Radiación de Cuerpo Negro

1. **Derivación de la fórmula de Planck**:

   De la distribución de Wien:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{\beta f U} \tag{1}$$

   De la distribución de Rayleigh:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{k}{U^2} \tag{2}$$

   Planck interpoló:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{k}{U(hf+U)}, \tag{3}$$

   donde se pone $\beta \equiv \frac{h}{k}$.

   Integrando la ecuación (3):

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \int \frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\, dU = \frac{k}{hf}\left[\ln(1+\frac{U}{hf}) - \ln\frac{U}{hf}\right], \tag{4}$$

   (recordar que $\int -\frac{1}{x(a+x)} = -\frac{\ln(x)}{a} + \frac{\ln(x+a)}{a}$).

   De aquí podemos obtener $U(f,T)$:

$$\frac{k}{hf}[\ln(U+hf) - \ln(U)] = \frac{1}{T} \Longrightarrow \ln(1+\frac{hf}{U}) = \frac{hf}{kT} \tag{5}$$

   que a su vez, nos lleva a la distribución de Planck, ya que

$$U = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}, \tag{6}$$

   y entonces

$$\rho(f,T) = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}. \tag{7}$$

2. **Derivación de la Entropía**

   Integrando la ecuación (4):

$$S = \int \frac{\partial S}{\partial U}\, dU = k\left[(1+\frac{U}{hf})\ln(1+\frac{U}{hf}) - (\frac{U}{hf})\ln(\frac{U}{hf})\right] \tag{8}$$

   (recordar que $\int \ln(x) = -x + x\ln(x)$).

   La expresión de Boltzmann para la entropía es:

$$S = k \ln W \tag{9}$$

   por lo tanto, para un ensamble de N osciladores idénticos (todos oscilan con la misma frecuencia f, tienen la misma energía U, y a temperatura T), cuya entropía total es $NS = Nk\ln W$, resulta:

$$\ln W = N\left[(1+\frac{U}{hf})\ln(1+\frac{U}{hf}) - (\frac{U}{hf})\ln(\frac{U}{hf})\right]. \tag{10}$$

3. **Interpretación de la Entropía**

La interpretación de W es: ¿En cuántas formas distintas se pueden distribuir una energía total NU, si se tienen N osciladores?

La forma de la ecuación (10) sugiere preguntarnos: ¿En cuántas formas se pueden distribuir M objetos si se tienen N cajas (todos idénticos)?. La respuesta es:

$$W = \frac{(N+M-1)!}{M!(N-1)!}. \tag{11}$$

Utilizando la fórmula de Stirling $\ln N! \approx N \ln N - N$, nos queda:

$$\ln W = N \left[(1+\frac{M}{N}) \ln(1+\frac{M}{N}) - (\frac{M}{N}) \ln(\frac{M}{N}) \right]. \tag{12}$$

Las ecuaciones (10) con (12) son equivalentes si se cumple que

$$\frac{U}{hf} = \frac{M}{N} \qquad \text{o lo que es equivalente :} \qquad NU = Mhf. \tag{13}$$

Esto significa: La energía total de N osciladores idénticos a frecuencia f es NU, que es un número entero de cuantos hf.