad (49)$$

Nos queda definir el valor de A_N que resultará ser

$$A_N = A_N(\omega) = \sqrt{\frac{\langle \rho(\omega) \rangle}{2\varepsilon_0\omega^2}}, \quad (50)$$

$$\langle \rho(\omega) \rangle = \text{valor medio de la densidad de energía} \quad (51)$$

$$V = \text{volumen de la caja de cuantificación}, \quad (52)$$

que demostraremos en la próxima sección. La razón por la cual indexamos con N (A_N) la explicaremos luego en conexión con la mecánica cuántica. De acuerdo a las expresiones (41) y (42) $\vec{A}_{\lambda\vec{k}}$ es real y vale

$$\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = \widehat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} 2A_N \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega]. \quad (53)$$

El espacio de todos los posible estados será

$$\vec{A} = \sum_{\lambda\vec{k}} \vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t), \quad (54)$$

que tienen en cuenta todos los posibles \vec{k} y $\widehat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}}$. Es una base.

D. Campos eléctricos y magnéticos

Una vez que está determinada la magnitud $\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t)$ nos queda calcular los campos eléctricos y magnéticos de acuerdo a sus definiciones.

a) El **campo eléctrico** es de (36)

$$\vec{E}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = -\widehat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} 2\omega A_N \sin[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega]. \quad (55)$$

Re-identificamos entonces a $\widehat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}}$ como la dirección del campo eléctrico (algo bien conocido en Optica, el sentido de que la polarización de los fotones corresponde a la del campo eléctrico).

b) El **campo magnético** requiere del rotor

$$\vec{B}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = -(\vec{k} \times \widehat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}}) 2A_N \sin[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega], \quad (56)$$

donde hemos usado la identidad

$$\vec{\nabla} \times \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) = i(\vec{k} \times \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (57)$$

Confirmamos entonces que la dirección del campo magnético es perpendicular a la del campo eléctrico, y que ambas **están en fase** en el tiempo (estamos en el vacío!). Notemos además que $\vec{E}_{\lambda \vec{k}} \propto \omega$, mientras que $\vec{B}_{\lambda \vec{k}} \propto k$ con lo que se encuentra que en módulo

$$E_{\lambda \vec{k}} = c B_{\lambda \vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} B_{\lambda \vec{k}} \quad (58)$$

c) De la física elemental se vio que la **densidad de energía** o sea la energía U de un campo electromagnético por unidad de volumen V era

$$\rho(\omega) = \frac{U_{\lambda \vec{k}}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}_{\lambda \vec{k}}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}_{\lambda \vec{k}}|^2. \quad (59)$$

Reemplazando los campos obtenidos en las Eqs.(55) y (58), tenemos

$$\rho(\omega) = \varepsilon_0 |\vec{E}_{\lambda \vec{k}}|^2 = 4\varepsilon_0 \omega^2 A_N^2 \sin^2[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega], \quad (60)$$

y es una expresión que depende del tiempo. Se toma el valor medio que se define

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt, \quad \text{entonces,} \quad (61)$$

$$\langle \sin^2(\alpha - \omega t) \rangle = \langle \cos^2(\alpha - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (62)$$

La densidad de energía promediada queda entonces

$$\langle \rho(\omega) \rangle = 2\varepsilon_0 \omega^2 A_N^2. \quad (63)$$

Ahora estamos en condiciones de determinar el valor de $A_N(\omega)$ dentro de la mecánica cuántica. . Si en el volumen V hay $N(\omega)$ fotones con energías $\hbar\omega$ (argumento cuántico!) entonces obviamente la densidad de energía es

$$\langle \rho(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{V} N(\omega). \quad (64)$$

Igualando ecuaciones (63) y (64) podemos determinar el valor de A_N

$$A_N = A_N(\omega) = \sqrt{\frac{\langle \rho(\omega) \rangle}{2\varepsilon_0 \omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar N(\omega)}{2\varepsilon_0 \omega V}} \quad (65)$$

Estamos trabajando en el sistema MKS. Pero en muchos libros americanos (el Jackson por ejemplo) se usa el sistema gaussiano, en ese caso hacemos $4\pi\epsilon_0 \equiv 1$ y entonces se escribe

$$A_N = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}. \quad (66)$$

d) Una magnitud interesante que se usa para determinar el flujos de la radiación, es el **vector de Poynting**, que se define

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (67)$$

veamos primero las unidades

$$[S] = \frac{\text{Ampere}}{\text{Tesla} \times \text{metro}} \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \text{Tesla} = \frac{\text{Joule}}{\text{metro}^2 \times \text{segundo}}, \quad (68)$$

o sea es el flujo de energía por unidad de tiempo y área. (para tener una idea, el vector de Poynting debido al sol sobre la tierra es 1.4 kiloWatt/m², sumando toda las frecuencias).

Reemplazando Eqs(55) y (58) en la Eq.(67) resulta

$$\vec{S} = \frac{\hat{k}}{\mu_0} E \overbrace{B}^{E/c} = \hat{k} \epsilon_0 c E^2 = \hat{k} 4c\epsilon_0 \omega^2 A_N^2 \sin^2[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_\omega]. \quad (69)$$

donde hemos usado el hecho que

$$\hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \times (\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}}) = \vec{k}, \quad (70)$$

Haciendo el promedio temporal, como siempre, resulta

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{k} c 2\epsilon_0 \omega^2 A_N^2, \quad (71)$$

Hay otra forma mas compacta de escribirla y es reemplazar $\langle \rho(\omega) \rangle = 2\epsilon_0 \omega^2 A_N^2(\omega)$ lo que resulta

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{k} c \langle \rho(\omega) \rangle, \quad (72)$$

Y esta es la forma clásica (precuántica!) de determinar A_N . via la determinación de $\langle \rho(\omega) \rangle$ que se puede determinar con algúa metodo clásico (por ejemplo calorimetría). Notemos la analogía de (72) con el flujo de un fluido (flujo=velocidad×densidad).

d) Recordemos que \vec{S} nos da el flujo energético. Si estamos interesados en el flujo sólo esto es el **número de partículas** por unidad de tiempo y area $\langle \vec{F} \rangle$, tenemos que dividir $\langle \vec{S} \rangle$ por $(\hbar\omega)$, o sea por la energía de las partículas, y nos da

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\langle \vec{S} \rangle}{\hbar\omega} = \frac{\hat{k}}{\hbar} \langle \rho(\omega) \rangle. \quad (73)$$

e) Se define la **presión** de la radiación :

$$\vec{P} = \frac{1}{c} \vec{S} = \hat{k} \langle \rho(\omega) \rangle .,$$

cuyas unidades son:

$$[P] = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \times \text{seg}} \times \frac{\text{seg}}{\text{m}} = \frac{\text{Newton}}{\text{m}^2} = [\text{presión}]. \quad (74)$$

(Para tener una idea, la presión del sol a la altura de la Tierra es $5 \times 10^{-6} \text{Nw/m}^2$, y toda la tierra recibe una fuerza de 10^8Newtons . Despreciable). También se define el **momento lineal** y para *twisted light* tambien el **momento angular**.

E. Aproximación dipolar

Como vimos $\vec{A}_{\lambda \vec{k}} \propto \exp(\pm i \vec{k} \cdot \vec{r})$, donde $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$. Debido a que c es muy grande, el momento del fotón k puede despreciarse. Por ejemplo: luz amarilla $\nu = 0.5 \times 10^{15} \text{1/seg}$, $k = 2\pi\nu/c \simeq 0.0005$, por lo que $\exp(i0.0005r) \simeq 1$. Y en general vale para todo el espectro de luz visible, ultravioleta e inclusive X blandos.

El valor de k será importante cuando $kr \gtrsim 1$, o sea $\omega r > c$, o $(2\pi\nu)r > c$, o $\nu > c/(2\pi r)$. para dimensiones atómicas $r \simeq a_0 = 5 \times 10^{-11}$ metros, $c = 3 \times 10^8$ metros/segundos, con lo que $\nu > 10^{20}$ 1/segundo. Que corresponde a los rayos X duros. Si estamos trabajando a nivel de física nuclear, los valores de r son digamos 1000 veces mas chicos con lo que la radiación limite corresponde a los rayos gamma.

Usando la aproximación dipolar el vector $\vec{A}_{\lambda \vec{k}}$ se reduce a

$$\vec{A}_{\lambda \vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = \vec{\mathcal{A}}_{\lambda \vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) + \vec{\mathcal{A}}_{\lambda \vec{k}}^*(\omega, \vec{r}, t), \quad (75)$$

$$\vec{\mathcal{A}}_{\lambda \vec{k}}(\omega, \vec{r}, t) = \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} A_N \exp[-i\omega t + i\delta_\omega], \quad (76)$$

$$\vec{\mathcal{A}}_{\lambda \vec{k}}^*(\omega, \vec{r}, t) = \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}}^* A_N^* \exp[+i\omega t - i\delta_\omega], \quad (77)$$

entonces el **fotón** se interpreta como una partícula **con energía pero sin momento**. En la mayoría de los casos el desfase δ_ω no interviene por lo que puede eliminarse del vamos.

F. Trabajando en una caja y la densidad de estados del foton

Cuando teníamos partículas libres, las ondas planas **en todo el espacio** se normalizaba a la delta de Dirac, esto es

$$\int d\vec{r} \underbrace{\frac{\exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}}}_{\psi_{\vec{k}'}^*(\vec{r})} \underbrace{\frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}}}_{\psi_{\vec{k}}(\vec{r})} = \delta(\vec{k}' - \vec{k}). \quad (78)$$

Cuando se trabaja con fotones se trabaja **en una caja**, como ya lo hicimos con electrones en Thomas Fermi. Es conceptualmente lo mismo. El volumen aquí es el **todo** espacio de interés y se supone que $L =$ longitud de la caja debería ser tendido a infinito al final del cálculo. (En Thomas Fermi nos quedamos sólo con la densidad) Se espera que el resultado no dependa del volumen. Y si uno es cuidadoso, efectivamente no depende, a tal punto que se pone $V = 1$ directamente. Las ondas planas aquí se refieren a las exponenciales $\exp(\pm i\vec{k} \cdot \vec{r})$ que aparecen en las definición de $\vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\omega, \vec{r}, t)$. Cuando tenemos una caja los valores de k no se consideran continuos sino que están -digamos- numerizados por la caja. Como pasamos de uno a otro?. Tomemos una dimensión, haciendo

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \text{ resulta} \quad (79)$$

$$\exp(ik_x x) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}n_x x\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{L}n_x x\right), \quad (80)$$

y así con todas las dimensiones. De esta manera numerizamos todos los "colores" posibles, La suma $\sum_{\lambda\vec{k}}$ en Eq.(54) ahora se reduce a $\sum_{\lambda, n_x, n_y, n_z}$ Las deltas de Dirac se transforman en deltas de Kronecker. En tres dimensiones resulta

$$\int_{Caja} \frac{d\vec{r}}{V} \exp[-i\vec{k}'(\vec{n}') \cdot \vec{r}] \exp[-i\vec{k}(\vec{n}) \cdot \vec{r}] = \delta_{\vec{n}', \vec{n}}. \quad (81)$$

Entonces el Volumen V reemplaza a $(2\pi)^3$ y la delta de Kronecker $\delta_{\vec{n}', \vec{n}}$ a la de Dirac $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ ya que \vec{n}' y \vec{n} son ahora las variables. La relación es simplemente

$$\int_{Caja} \frac{d\vec{r}}{V} \rightarrow \int_{\substack{\text{todo} \\ \text{el} \\ \text{espacio}}} \frac{d\vec{r}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (82)$$

Una cantidad muy importante era la **densidad de estados**, y esta resulta de la Eq.(79),

$$dn_x = \frac{L}{2\pi} dk_x, \quad dn_y = \frac{L}{2\pi} dk_y, \quad dn_z = \frac{L}{2\pi} dk_z, \quad (83)$$

$$d\vec{n} = \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3}, \quad \text{alternativamente si } k = \omega/c, \quad (84)$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3 c^3} d\vec{\omega} = \frac{V}{(2\pi)^3 c^3} \omega^2 d\omega d\Omega_\omega. \quad (85)$$

Esta cantidad la usaremos mucho cuando usemos la densidad de estados del fotón.