

**Estudio de la radiación del cuerpo negro.
Determinación de la constante de Wien.**

Zamora Ramos, Rafael

INDICE

• Resumen.....	3
• Definición de cuerpo negro	4
• Introducción histórica	4
• Desarrollos teóricos de las contribuciones históricas.....	10
○ Ley de Kirchhoff de la emisión térmica	10
○ Ley térmica de emisión.....	11
○ Presión de radiación.....	12
○ Ley de Stefan_Boltzmann.....	13
○ Ley de desplazamiento Wien.....	14
○ Función de distribución de Wien.....	16
○ Ley de distribución Planck.....	17
○ Función clásica de Rayleigh-Jeans	21
• Deducción de la ley de Wien usando la función de distribución de Planck.....	25
• Deducción de la ley de Stefan-Boltzmann usando la función de distribución de Planck.....	26
• Comparativa históricas de las funciones de distribución.....	27
• Cálculo de la constante de Wein mediante cálculo numérico	27
• Calculo de la constante Stefan-Boltzmann de forma numérica.....	30
• Color de las estrellas versus temperatura superficial	33
• Conclusiones	37
• Bibliografía	38
• APENDICE A	41
○ Función NIntegrate de Wolfram Mathematica	41
○ Programa para el cálculo de la constante de Wein.....	41
○ Programa para el cálculo de la constante de Stefan Boltzmann	42
○ Programa para la representación del índice de color respecto a la temperatura..	43
○ Gráficas comparativas de las funciones de distribución de Planck, Wien y Rayleigh-Jeans.....	44

Resumen

Vamos a realizar un resumen de la evolución histórica del problema de la radiación térmica de un cuerpo negro y desarrollaremos los resultados más significativos, que se culminan con la obtención de la función de distribución de energía espectral por parte de Planck. Para su desarrollo, Planck necesitó plantear la cuantización de los modos de vibración, aunque será Einstein el que la asocie esta cuantización a la energía de la radiación. Este problema es de gran importancia porque significó el origen de la teoría cuántica.

Veremos qué significan las aportaciones a este problema tan clásico y conocido en el ambiente académico; y obtendremos, utilizando la función de distribución de Planck para el cuerpo negro, dos constantes importantes de este problema como son: la constante de Wien y la de Stefan-Boltzmann. El método utilizado será numérico por ser un método directo y didáctico, aunque no olvidaremos mencionar otro método posible.

El problema del cuerpo negro fue perdiendo interés después de 1910, cuando estaba resuelto e interpretada la cuantización, y el interés recayó en otros problemas como el efecto fotoeléctrico y la estructura del átomo, entre otros, en los que recayó la evolución de la teoría cuántica. Esta falta de interés por el problema del cuerpo negro fue debida a que su campo de aplicación no era muy grande. Sin embargo, cobró de nuevo importancia en el desarrollo de la astrofísica, en el estudio de la relación del color de la estrellas con la temperatura superficial de éstas, y también en las teorías del origen del universo con el descubrimiento de la radiación de fondo de microondas.

Definición de cuerpo negro

En un cuerpo caliente que está en equilibrio térmico con su entorno la emisión total de radiación térmica coincide con la absorción de radiación térmica como ya demostró Kirchhoff. Un cuerpo negro es una idealización de cuerpo en equilibrio térmico con su entorno pero con la condición especial de que la absorción de radiación del entorno es total y, por lo tanto, también lo es la emisión.

Una característica importante de este cuerpo negro ideal es que puede realizarse en el laboratorio una modelización bastante aproximada. Se realiza mediante una cavidad cerrada a una temperatura en la que hemos realizado un pequeño orificio por donde podremos observar la radiación térmica, teniendo siempre presente que el orificio debe ser lo suficientemente pequeño en comparación con el volumen de la cavidad para que no se escape apenas radiación de dicho cuerpo y pueda ser modelo válido para observar la “radiación negra”.

Introducción histórica

La radiación del cuerpo negro fue un problema teórico puntual que estudiaba la interacción del campo electromagnético con la materia. Para su resolución se necesitó el uso de la termodinámica y de la mecánica estadística. Su importancia radica en ser el precursor de la teoría cuántica ya que para su correcta solución se hizo necesaria la cuantificación de la energía lo cual dio origen a dicha teoría, que tanto revolucionó la ciencia del siglo XX.

El problema del cuerpo negro, sin embargo, no es un problema muy útil en la teoría cuántica o en la mecánica estadística, por lo que una vez resuelto su estudio pasó a tener un interés menor en el mundo científico. La astrofísica, que en un principio no tuvo relación alguna con este problema, es quizás la que mayor rendimiento le ha sacado al estudio del cuerpo negro en su comportamiento radiante, de un cuerpo negro y una estrella en sus comportamientos radiantes. También ha tenido importancia en la radiación de fondo cósmico: suponiendo el Universo como un todo, su comportamiento se aproxima al de un cuerpo negro, por lo que podríamos asociar la frecuencia de la radiación de fondo con la temperatura del Universo.

El problema del cuerpo negro fue enunciado por Gustav Kirchhoff en 1859, que demostró usando sólo conceptos termodinámicos que la emisividad de un cuerpo caliente en equilibrio deber ser igual a la absorbancia y que ésta sólo dependerá de la temperatura absoluta del cuerpo y no de la naturaleza ni del tamaño de éste. Debemos recalcar que en aquella época aún no se habían descubierto ni la existencia de la radiación electromagnética (por lo que se desconocía la naturaleza de la radiación térmica) ni la constitución de la materia.

Idealizando el caso anterior, podemos denominar cuerpo negro a un cuerpo cuya emisividad y absorbancia sea igual a uno.

No obstante, Kirchhoff no pudo llegar a obtener una función de distribución de esta radiación con respecto a la frecuencia o longitud de onda, dejando el problema abierto para la búsqueda de una solución.

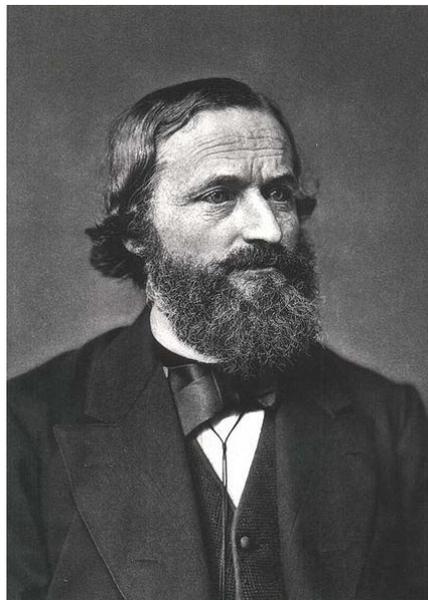


Fig. 1. Imagen de Gustav Kirchhoff.

En concreto G. R. Kirchhoff enunció durante el invierno de 1859-60 el siguiente teorema:

Sea $d\sigma$ un elemento de la superficie interior de la pared de una cavidad cualquiera, no necesariamente negra, y sea $a_\lambda(T)$ la fracción de energía incidente de longitud de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$, que es absorbida por ese elemento cuando la cavidad se mantiene a la temperatura T . La tasa a la que $d\sigma$ absorbe energía comprendida en ese intervalo es entonces $\pi a_\lambda K_\lambda d\sigma$, donde el factor π proviene de integrar sobre $d\Omega$ y siendo K_λ la distribución de intensidades de la radiación. Análogamente, sea $\pi e_\lambda(T) d\sigma$ la tasa con que $d\sigma$ radia, al interior de la cavidad, energía de ese mismo intervalo.

Para que haya equilibrio, es obvio que la emisión y absorción totales deben ser iguales, es decir, $\int_0^\infty a K_\lambda d\lambda = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda$.

Estudiando una cavidad con materiales diferentes en cada pared, Kirchhoff consiguió demostrar que la igualdad entre energía emitida y absorbida se cumple también para cada intervalo infinitesimal de longitudes de onda por separado, es decir, que $a_\lambda K_\lambda = e_\lambda$. Demostró además que como K_λ es constante en toda la cavidad, el

cociente entre e_λ y a_λ ha de ser igual para todos los materiales, independientemente de cómo éstos emitan y absorban.

Los anteriores resultados constituyen la ley de radiación de Kirchhoff:

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = K_\lambda(T) \quad (1)$$

donde la distribución de intensidades K_λ es una función universal que depende sólo de la temperatura y de la longitud de onda, pero no de la forma ni tamaño de la cavidad, ni del material de sus paredes. En una cavidad de paredes negras, $a_\lambda = 1$ en todas partes $e_\lambda = K_\lambda$. Así pues, la radiación emitida por un cuerpo negro es idéntica, en su distribución de intensidades, a la radiación de equilibrio contenida en una cavidad de cualquier material para el cual $a_\lambda \neq 0$ a cualquier longitud de onda.

También enunció una definición operacional de un sistema que actúa como un cuerpo negro perfecto: *"Dado un espacio encerrado por cuerpos a la misma temperatura, a través de los cuales no pueda penetrar radiación, cada haz de radiación dentro de este espacio está constituido, en cuanto a calidad e intensidad, como si proviniera de un cuerpo completamente negro a esa misma temperatura"*.

Kirchhoff desafió así a teóricos y a experimentales:

"Es una tarea sumamente importante hallar el poder emisor del cuerpo negro. Aparecen grandes dificultades en el camino de su determinación experimental. Sin embargo, hay fundada esperanza de que tenga una forma simple, como la tienen todas las funciones que no dependen de las propiedades de los cuerpos individuales que se han conocido hasta ahora."

En 1879 Josef Stefan conjeturó para un cuerpo caliente una ley que relacionaba la energía total emitida con la temperatura. Basándose en las medidas experimentales de John Tyndall realizadas con platino en las que se observaba que este metal emitía 11,7 veces más radiación a 1473 K que a 798 K Stefan conjeturó que la energía total emitida era proporcional a la temperatura absoluta elevada a la potencia cuarta:

$$F \propto T^4 \quad (2)$$

La conjetura se basaba en que:



Fig. 2. Imagen de Josef Stefan.

$$\left(\frac{1473}{798}\right)^4 = 11,6 \cong 11,7 \quad (3)$$

basándose en los datos obtenidos por Tyndall.

En 1884 Ludwig Boltzmann demostró, usando conceptos termodinámicos y estadísticos, la validez de la ley de Stefan en el caso de un cuerpo negro, no siendo válida en general para cualquier cuerpo caliente. Y obtuvo la llamada ecuación de Stefan-Boltzmann:

$$u = aT^4 \quad (4)$$

Para la radiación del cuerpo negro Wilhelm Wien en 1893 demostró mediante supuestos termodinámicos su ley desplazamiento, que especifica que hay una relación inversa entre la longitud de onda en que se produce el pico de emisión de un cuerpo negro y su temperatura absoluta:

$$\lambda_{max} \cdot T = b \quad (5)$$

Siendo b una constante que posteriormente se denominó constante de Wien.

Y también la siguiente dependencia de la función de distribución:

$$u_\nu(T) = \nu^3 F(\nu/T) \quad (6)$$

En 1896 propuso una forma para la función de distribución que se ajustaba de forma sencilla a la dependencia encontrada:

$$u_\nu(T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta \nu/T} \quad (7)$$

En 1899 Paschen y Wannier confirmaron esta ley de distribución para el rango del visible y hasta temperaturas de 400° C.

En 1900 O.Lummer y E.Pringheim comprobaron experimentalmente que fallaba a altas temperaturas.

En 1900 Lord Rayleigh (John William Strutt) demuestra que la ley de equipartición no lleva a la ley de Wien.

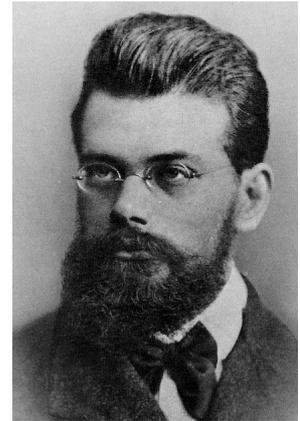


Fig. 3. Imagen de Ludwig Boltzmann.

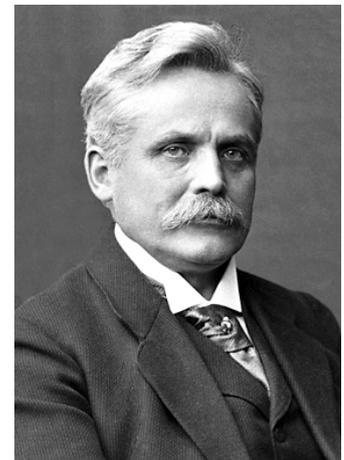


Fig. 4. Imagen de W. Wien.

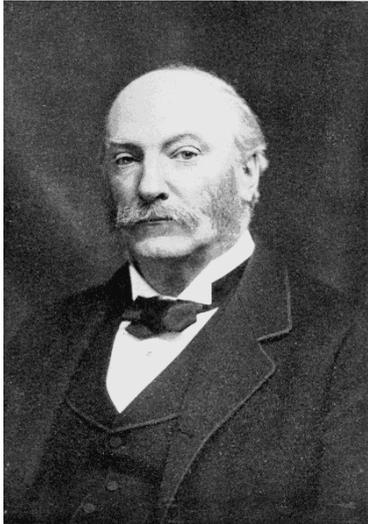


Fig. 5. Imagen de John William Strutt



Fig. 6. Imagen de Max Planck

En 1900 Planck propuso una nueva función de distribución:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (8)$$

Que en el caso $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ se convertía en la ley de distribución Wien.

En un principio la obtuvo intentando conjugar los datos hasta entonces conocidos mediante una interpolación. A finales de ese mismo año obtuvo una demostración basada en conceptos termodinámicos y estadísticos imponiendo una cuantización a los modos de vibración.

Su verdadera intención era deducir la segunda ley de la termodinámica de campos conservativos pero al no poder conseguirlo se vio abocado a considerar la idea estadística de Boltzmann para poder llegar al resultado (8).

En 1901 aparece por primera vez la llamada constante ayuda en las publicaciones de M. Planck. La importancia de la constante ayuda radica en que posteriormente será la llamada constante h de Planck, tan determinante en toda la teoría cuántica.

Planck propuso unas unidades que dependían de unas constantes fundamentales, entre ellas la mencionada constante de Planck:

$$l_p = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^3}}; \quad m_p = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}}; \quad t_p = \sqrt{\frac{Gh}{2\pi c^5}}; \quad q_p = \sqrt{2hc\epsilon_0}; \quad T_p = \frac{m_p c^2}{k} = \sqrt{\frac{hc^5}{2\pi G k^2}}$$

siendo las constantes fundamentales:

$$c, \quad G, \quad h, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad k$$

Es en 1909 cuando Planck por fin adopta la nueva terminología y usa la expresión “cuanto de energía” en lugar de “elemento de energía”. Este cambio terminológico nos lleva a suponer que el científico estaba pensando que $h\nu$ es una verdadera unidad de energía y no una subdivisión como pensaba hasta entonces. Ya a principios de 1910 Planck abraza la discontinuidad y rompe con la teoría clásica.



Fig. 7. Imagen de Sir James Jeans

En 1905 Lord Rayleigh y Sir James Jeans publican una función de distribución de energía del cuerpo negro basándose en consideraciones clásicas del electromagnetismo.

$$u_\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \tag{9}$$

En 1905 Albert Einstein publica su artículo: “Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz” en *Annalen der Physik*. En él propone la cuantización de la energía lumínica. Cita como ejemplo el caso del cuerpo negro.

En 1910 Paul Ehrenfest obtuvo una prueba sobre la imposibilidad de derivar una función de distribución del cuerpo negro concordante en alta y baja frecuencia con la de Planck, que es la que experimentalmente funcionaba a todos los rangos de frecuencia, sin recurrir a la discontinuidad. También a Ehrenfest le debemos la denominación de “catástrofe ultravioleta” para referirse a que la integración para todas las frecuencias de la ecuación clásica de Ryleigh-Jeans es divergente y, por tanto, sin sentido físico. La razón de calificarla ultravioleta es que las frecuencias más altas de la radiación electromagnética, entonces conocidas como tales, eran justamente las de ese rango.

Desarrollos teóricos de las contribuciones históricas

Ley de Kirchhoff de la emisión térmica

Consideramos dos cuerpos A y B dentro de una cavidad con radiación térmica, véase la figura 8. A es un cuerpo arbitrario y B es un cuerpo negro. Suponemos que están en equilibrio térmico a la temperatura T. Para que se mantenga el equilibrio es necesario que en cualquier superficie la energía emitida por unidad de tiempo y área sea igual a la energía absorbida por esa superficie en el mismo tiempo.

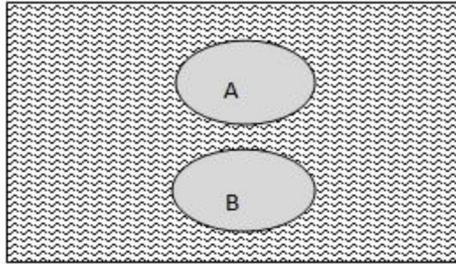


Fig. 8. Un cuerpo arbitrario A y un cuerpo negro perfecto B inmersos en una cavidad y en equilibrio con la radiación.

Sea $I_\nu d\nu$ la energía incidente por unidad de superficie y tiempo con frecuencia entre ν y $\nu d\nu$ sobre los cuerpos A y B.

Sea $J(\nu, T)$ la emisividad del cuerpo negro, en nuestro caso del cuerpo B. Al ser un cuerpo negro debe cumplirse que:

$$I_\nu d\nu = J(\nu, T) d\nu \rightarrow I_\nu = J(\nu, T) \quad (10)$$

Sea $I_{A,\nu} d\nu$ la energía por unidad de superficie y tiempo con frecuencias entre ν y $\nu d\nu$ que absorbe el cuerpo A.

Sea $j_{A,\nu} d\nu$ la energía por unidad de superficie y tiempo con frecuencias entre ν y $\nu d\nu$ que emite el cuerpo A.

Al estar en equilibrio debe cumplirse que

$$I_{A,\nu} d\nu = j_{A,\nu} d\nu \quad (11)$$

Si definimos la absorbancia del cuerpo A como:

$$A_\nu = \frac{I_{A,\nu}}{I_\nu} \rightarrow I_\nu = \frac{j_{A,\nu}}{A_\nu} \quad (12)$$

Usando la relación (10) obtenemos:

$$J(\nu, T) = \frac{j_{A,\nu}}{A_\nu} \quad (13)$$

El cuerpo A es arbitrario, por lo que $J(\nu, T)$ no debe depender de la naturaleza ni la forma del cuerpo A y por lo tanto es una función solo de la frecuencia y la temperatura. Ésta es la llamada ley de Kirchhoff.

Ley térmica de emisión

Supongamos que tenemos dos cavidades A y B de paredes arbitrarias en equilibrio a la misma temperatura T (véase figura 9) y conectadas por sus orificios entre los que se ha interpuesto un filtro estrecho que solo deja pasar radiaciones de frecuencias comprendidas entre ν y $\nu d\nu$.

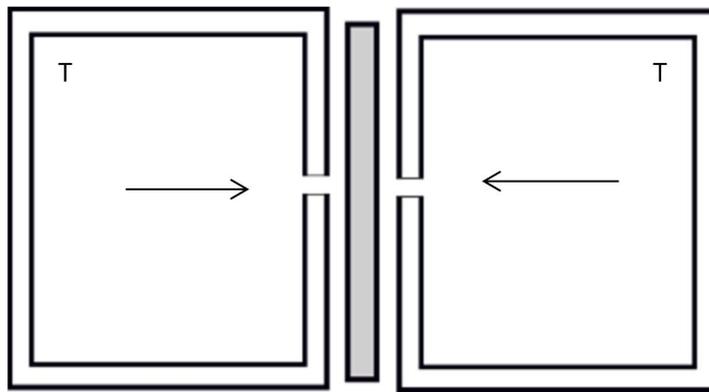


Fig. 9. Dos cavidades en contacto separadas por un filtro estrecho y en equilibrio a temperatura T.

Definimos $u_\nu d\nu$ como la densidad de energía espectral por unidad de tiempo con frecuencia comprendida entre ν y $\nu d\nu$.

Tomemos como hipótesis que:

$$u_{\nu,A} \neq u_{\nu,B} \quad (14)$$

Entonces aparecerá espontáneamente un flujo de energía entre las dos cavidades que tienen la misma temperatura. Esto violaría el segundo principio de la termodinámica, por lo que tenemos que concluir que:

$$u_{\nu,A} = u_{\nu,B} \quad (15)$$

Y por lo tanto u_ν debe depender exclusivamente de T y ν y debe ser independiente de las paredes de la cavidad.

Que es el teorema de Kirchhoff cuyo enunciado es:

"La densidad espectral de energía de la radiación en equilibrio, depende sólo de

la frecuencia y de la temperatura. Es independiente de la naturaleza de los cuerpos materiales con los que se encuentra en equilibrio."

A continuación vamos a relacionar la ley de Kirchhoff con su teorema.

Consideremos la densidad de energía por unidad de ángulo sólido $u_\nu(\Omega)$ de forma que el diferencial de energía es:

$$dE = u_\nu(\Omega)dVd\Omega d\nu \quad (16)$$

donde dV es un elemento de volumen.

Vamos a considerar un cilindro de longitud $dl=ct$, es decir, de la longitud que recorre un rayo de radiación en un tiempo dt . de forma que el elemento de volumen es $dAc dt$.

$$dE = u_\nu(\Omega)dAc dt d\Omega d\nu \quad (17)$$

Tenemos también:

$$dE = I_\nu(\Omega)dA dt d\Omega d\nu \quad (18)$$

Comparando (18) con (16) obtenemos que:

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu(\Omega)}{c} \quad (19)$$

Si integramos sobre todo el rango de ángulo sólido nos queda:

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega)d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu(\Omega)d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (20)$$

De modo que la obtención de la función J_ν de Kirchhoff, en el caso del cuerpo negro perfecto se reduce a encontrar la densidad espectral de energía u_ν .

Presión de radiación

Consideremos una cavidad reflectante que contiene un campo de radiación isótropo. La radiación transfiere dos veces su componente normal del momento en la reflexión. De modo que tenemos:

$$p = \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega \quad (21)$$

Donde p es la presión de radiación y I_ν es la intensidad específica, es decir la energía por unidad de superficie, ángulo sólido y tiempo para una frecuencia comprendida entre ν y $\nu + d\nu$. El primer coseno aparece al integrar el flujo neto de

energía que atraviesa una superficie en la dirección normal a esta y el segundo para hallar el momento del flujo¹.

$$p = \frac{2}{c} \int I_v \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2}{c} \int J_v dv \int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2}{c} \frac{c}{4\pi} u \int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{2\pi} u \frac{2\pi}{3} = \frac{u}{3}$$

De donde obtenemos la presión de radiación que será útil para obtener la ley de Stefan- Boltzmann

$$p = \frac{u}{3} \quad (22)$$

Ley de Stefan-Boltzmann

Supongamos que la radiación está confinada en un cilindro de volumen V , cerrado por un émbolo reflector. Si la presión de la radiación realiza un trabajo, aumentando el volumen del cilindro en δV , habrá que añadir un calor δQ para mantener la temperatura constante. Por el primer principio de la termodinámica

$$\delta Q = dU + pdV \quad (23)$$

Utilizando la definición de temperatura:

$$TdS = dU + pdV \quad (24)$$

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \quad (25)$$

Usando la relación termodinámica de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \quad (26)$$

Resulta que:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \quad (27)$$

Como la presión de radiación según (22) es:

$$p = \frac{u}{3}$$

donde u es la densidad total de energía de radiación.

Y como $U = u V$. Sustituimos en la fórmula anterior y obtenemos:

¹Véase para un desarrollo más detallado: George B. Rybicki And Alan P. Lightman, "Radiative processes in astrophysics", John Wiley & Sons, Inc., 1979.

$$T \left(\frac{\partial(u/3)}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial(uV)}{\partial V} \right)_T + \frac{u}{3} \quad (28)$$

De donde:

$$\frac{1}{3} T \left(\frac{du}{dT} \right) = u + \frac{u}{3} = \frac{4}{3} u \quad (29)$$

Hemos usado la ley de Kirchhoff que nos dice que u solo depende de la temperatura por lo que la derivadas parciales pasan a ser totales.

Podemos poner la ecuación (29) de la siguiente forma:

$$T \left(\frac{du}{dT} \right) = 4u \quad (30)$$

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad (31)$$

Integrado:

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u} = 4 \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \rightarrow \ln u - \ln u_0 = 4(\ln T - \ln T_0) \rightarrow \ln \frac{u}{u_0} = \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 \rightarrow u = \left(\frac{u_0}{T_0^4} \right) T^4 \quad (32)$$

$$u = aT^4 \quad (33)$$

Que es la ley de Stefan-Boltzmann.

Ley de desplazamiento Wien

Wien utilizó las mismas técnicas termodinámicas que Boltzmann sobre una cavidad perfectamente reflectora que se expande de forma adiabática para deducir su ley.

Se desea encontrar la entropía de la radiación en equilibrio.

Partimos de la ecuación (24):

$$T dS = dU + p dV \rightarrow dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV \quad (34)$$

De la ley de Stefan-Boltzmann sabemos que $u = \frac{U}{V} = \sigma T^4$ de donde:

$$\frac{1}{T} = \sqrt[4]{\sigma \frac{V}{U}} \quad (35)$$

Y como $p = \frac{1}{3} u = \frac{U}{3V}$ tenemos:

$$\frac{p}{T} = \frac{U}{3V} \sqrt[4]{\sigma \frac{V}{U}} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\sigma \frac{U^3}{V^3}} \quad (36)$$

Sustituyendo (35) y (36) en (34):

$$dS = \left(\sigma \frac{V}{U}\right)^{1/4} dU + \frac{1}{3} \left(\sigma \frac{U^3}{V^3}\right)^{1/4} dV \quad (37)$$

Que se puede reescribir:

$$dS = d\left(\frac{4}{3}\sigma^{1/4}U^{3/4}V^{1/4}\right) \quad (38)$$

Integrado obtenemos que:

$$S = \frac{4}{3}\sigma^{1/4}U^{3/4}V^{1/4} \quad (39)$$

Sustituyendo (35) en (39):

$$S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V \quad (38)$$

De donde los procesos adiabáticos deben cumplir:

$$T^3 V = \text{constante} \quad (39)$$

La ecuación (39) puede ponerse:

$$T \cdot r = \text{constante} \quad (40)$$

Suponiendo simetría esférica y siendo r el radio de la esfera.

Por tratarse de una cavidad en movimiento a una cierta velocidad, el efecto doppler hace que durante el proceso de reflexión

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \cos \theta}{c} \frac{dr}{dt} \quad (41)$$

Si la cavidad es esférica entre dos reflexiones sucesivas, la luz recorre una distancia de $2r \cos \theta$ y el número de reflexiones por unidad de tiempo es $\frac{c}{2r \cos \theta}$.

Durante el proceso de atenuación la variación de la longitud de onda con el tiempo será entonces:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c\Delta\lambda}{2r \cos \theta} = \frac{\lambda}{r} \frac{dr}{dt} \quad (42)$$

Que integrando:

$$d\lambda = \frac{\lambda}{r} dr \rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dr}{r} \quad (43)$$

Nos da el siguiente resultado:

$$\ln \lambda = \ln r + c \rightarrow \ln \frac{\lambda}{r} = c \quad (44)$$

$$\frac{\lambda}{r} = \text{constante} \quad (45)$$

Usando la ecuación (40) obtenemos:

$$\lambda \cdot T = \text{constante} \quad (46)$$

Que es la ley de desplazamiento de Wien.

Función de distribución de Wien

La ley de Stefan-Boltzmann sigue siendo válida durante la expansión por lo que si analizamos la energía por unidad de volumen comprendida entre λ y $\lambda d\lambda$ será:

$$\frac{u(\lambda, T)}{T^4} d\lambda = \frac{u(\lambda', T')}{T'^4} d\lambda' = cte \quad (47)$$

$$\lambda T = \lambda' T' \rightarrow (\lambda + d\lambda) T = (\lambda' + d\lambda') T' \quad (48)$$

$$\frac{d\lambda}{d\lambda'} = \frac{T'}{T} \quad (49)$$

Que sustituyendo (49) en (47):

$$\frac{u(\lambda, T)}{T^5} = cte \quad \text{si } \lambda T = cte \quad (50)$$

Por lo que se deduce que:

$$u(\lambda, T) = f(\lambda T) T^5 \quad (51)$$

donde f es una función de argumento constante y uniforme.

Para encontrar la función f Wien utilizó el hecho de que la radiación emitida por una molécula y la intensidad eran funciones únicamente de la velocidad. Usando la ley de distribuciones de Maxwell-Boltzmann, concluyó que la energía en el equilibrio entre la radiación y la materia era:

$$k_\lambda = g(\lambda) e^{-f\left(\frac{\lambda}{T}\right)} \quad (52)$$

Para que esta expresión fuese consistente con el resultado $k_\lambda = \frac{c}{4\pi} f(\lambda T) T^5$, eligió la forma más sencilla posible de f y g :

$$f(\lambda) = \frac{a}{\lambda} \quad (53)$$

$$g(\lambda) = \frac{b}{\lambda^5} \quad (54)$$

$$k_\lambda = \frac{b}{\lambda^5} e^{-\frac{a}{T\lambda}} \quad (55)$$

$$u_\lambda = \frac{4\pi}{c} k_\lambda = \frac{4\pi}{c} \frac{b}{\lambda^5} e^{-\frac{a}{T\lambda}} \quad (56)$$

Donde mediante ajuste experimental se obtienen los valores de a y b .

Ley de distribución Planck

El hecho de que la distribución espectral de energías no dependa de la naturaleza de los cuerpos es lo que atrajo a Planck al problema del cuerpo negro pensando que este comportamiento se debía a la existencia de alguna ley o constante general.

Planck había obtenido a partir de los principios de la electrodinámica, la siguiente ecuación fundamental de la densidad de energía²:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U \quad (57)$$

Donde U es la energía media de un oscilador a temperatura T .

Para obtener el valor de U , Planck se dejó guiar por su olfato de termodinámico. Así pensó relacionar la energía del oscilador con su entropía, y no con su temperatura. Son reveladoras las palabras del propio Planck: *“Por aquel entonces, un número considerable de destacados físicos mostraba interés, tanto teórico como experimental, por el problema de la distribución de la energía en el espectro normal. Pero todos ellos buscaban en una única dirección, intentando demostrar que la intensidad de la radiación dependía de la temperatura, mientras que yo intuía que la verdadera relación se encontraba en la dependencia de la entropía con respecto a la energía”*

Utilizando la ecuación de Wien (56) respecto a la frecuencia. Escribimos la ecuación (56) teniendo presente que es en realidad es una derivada:

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{b}{\lambda^5} e^{-\frac{a}{T\lambda}} \quad (58)$$

Sabemos la relación entre la longitud de onda y la frecuencia de la radiación electromagnética:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (59)$$

Es fácil por tanto encontrar la densidad de energía respecto de la frecuencia:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{du}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} \frac{b}{\left(\frac{c}{\nu}\right)^5} e^{-\frac{a}{T\frac{c}{\nu}}} = \frac{b}{c^4} \nu^3 e^{-\frac{(\frac{a}{c})\nu}{T}} = \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \quad (60)$$

Por tanto, volviendo a la notación más clásica en la que no aparecen los diferenciales:

$$u = \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \quad (61)$$

² Dedución de la ecuación puede verse en Jammer (1989) en su apéndice A.

Igualando las ecuaciones (57) y (61):

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}U = \alpha\nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}}$$

Despejando U :

$$U = \frac{\alpha c^3}{8\pi} \nu e^{-\frac{\beta\nu}{T}} = b\nu e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \quad (62)$$

Tomando logaritmos:

$$-\frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{U}{b\nu} = \frac{1}{T} \quad (63)$$

Usando la definición de temperatura:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \quad (64)$$

Igualando (64) a (63) tenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = -\frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{U}{b\nu} \quad (65)$$

De forma que:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} \propto \frac{1}{U} \quad (66)$$

Esta ecuación tan simple le produjo un gran asombro en Planck, que lo expresó del siguiente modo: *“Esta relación es tan sorprendentemente sencilla que durante algún tiempo la consideré universal y me esforcé por otorgarle fundamento teórico. Sin embargo, confrontada con los resultados de nuevas mediciones, esta interpretación pronto se reveló insostenible”*.

Como ya hemos comentado en 1900 O. Lummer y E. Pringheim comprobaron experimentalmente que la ley de Wien no se cumplía a altas temperaturas.

Planck que llama R al inverso de la derivada segunda de la entropía de un oscilador respecto a su energía refiere que *“las mediciones realizadas sobre la radiación infrarroja emergente de cristales de fluorita y sal gema por H. Rubens y F. Kurlbaum pusieron de manifiesto un comportamiento totalmente distinto pero igual de sencillo, por cuanto que, cuando se alcanzan energías y longitudes de onda aún mayores, la magnitud R no es proporcional a la energía sino a su cuadrado”*. Encontró Planck una expresión de S sencilla que se verifica para frecuencias bajas y que es:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} \propto \frac{1}{U^2} \quad (67)$$

Tenía pues la necesidad de encontrar mediante interpolación de las ecuaciones (66) y (67) una que funcionara tanto para frecuencias altas como bajas. La que propuso Planck fue:

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{U(U+b)} \quad (68)$$

De donde integrando:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{b} \ln \frac{U+b}{U} \quad (69)$$

Usando (64):

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{b} \ln \frac{U+b}{U} \quad (70)$$

Cuya solución es:

$$U = \frac{b}{e^{b/T} - 1} \quad (71)$$

Introduciendo (71) en la ecuación (57):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{b}{e^{b/T} - 1} \quad (72)$$

Comparamos (72) con la ecuación de Wien (6) que nos dice que:

$$u_\nu(T) = \nu^3 F(\nu/T) \quad \text{la ley de Wien.}$$

Deducimos que b debe depender de la frecuencia como $b = B\nu$. Por tanto:

$$u(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{e^{B\nu/T} - 1} \quad (73)$$

donde A es una nueva constante independiente de la frecuencia y de la temperatura.

Este método es una conjetura sin base física. Veamos como justifica Planck la relación (73) usando un desarrollo más físico.

Sea S_N la entropía total de un sistema de N osciladores de frecuencia ν y de energía media U ; Suponemos que la energía total $U_N = NU$ consta de un número entero P de elementos de energía ε , o sea $U_N = P\varepsilon$. Por otra parte, según la termodinámica estadística $S_N = k \ln \Omega$ depende del número Ω de formas posibles de distribuir los P elementos de energía ε entre los N osciladores. Este número es³:

³ La siguiente formula combinatoria ya aparece en un artículo de 1877 de L. Boltzmann.

$$\Omega = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!} \quad (74)$$

Basta sustituir este valor en $S_N = k \ln \Omega$, y aplicar la aproximación de Stirling:

$$\ln X! \cong X \ln X - X \quad (75)$$

Para obtener que

$$S_N = k[(N + P) \cdot \ln(N + P) - N \ln N - P \ln P] \quad (76)$$

Pero de las definiciones anteriores se infiere que $P = NU/\varepsilon$. Sustituyendo este valor en la expresión anterior nos queda que:

$$S_N = kN \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} \right] \quad (77)$$

Y como la entropía por oscilador es $S = S_N/N$, entonces

$$S = k \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} \right] \quad (78)$$

Aplicando la ecuación (64) obtenemos

$$\frac{1}{T} = k \frac{\partial}{\partial U} \left[\left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} \right] \quad (79)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{U}\right) \quad (80)$$

De donde:

$$e^{\frac{\varepsilon}{kT}} = 1 + \frac{\varepsilon}{U} \quad (81)$$

Despejando

$$U = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \quad (82)$$

Se obtiene la energía media de los osciladores de frecuencia ν . Sustituyendo esta expresión en la ecuación fundamental de Planck es decir la ecuación (57) obtenemos pues

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \quad (83)$$

Pero esta ecuación debe ser compatible con la primera ley de Wien, es decir ε debe ser proporcional a ν . Basta pues hacer $\varepsilon = h\nu$ para obtener por fin la Ley de radiación de Planck

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (84)$$

La importancia de esta ecuación reside en dos puntos: en primer lugar se soluciona el problema del cuerpo negro y en segundo lugar, y más importante, se da un paso hacia la teoría cuántica al imponer una cuantización. Planck tardó unos 9 años más en admitir que su desarrollo implicaba claramente una cuantización de la energía y no sólo una cuantización de los modos de los resonadores.

Función clásica de Rayleigh-Jeans

A principios del presente siglo, Rayleigh y también Jeans, hicieron cálculos sobre la densidad de energía de la radiación del cuerpo negro.

Considérese que una cavidad con paredes metálicas calentada uniformemente a una temperatura T . Las paredes emiten radiación electromagnética en el intervalo térmico de frecuencias. Se sabe que esto ocurre, básicamente, por el movimiento acelerado de los electrones en las paredes, que resulta de la agitación térmica. Sin embargo, no es necesario estudiar en detalle el comportamiento de las ondas electromagnéticas en el interior de la cavidad. Rayleigh y Jeans procedieron de la forma siguiente. En primer lugar, se utiliza la teoría electromagnética clásica para demostrar que la radiación en el interior de la cavidad debe existir en forma de ondas estacionarias con nodos en las superficies metálicas.

Utilizando argumentos geométricos, se cuenta el número de dichas ondas estacionarias en el intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$, con el fin de determinar cómo depende ese número de ν . Después, se utiliza un resultado de la teoría cinética para calcular la energía total promedio de estas ondas cuando el sistema está en equilibrio térmico. En la teoría clásica, la energía total promedio solo depende de la temperatura T . El número de ondas estacionarias en el intervalo de frecuencias, multiplicado por la energía promedio de las ondas y dividido entre el volumen de la cavidad, proporciona el contenido de energía promedio por unidad de volumen en el intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$. Es el valor que se buscaba.

Por simplificar, supóngase que la cavidad de paredes metálicas llena con radiación electromagnética tiene la forma de un cubo de lado a (como se muestra en la

figura 10). En ese caso, la radiación que se refleja de las paredes puede ser analizada en términos de tres componentes a lo largo de las tres direcciones mutuamente perpendiculares que definen los lados de la cavidad.

Como las paredes opuestas son paralelas entre sí, las tres componentes de la radiación no se mezclan y se pueden tratar por separado. Considérese la componente x en la pared metálica en $x = 0$. Toda la radiación que incide sobre esta pared es reflejada y las ondas incidentes y reflejadas se combinan para formar una onda estacionaria. Ahora bien, como la radiación electromagnética es una vibración transversal con el vector de campo eléctrico E perpendicular a la dirección de propagación, y como la dirección de propagación para este componente es perpendicular a la pared en cuestión, el vector de campo eléctrico E es paralelo a la pared. Sin embargo, una pared metálica no es compatible con un campo eléctrico paralelo a su superficie, ya que siempre se puede establecer un flujo de cargas de modo tal que se neutralice el campo. Por lo tanto para esta componente, E siempre es cero en la pared. Es decir, la onda estacionaria asociada con la componente x de la radiación, debe tener un nodo (amplitud cero) en $x = 0$. La onda estacionaria también deberá tener un nodo en $x = a$, ya que no puede haber un campo eléctrico paralelo en la pared correspondiente. Además, se aplican condiciones similares a las otras dos componentes; la onda estacionaria asociada con la componente y deberá tener nodos en $y = 0$ y $y = a$, y la onda estacionaria asociada con la componente z , deberá tener nodos en $z = 0$ y $z = a$. Estas condiciones imponen limitaciones en las longitudes de onda posibles y por lo tanto, en las posibles frecuencias de la radiación electromagnética en la cavidad. Ahora es necesario contar el número de ondas estacionarias con nodos en las superficies de la cavidad, cuyas longitudes de onda se encuentran en el intervalo entre λ y $\lambda + d\lambda$, correspondiente al intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$.

Tenemos pues que las ondas electromagnéticas estacionarias deberán cumplir la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (85)$$

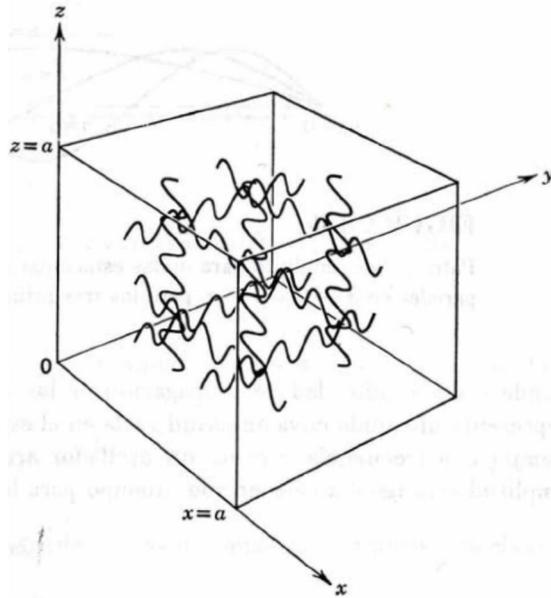


Fig. 10. Cavity con paredes metálicas llena con radiación electromagnética, mostrando las tres componentes de la radiación sin interferirse, que rebotan de las paredes y que forman ondas estacionarias con nodos en cada pared.

Y debe cumplirse la condición de contorno de que la onda tenga amplitud cero en las paredes. Una solución a la ecuación (85) es:

$$E = E_0 \operatorname{sen} \frac{n_x \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_y \pi y}{a} \operatorname{sen} \frac{n_z \pi z}{a} \operatorname{sen} \frac{2\pi ct}{\lambda} \quad (86)$$

Sustituyendo la solución en (85) tenemos:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4a^2}{\lambda^2} \quad (87)$$

Debemos ver el número de nodos que cumplen la condición de contorno. Esto se puede lograr contando los que están contenidos en un cuarto de una esfera en el espacio n_x , n_y y n_z (véase figura 11).

Pero debemos tener presente las dos posibles polarizaciones de la onda, por lo que multiplicaremos por 2:

$$N^{\circ} \text{ modos} = \frac{\pi}{3} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{3/2} \quad (88)$$

Usando la ecuación (87) nos queda:

$$N^{\circ} \text{ modos} = N = \frac{8\pi a^3}{3\lambda^3} \quad (89)$$

Necesitamos el número de nodos por unidad de volumen entre λ y $\lambda + d\lambda$ por lo que debemos derivar la ecuación (89) respecto a λ y dividirla por el volumen de la cavidad. Por tanto obtenemos:

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{8\pi a^3}{3\lambda^3} \right) = -\frac{8\pi a^3}{\lambda^4} \quad (90)$$

$$\frac{dN/d\lambda}{a^3} = \frac{8\pi}{\lambda^4} \quad (91)$$

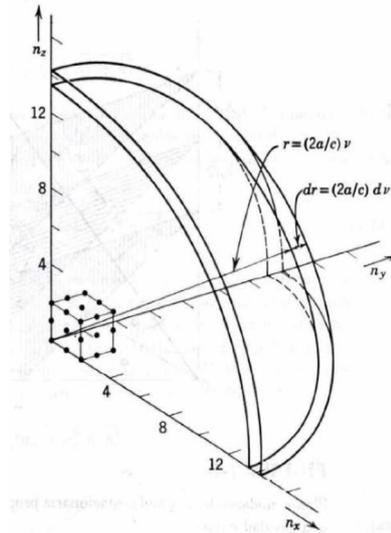
En la ecuación (91) no se ha tenido en cuenta el signo ya que lo único que nos indica es que el número de modos decrece con la longitud de onda.

Utilizando el principio de equipartición, tenemos que cada modo de onda estacionaria tendrá una energía media igual a kT siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura en grados Kelvin.

Por lo que la densidad de energía de la radiación del cuerpo negro es:

$$u_{\lambda} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \quad (92)$$

Fig. 11. Los valores permitidos de la frecuencia en una cavidad tridimensional cúbica de lado a , se determinan por tres índices n_x , n_y y n_z que sólo pueden tomar valores enteros. Para mayor claridad, se muestran sólo unos cuantos de los muchos puntos correspondientes a conjuntos de estos tres índices.



Es la distribución de energía de Rayleigh-Jeans. Podemos escribirla también en función de la longitud de onda teniendo presente la densidad de energía (92), que es en realidad una derivada, Esto es:

$$\frac{du_{\lambda}}{d\lambda} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \rightarrow \frac{du_{\lambda}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dv} = \frac{8\pi kT v^4}{c^4} \frac{c}{v^2} = \frac{8\pi v^2 kT}{c^3} \quad (92)$$

Que es la ley de Rayleigh-Jeans en función de la frecuencia.

Deducción de la ley de Wien usando la función de distribución de Planck

Usando la ecuación de Planck (84) podemos obtener de forma sencilla la ley de desplazamiento de Wien.

Basta con que busquemos el valor máximo de la frecuencia para una T dada en esta función y comprobemos que aparece la ley buscada. Imponemos la condición de extremal a la función (84) sin más que derivando respecto de la frecuencia e igualando el resultado a cero:

$$\frac{\partial u(\nu, T)}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) = 0 \quad (93)$$

Que nos da:

$$\frac{8\pi h}{c^3} \frac{3\nu^2 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right) - \nu^3 \frac{h}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} = 0 \rightarrow 3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right) - \frac{h\nu}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}} = 0 \quad (94)$$

Usando el cambio de variables:

$$x = \frac{h\nu_{max}}{kT} \quad (95)$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$3(e^x - 1) - xe^x = 0 \quad (96)$$

Que es una ecuación trascendente que tiene solución aunque no se puede obtener de forma analítica.

Si llamamos s a la solución, que es aproximadamente 2,822, tenemos:

$$\frac{h\nu_{max}}{kT} = s = cte \rightarrow \frac{\nu_{max}}{T} = cte \quad (97)$$

Que es la ley de desplazamiento de Wien.

Deducción de la ley de Stefan-Boltzmann usando la función de distribución de Planck

También podemos deducir la ecuación de Stefan-Boltzmann. Partimos de (84) que es la densidad de energía y queremos buscar la intensidad por unidad de frecuencia para la frecuencia f viene dada por la expresión:

$$\frac{dF_\nu}{d\nu} = \pi I_\nu = \pi \frac{c}{4\pi} u_\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{kT}-1} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{kT}-1} \quad (98)$$

Para calcular la intensidad total de la radiación emitida por el cuerpo negro debemos integrar la expresión anterior para todas las frecuencias:

$$F = \int_0^\infty dF_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{kT}-1} d\nu \quad (99)$$

Aplicando el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} y = e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \\ dy = \frac{h}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}} d\nu \end{cases} \quad (100)$$

Quedando la integral (99) de la siguiente forma:

$$\frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{k^3 T^3}{h^3} \frac{\ln^3(y+1)}{y} \frac{kT}{h} \frac{1}{(y+1)} dy = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{\ln^3(y+1)}{y(y+1)} dy \quad (101)$$

Hacemos un nuevo cambio de variables:

$$\begin{cases} x = \ln(y+1) \\ dx = \frac{1}{y+1} dy \end{cases} \quad (102)$$

Y la integral pasa a tomar la siguiente forma:

$$\frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (103)$$

La solución de la integral (95) es posible hacerla de forma analítica, los engorrosos cálculos en [29] que se puede consultar en la siguiente dirección electrónica:

http://www.dma.ulpgc.es/aplaza/ficheros/investigacion/ficheros/cuerpo_negro.pdf

La solución, una vez deshechos los cambios de variables es:

$$F = \frac{2k^4 \pi^5}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \quad (104)$$

Que puede ponerse como (33) si más que:

$$u = \frac{4}{c}F = \frac{4\sigma}{c}T^4 = aT^4 \quad (104 \text{ b})$$

Por lo que queda demostrada la ecuación de Stefan-Boltzmann y hallada la constante en función de otras constantes universales en la que está incluida la constante de Planck.

Comparativa históricas de las funciones de distribución

Los datos experimentales realizados sobre una cavidad que simula a un cuerpo negro coinciden bastante bien con la función de distribución espectral propuesta por Wien aunque no se cumple para frecuencias altas. La función obtenida siguiendo la teoría clásica del electromagnetismo falla para altas frecuencias y su integración es divergente. La función de distribución de Planck es la que se ajusta a los datos experimentales para todas las frecuencias.

Podemos ver una gráfica comparativa de las 3 funciones de distribución en función de la frecuencia.

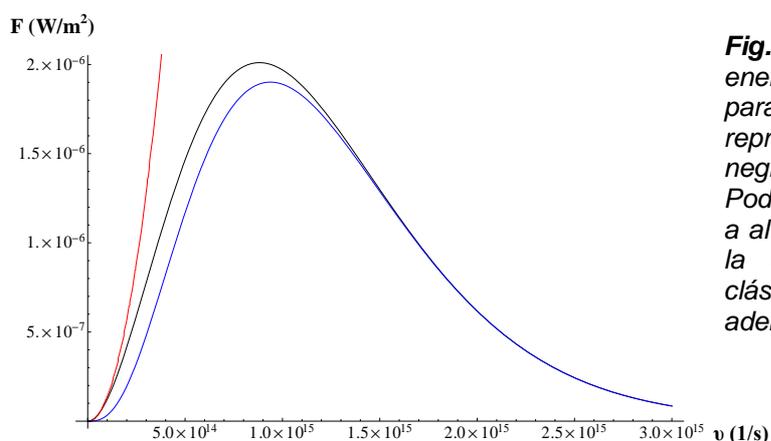


Fig. 12. En esta gráfica mostramos el flujo de energía respecto a la frecuencia de la radiación para una temperatura de 15000 K. En rojo se representa la función de Rayleigh-Jeans, en negro la de Planck y en azul la de Wien. Podemos observar que la de Wien se ajusta bien a altas frecuencias pero mal a bajas. La peor es la que se obtiene usando comportamiento clásico, es decir, la de Rayleigh-Jean, que además tiene un comportamiento divergente

Cálculo de la constante de Wein mediante cálculo numérico

Vamos a utilizar la función de distribución de Planck (84), pero en función de la longitud de onda. Partimos de la función en función de la frecuencia:

$$du = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

Usando la regla de la cadena:

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{d\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} \quad \text{con} \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad (105)$$

Realizando los cálculos:

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \frac{8\pi h \left(\frac{c}{\lambda}\right)^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \quad (106)$$

Por tanto la función de distribución buscada es:

$$u_{\lambda} = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \quad (107)$$

Por otra parte la ley de desplazamiento de Wien nos dice:

$$T \cdot \lambda_{max} = b \rightarrow \ln(\lambda_{max}) = \ln(b) - \ln(T) \quad (108)$$

Por lo que necesitamos obtener la longitud de onda que haga máxima la función (107). Debemos realizar el cálculo para un buen número de temperaturas y representar los logaritmos de las longitudes de onda obtenidas respecto a la temperaturas, comprobando que se aproximan a una función lineal y mediante una recta de regresión lineal de estos datos obtener la ordenada en el origen de esta recta que coincidirá, como podemos ver en (108), con el logaritmo de b .

Para realizar nuestros cálculos hallaremos λ_{max} para un conjunto de temperaturas que van desde de 1000 a 30000 en intervalos de 1000. Para este objetivo he utilizado el software informático *Wolfram Matemática 8* usando la función `NMaximize` de cálculo de máximos de funciones de forma numérica. Los datos han sido introducidos en el software en nanómetros por lo que tendremos que reconvertirlos para obtener la constante de Wien en unidades del sistema internacional. Para la realización de todos los cálculos he creado un pequeño programa utilizando para ello el lenguaje que el software de cálculo simbólico lleva incorporado (ver programa en anexo A). Los valores concretos para las constantes universales de la ecuación (107) que he usado son:

$$h = 6.62606896 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$k = 1.3806488 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

Aunque no he usado exactamente estos valores ya que hemos pasados los metros a nanómetro. Los datos obtenidos los podemos ver en la figura 12 y en la tabla 1.

Aplicando logaritmo neperiano a esta pareja de datos y realizando la recta de

regresión (que podemos ver en la figura 13) obtendremos la constante de Wien.

La recta de regresión es:

$$\ln(\lambda_{max}) = 14,8795 - 1 \cdot \ln(T) \quad (109)$$

Como podemos observar la pendiente toma el valor de -1 como cabía esperar. Deshaciendo el logaritmo y reconvirtiendo los nanómetros a metros tenemos:

$$\begin{aligned} \ln(b) &= 14,8795 \\ b &= e^{14,8795} = 2897909,00 \text{ nm} \cdot K = 0,0028970900 \text{ m} \cdot K \end{aligned} \quad (110)$$

Obtenemos un valor para la constante de Wien que comparado con el que encontramos en los datos bibliográficos es bastante bueno. El valor bibliográfico es:

$$b_{real} = 0,0028977685(51) \text{ m K} \quad (111)$$

Vemos que el resultado obtenido es satisfactorio siendo el error relativo:

$$\begin{aligned} E_A &= |b - b_{real}| = |0,0028970900 - 0,0028977685| = 6,785 \cdot 10^{-7} \text{ m K} \\ \varepsilon_r(b) &= \frac{E_A}{b_{real}} = \frac{6,785 \cdot 10^{-7}}{0,0028977685} = 2,341 \cdot 10^{-4} \equiv 0,0234\% \end{aligned} \quad (112)$$

El método usado es a la vez que satisfactorio ilustrativo y pedagógico.

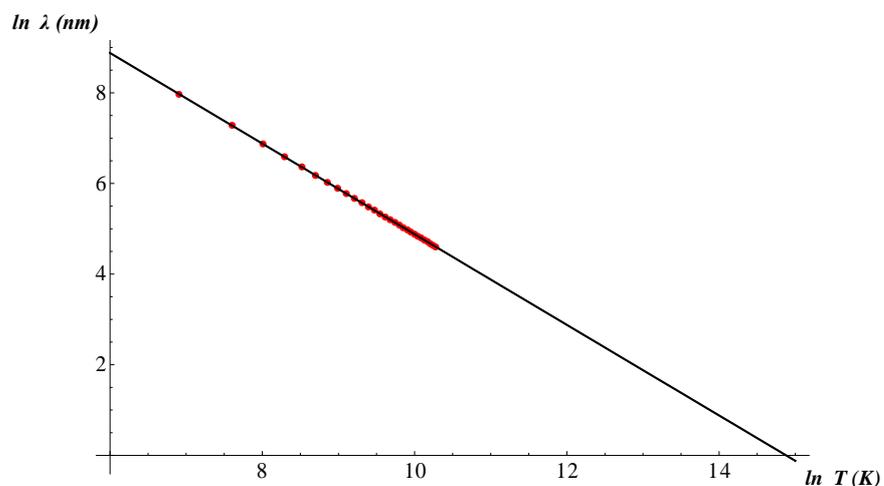


Fig. 13. Recta de regresión: $\ln(\lambda_{max}) = \ln(b) - \ln(T)$ con los datos numéricos en rojo.

T (K)	$\ln T$	λ_{max} (nm)	$\ln \lambda_{max}$
1000	6,9077553	2897,770	7,97169675
2000	7,6009025	1448,890	7,27855303
3000	8,0063676	965,924	6,87308516
4000	8,2940496	724,443	6,58540308
5000	8,5171932	579,554	6,36225884
6000	8,6995147	482,962	6,17993798
7000	8,8536654	413,967	6,02578626
8000	8,9871968	362,221	5,89225452
9000	9,1049799	321,975	5,77447390
10000	9,2103404	289,777	5,66911166
11000	9,3056506	263,434	5,57380286
12000	9,3926619	241,481	5,48679080
13000	9,4727046	222,906	5,40675016
14000	9,5468126	206,984	5,33264150
15000	9,6158055	193,185	5,26364828
16000	9,6803440	181,111	5,19911010
17000	9,7409686	170,457	5,13848307
18000	9,7981270	160,987	5,08132362
19000	9,8521943	152,514	5,02725640
20000	9,9034876	144,889	4,97596793
21000	9,9522777	137,989	4,92717397
22000	9,9987977	131,717	4,88065568
23000	10,0432495	125,990	4,83620254
24000	10,0858091	120,740	4,79363947
25000	10,1266311	115,911	4,75282266
26000	10,1658518	111,453	4,71360298
27000	10,2035921	107,325	4,67586161
28000	10,2399598	103,492	4,63949432
29000	10,2750511	99,923	4,60440189
30000	10,3089527	96,592	4,57050006

Tabla 1: Representamos los datos obtenidos numéricamente para diferente temperaturas.

Calculo de la constante Stefan-Boltzmann de forma numérica.

Ya hemos visto que la constante de Boltzmann se puede deducir integrando la función de distribución de Planck para todas las frecuencias de forma analítica obteniendo que el valor de dicha constante es:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.670374188645492 \times 10^{-8} \frac{w}{m^2 K^4} \quad (113)$$

Pero no deja de ser interesante la obtención de esta constante calculando la integral de forma numérica. Como estamos realizando métodos numéricos para minimizar los errores cometidos es conveniente utilizar un gran número de cálculos que nos sirvan como datos estadísticos para obtener de este modo una mejor aproximación a la obtención de nuestra constante objeto de estudio.

Partimos pues de la ecuación de Stefan- Boltzmann (104):

$$F = \sigma T^4 \quad (114)$$

Que podemos linealizar esta ecuación si aplicamos logaritmos:

$$\ln(F) = \ln(\sigma) + 4 \cdot \ln(T) \quad (115)$$

Para obtener F usaremos la función de distribución de Boltzmann en función de la longitud de onda:

$$F = \int_0^{\infty} \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda \quad (116)$$

Como el cálculo es numérico debemos tomar un valor que consideremos suficientemente alto para que podamos suponer que la contribución para valores más altos se prácticamente nula. Integramos numéricamente entre 0 y 300000 nanómetros que tomaremos como un buen valor del infinito. La integral la realizaremos para diferentes temperaturas: concretamente para $T= 1000, 2000, 3000, 4000, \dots, 29000, 30000$ K.

Con ello conseguiremos un gran número de datos para poder realizar un estudio estadístico (véase tabla 2). Tomaremos los logaritmos de los valores de temperatura y flujos obtenidos y con ellos obtendremos una recta de regresión que podemos visualizar en la figura 14.

La recta de regresión nos da los siguientes valores:

$$\ln(F) = -16.685433009652645 + 4.000000762947279 \cdot \ln(T) \quad (117)$$

Observamos que la pendiente es con muchísima aproximación 4 como cabía de esperar de la ecuación (115). Para obtener la constante de Stefan-Boltzmann basta con deshacer los logaritmos:

$$\ln(\sigma) = -16.685433009652645 \quad (118)$$

De donde se deduce:

$$\sigma = e^{-16.685433009652645} = 5,67033236563677 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (119)$$

La utilización de nanómetros no afecta a la ecuación de Stefan Boltzmann ya que las dimensión de F es potencia por longitud al cuadrado:

$$[F] = \frac{[P]}{[L]^2} = \frac{\frac{[M][L]^2}{[T]^3}}{[L]^2} = \frac{[M]}{[T]^3} \quad (120)$$

que no depende de la dimensión longitud.

El error relativo cometido respecto del valor esperado (113) es:

$$\begin{aligned} E_A &= |5,67033236563677 \cdot 10^{-8} - 5,670374188645492 \times 10^{-8}| \\ &= 4,18208182 \cdot 10^{-13} \\ \varepsilon_r(\sigma) &= \frac{E_A}{\sigma_{real}} = \frac{4,18208182 \cdot 10^{-13}}{5,670374188645492 \times 10^{-8}} = 7,375318948 \cdot 10^{-14} \equiv 7,3753 \cdot 10^{-12}\% \end{aligned} \quad (121)$$

Error que podemos considerar ínfimo.

El programa concreto con el que se han obtenido los datos está detallado en el apéndice A.

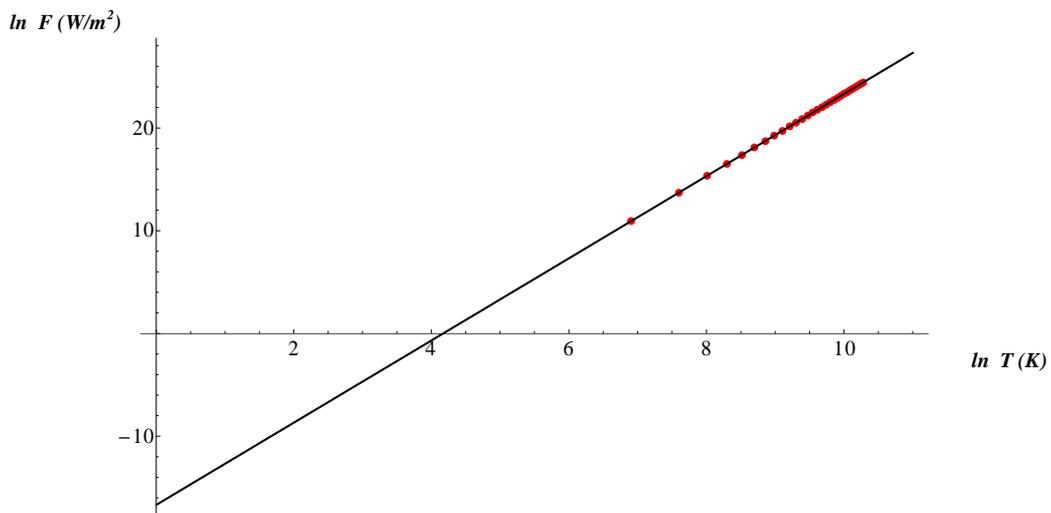


Figura 14. Representa la recta de regresión de $\ln(F) = \ln(\sigma) + 4 \cdot \ln(T)$ con los datos numéricos en rojo.

Temp	F
1000	5,67034000E+04
2000	9,07259000E+05
3000	4,59300000E+06
4000	1,45162000E+07
5000	3,54398000E+07
6000	7,34880000E+07
7000	1,36146000E+08
8000	2,32259000E+08
9000	3,72033000E+08
10000	5,67037000E+08
11000	8,30199000E+08
12000	1,17581000E+09
13000	1,61952000E+09
14000	2,17833000E+09
15000	2,87063000E+09
16000	3,71614000E+09
17000	4,73595000E+09
18000	5,95253000E+09
19000	7,38969000E+09
20000	9,07260000E+09
21000	1,10278000E+10
22000	1,32832000E+10
23000	1,58680000E+10
24000	1,88129000E+10
25000	2,21499000E+10
26000	2,59122000E+10
27000	3,01347000E+10
28000	3,48533000E+10
29000	4,01055000E+10
30000	4,59300000E+10

Tabla 2: Valores de temperatura y flujo obtenidos con la integración numérica

Color de las estrellas versus temperatura superficial

La variación de los colores estelares puede entenderse usando el concepto de cuerpo negro. Poco después de que se comprendiese la radiación de cuerpo negro, se advirtió que el espectro de una estrella es muy similar a las curvas de diferentes temperaturas de la radiación de un cuerpo negro. La conclusión obvia es que las estrellas son similares a los cuerpos negros, y que la variación de color de las estrellas es una consecuencia directa de las temperaturas de sus superficies.

Las estrellas frías (es decir, las de tipos espectrales K y M) irradian la mayor parte de su energía en las zonas roja e infrarroja del espectro electromagnético y por eso son de color rojo, mientras que las estrellas calientes (es decir, las de tipos espectrales O y B) emiten mayormente longitudes de onda azules y ultravioletas, haciendo que parezcan azules o blancas.

Para estimar la temperatura superficial de una estrella, podemos utilizar la ley de Wien formulada entre la temperatura de un cuerpo negro y la longitud de onda de la

luz en el máximo de su espectro. Esto es, a medida que se incrementa la temperatura de un cuerpo negro, el máximo de su espectro se mueve hacia longitudes de onda de luz más cortas (azuladas).

Este sencillo método es conceptualmente correcto, pero no se puede utilizar para obtener temperaturas estelares con precisión, ya que las estrellas no son cuerpos negros perfectos. La presencia de varios elementos en la atmósfera de la estrella provoca que ciertas longitudes de onda se absorban. Debido a que estas líneas de absorción no están distribuidas uniformemente en el espectro, pueden desviar la posición del máximo espectral.

Un método alternativo utiliza la fotometría para medir la intensidad de la luz al pasar por diferentes filtros. Cada filtro permite pasar solo una parte específica del espectro de luz, mientras que rechaza las demás. Un sistema fotométrico muy utilizado es el llamado sistema UBV Johnson, que emplea tres filtros de paso banda: U (“ultravioleta”), B (“azul”) y V (“visible”), cada uno de los cuales ocupa diferentes regiones del espectro electromagnético.

El proceso de fotometría UBV produce tres luminosidades aparentes o flujos (cantidad de energía por m^2 y por segundo) designados por F_u , F_b y F_v . La relación de los flujos F_b / F_v es una medida de la cantidad de “color” de la estrella, y esas relaciones se pueden utilizar para establecer una escala de temperaturas para las estrellas. Generalizando, cuanto más grande sea la relación F_b / F_v de una estrella, mayor será su temperatura superficial.

En astronomía se prefiere expresar los colores de las estrellas en términos de diferencia de magnitudes, más que como relaciones entre flujos. Por tanto, el índice de color se define:

$$B - V = C_0 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{F_b}{F_v}\right) \quad (122)$$

Tomando como C_0 una constante tal que el índice de color B-V sea cero para la temperatura de 9000 K .

Los índices de color, al igual que la escala de magnitudes, crecen al decrecer las temperaturas. Las estrellas calientes y azules tienen valores de B-V más pequeños y negativos que las estrellas frías y rojas.

Un astrónomo puede utilizar los índices de color de una estrella, después de corregirlos por enrojecimiento debido a extinción interestelar, para obtener una temperatura precisa de la estrella.

Aunque existen otros índices de color usando diferentes parejas de filtros, estamos interesados en hallar la curva que relaciona el índice de color con la temperatura y usaremos concretamente el índice B-V como ejemplo representativo.

Para encontrar la curva debemos calcular los flujos de energía generados por un cuerpo negro en el rango de estos filtros. Para ello nos bastará integrar la función de Planck, reformulada en flujo, para el intervalo de las longitudes que deja pasar cada filtro concreto. Supondremos que los filtros son perfectamente cuadrados en su función de paso, es decir, que no dejan pasar nada de radiación fuera de su rango y que dentro del mismo son completamente transparentes. Esto es una idealización pero tengamos presente que también estamos idealizando el espectro de una estrella por el de un cuerpo negro.

Sabemos que el filtro B está centrado en 440 nm con una anchura de 100 nm y que el filtro V está centrado en 540 nm y con una anchura de 90 nm por lo que tomaremos como límites de integración: $390 - 490 \text{ nm}$ para el filtro B y $495 - 585 \text{ nm}$ para el filtro V

En este caso la integración debe obligatoriamente realizarse por métodos numéricos ya que la integral a realizar puede resolverse analíticamente entre cero e infinito pero no entre valores discretos. Por tanto debemos realizar numéricamente las siguientes integrales:

$$F_B = \int_{390}^{490} F_\lambda d\lambda = \int_{390}^{490} \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda \quad (123)$$

y

$$F_V = \int_{495}^{585} F_\lambda d\lambda = \int_{495}^{585} \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda \quad (124)$$

Integraremos la función flujo de energía entre los valores límites de los dos filtros y restaremos sus logaritmos.

Utilizando la ecuación (122) obtenemos el índice de color para una temperatura. Este cálculo lo realizaremos para un gran conjunto de temperaturas desde 1000 a 30000 K con intervalos de 100 K . Con esta gran cantidad de valores de

T e índice de color B-V podremos realizar una representación de T frente a este índice para un cuerpo negro, que en primera aproximación será válida para las temperaturas superficiales de las estrellas. El gráfico se ha obtenido usando para ello el software *Mathematica* y está representado en la figura 15. En el anexo A podemos encontrar el programa que ha generado la gráfica.

C_0 lo obtenemos también numéricamente y resulta ser: 0.49986163519972976.

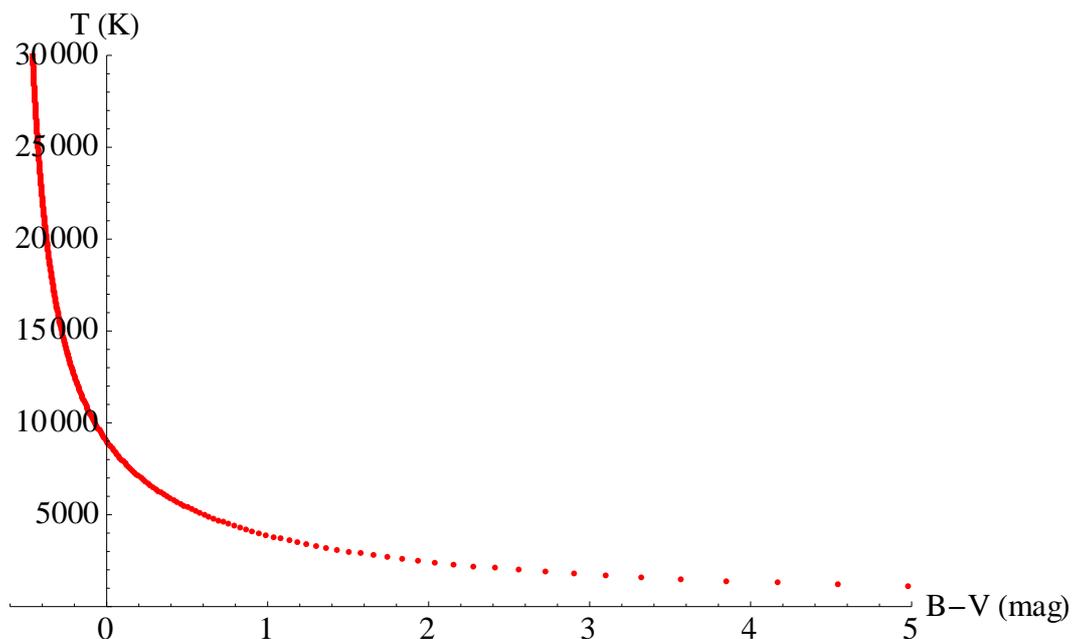


Figura 15. Representamos el índice de color B-V respecto a T .

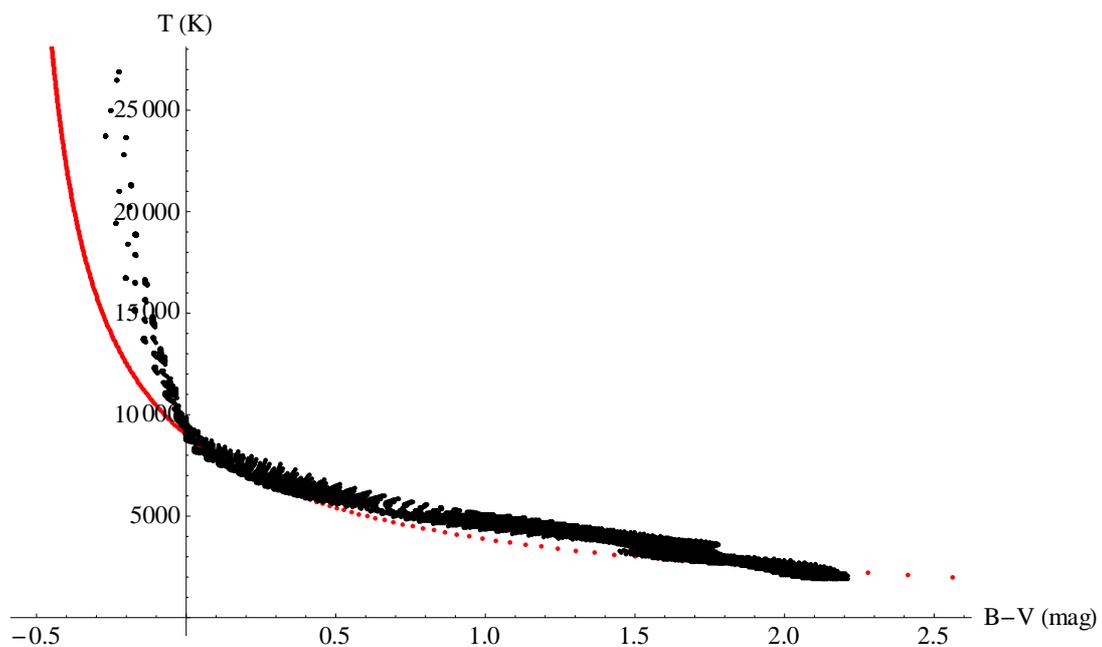


Figura 16. Representamos el índice de color B-V respecto a T . En rojo los datos del cuerpo negro y en negro, los datos reales de estrellas sacados de Worthey and Lee [32].

En la figura 15 podemos comparar la curva teórica obtenida para un cuerpo negro (en rojo) con los datos reales de un conjunto muy amplio de estrellas publicados por G. Worthey and H. Lee en 2011 (en negro). Los datos observacionales coinciden con los teóricos en los valores positivos del índice de color B-V pero discrepan en los índice negativos (estrellas tempranas). La curva obtenida a partir de la ecuación del cuerpo negro no es capaz, por tanto, de ajustarse a los datos observacionales a altas temperaturas. La razón fundamental de esta discrepancia es que las estrellas no son cuerpos negros perfectos ni emiten únicamente radiación térmica. La extinción interestelar de los datos reales podría ser también la causante de la discrepancia a no ser porque los datos usados ya han sido corregidos de este efecto.

Conclusiones

La radiación térmica de un cuerpo negro es una idealización de la radiación térmica de un cuerpo caliente en equilibrio. Aún podemos encontrar en astronomía y en algunos otros campos utilidad a esta idealización, ya que existen sistemas reales que se aproximan bastante a ella.

La radiación del cuerpo negro tiene la particularidad de que es universal, ya que no depende de la naturaleza del cuerpo ni de su forma, por lo que es más sencilla.

Existen tres ecuaciones que nos relacionan la temperatura absoluta del cuerpo radiante con magnitudes observables, por lo que disponemos de nuevos métodos para la medición indirecta de la temperatura del cuerpo negro. Estos métodos son:

- Calculando el flujo de energía radiante para todas las frecuencias de un cuerpo negro podemos obtener su temperatura usando la **ley de Stefan-Boltzmann**.
- Conociendo la forma de la distribución espectral de energía radiante del cuerpo podemos descubrir su temperatura identificando el pico de esta distribución y usando la **ley de desplazamiento de Wien**.
- Si los métodos anteriores no pueden usarse por no poder obtener el flujo total y por no poder identificar el pico de la función de distribución al estar ésta deformada por líneas de emisión y absorción, identificaremos la temperatura comparando la razón de las energías radiantes que observamos en varios rangos de frecuencias con la temperatura del cuerpo. Para realizar los cálculos usamos la **ley de distribución de energía de Planck**.

En el presente trabajo hemos puesto de manifiesto que el cálculo numérico da muy buenos resultados. El cálculo de la constante de Wien puede hallarse mediante alguna aproximación o por algún tipo de cálculo numérico y los índices de color sólo pueden obtenerse de forma numérica.

En astrofísica las soluciones analíticas a éste y a otros muchos problemas no son posibles por lo que resulta necesario el cálculo numérico. Problemas aparentemente sencillos, como por ejemplo el de los tres cuerpos, no es posible resolverlos analíticamente, por lo que problemas más complejos necesitan claramente el uso de herramientas informáticas.

Bibliografía

- [1] Kittel C., Kroemer H., *Thermal Physics*, 2ed., Freeman, 1980.
- [2] Thomas S. Kuhn, *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica 1894-1912*, Alianza Universidad 1980.
- [3] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Dover Publications, Inc, 1960.
- [4] George B. Rybicki and Alan P. Lightman, *Radiative processes in astrophysics*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [5] Fabiola Azucena Gutiérrez Mejía, *Revisión de los trabajos de Planck en torno a la radiación de cuerpo negro*, México, D. F. 2009.
- [6] M.W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, 5th ed. (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [7] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Addison-Wesley, 1958).
- [8] Kirchhoff, G.; [27 October 1859] (1860a). "Über die Fraunhofer'schen Linien". *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*: 662–665.
- [9] Kirchhoff, G., "Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme". *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*: 783–787. 1859
- [10] Kirchhoff, G. "Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme and Licht". *Annalen der Physik und Chemie* (Leipzig) 109: 275–301, 1860.
- [11] Kirchhoff, G., "Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht", *Gesammelte Abhandlungen*, 1862

- [12] Planck, M. (1914). *The Theory of Heat Radiation*. Masius, M. (transl.) (2nd ed.). P. Blakiston's Son & Co. OL 7154661M.
- [13] Boltzmann, Ludwig ,“*Übereine von Hr. Bartolientdeckte Beziehung der Warmestrahlung zum zweiten Hauptsatze*”, Ann. d. Phys., 22 (1884).
- [14] Boltzmann, Ludwig ,“*Ableitung des Stefan'schen Gesetzes betreffend die Abhängigkeit der Warmestrahlung von der Temperatur aus der lektromagnetischen Lichttheorie*”, Ann. d. Phys., 22 (1884).
- [15] Albert Einstein, “*Übereinen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*”, Ann. d. Phys., 17 (1905).
- [16] Kirchhoff, G. R., “*Ubet den Zusammenhang zwischen Emission and Absorption von Licht und Wärme*”, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859.
- [17] Michelson, W. A. ,“*Essaithéorique sur la distribution de l'énergie dans les spectres des solides*”, Journ. de Phys. et le Radium, 6 (1887).
- [18] Millikan, R. A. ,“*A Direct Determination of "h"*”, Phys. Rev., 4 1914.
- [19] Lord Rayleigh [John William Strutt] ,*The Law of Partition of Kinetic Energy*, Phil. Mag., 49 (1900).
- [20] Planck, Max ,*Über irreversible Strahlungsvorgänge, Fünfte Mitteilung (Schluss)*, Berl. Ber., 1899
- [21] Planck, Max ,*Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*, Ann. d. Phys., 4 (1901).
- [22] Planck, Max ,*Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizitat*, Ann. d. Phys., 4 (1901)
- [23] Planck, Max, *Über irreversible Strahlungsvorgänge (Nachtrag)*, Ann. d. Phys., 6 (1901), 818-831, recibido el 16 de octubre de 1901.
- [24] Planck, Max ,*Über die Verteilung der Energie zwischen Aether und Materie*, Arch. Néerland., 6 (1901).
- [25] Stefan, Josef, *Über die Beziehung zwischen der Warmestrahlung und der Temperatur* , Wiener Ber. II, 79 (1879).
- [26] Wien, Wilhelm, *Eineneue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Warmetheorie*, Berl. Ber., 1893
- [27] Eisberg y Resnick, *Física cuántica*, Ed. Limusa Wiley 1992.
- [28] Gustavo M. Murmis, *Obtención analítica de la constante de Stefan-Boltzmann a partir de la estadística de Bose-Einstein*, 1998
- [29] Miguel Ángel Padrón Ángel Plaza, *Sobre el problema de la radiación del cuerpo negro*, Technical Report. nº 011 – 1999

- [30] John Crepeau, *A brief history of the t^4 radiation law*, Heat Transfer Conference July 19-23, 2009, San Francisco, California USA
- [31] Max Jammer, *The Conceptual Development of Quantum mechanics*, McGraw-Hill 1966.
- [32] Guy Worthey and Hyun-chul Lee, An empirical UBVRJHK color-temperature calibration for stars, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 193:1 (11pp), 2011 March 2011.

APÉNDICE A

Función NIntegrate de *Wolfram Mathematica*

NIntegrate funciona de la siguiente forma: utiliza reglas adaptativas con estrategia globales y locales sobre el error para la elección de los subintervalos de integración numérica en los que se utilizan métodos de Newton-Cotes (casos particulares de estos métodos son la regla del rectángulo, la del trapecio y la de Simpson) u otros. La integral se trata por métodos simbólicos para simplificarla si es posible y posteriormente se buscan regiones con singularidades en el integrando que se tratan diferenciadamente. Las singularidades las busca el propio programa o pueden ser especificadas por el usuario.

Véase la documentación completa en:

<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NIntegrateOverview.html>

Programa para el cálculo de la constante de Wein.

```
(*Las constantes universales están en nanómetros, dejando las
demás unidades en sus valores internacionales*)
h=6.62606896 *10^(-16);
k=1.3806488 *10^( -5);
c=299792458*10^9;
i=0;
(*Realizamos un bucle para calcular el máximo de la función de
Planck para temperaturas desde 1000 a 3000 Kelvin en intervalos
de 1000 Kelvin*)
Do[
  i=i+1;
  Print[temp];(*Imprimimos el valor de la temperatura*)
  Print[NMaximize[{(2*Pi*h*c^2)/(x^5*(Exp[h*c/(x*k*temp)]-
1)),0<x<50000},{x}]];(*Imprimimos el valor de la longitud de
onda que hace máxima la función*)
```

```

wein[1,i]=x/.Last[NMaximize[{(2*Pi*h*c^2)/(x^5*(Exp[h*c/(x*k*t
emp)]-1)),0<x<50000},{x}]];(*Introducimos en la matriz wein el
                                valor de la longitud de onda
                                que hace máxima la función*)
wein[2,i]=temp;(*Introducimos la temperatura en la matriz wein*)
Print[wein[1,i]];(*Imprimimos la temperatura*)
(*Generamos una tabla llamada data con los logaritmos de la longitud
de onda y la temperatura*)
data=Table[{Log[wein[2,j]],Log[wein[1,j]]},{j,29}]
,{temp,1000,30000,1000}
];
(*Realizamos la recta de regresión*)
lm=LinearModelFit[data,x,x];
Normal[lm];
(*Imprimimos la gráfica*)
Show[ListPlot[lm["Data"],PlotStyle->{Red,PointSize[0.01]}
,BaseStyle->{FontSize->20}],Plot[lm[x],{x,6,15},PlotStyle-
>{Black,Thick}]]

```

Programa para el cálculo de la constante de Stefan-Boltzmann

```

(*Definimos la función de distribución de Planck*)
F[x_]:= (2*Pi*h*c^2)/(x^5*(Exp[h*c/(x*k*T)]-1));
(*Definimos las constantes con la longitud en nanómetros*)
h=6.62606896 *10^(-16);
k=1.3806488 *10^(-5);
c=299792458*10^9;
i=0;
(*Realizamos un bucle para temperaturas desde 1000 a 30000 en
intervalos de 1000 en el que integramos la función de Planck
entre 0 y 300000 nanómetros, que será nuestro infinito*)
Do [
    i=i+1;
    T=temp;
    bolt[1,i]=temp;
    bolt[2,i]=NIntegrate[F[x],{x,0,300000}];
    Print[bolt[1,i]];
    Print[bolt[2,i]];
    data=Table[{Log[bolt[1,j]],Log[bolt[2,j]]},{j,29}]
    ,{temp,1000,30000,1000}

```

```

];
(*Realizamos la recta de regresión*)
lm=LinearModelFit[data,x,x];
Normal[lm];
(*Imprimimos la gráfica*)
Show[ListPlot[lm["Data"], PlotStyle -> {Red,PointSize[0.01]}
,BaseStyle -> {FontSize -> 20}], Plot[lm[x], {x, 0, 11},
PlotStyle -> {Black, Thick}]]

```

Programa para la representación del índice de color respecto a la temperatura

(*Definimos la función de distribución de Planck, eliminamos las constantes que no van a influir en el cálculo. Al dividirse las integrales desaparecen las constantes*)

```
F[x_]:=1/(x^5*(Exp[h*c/(x*k*T)]-1));
```

```
h=6.62606896 *10^(-16);
```

```
k=1.3806488 *10^( -5);
```

```
c=299792458*10^9;
```

```
i=0;
```

(*Realizamos un bucle para temperaturas desde 1000 a 30000 en intervalos de 100 en el que integramos la función de Planck entre los rangos de los filtro B y V*)

```
Do [
```

```
  i=i+1;
```

```
  T=temp;
```

```
  color[1,i]=temp;
```

```
  (*Integramos entre los rangos del filtro B*)
```

```
  color[2,i]=NIntegrate[F[x],{x,390,490}];
```

```
  (*Integramos entre los rangos del filtro V*)
```

```
  color[3,i]=NIntegrate[F[x],{x,505,595}];
```

```
  (*Utilizamos la fórmula  $B - V = C_0 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{F_b}{F_v}\right)$  para obtener el índice de color.  $C_0$  vale 0.46220221017674706, valor que hemos calculado previamente*)
```

```
  color[4,i]=0.49986163519972976-2.5*Log[10,(color[2,i]/
color[3,i])];
```

```

Print[color[1,i]];
Print[color[2,i]];
Print[color[3,i]];
Print[color[4,i]];
data=Table[{color[4,j],color[1,j]},{j,291}]
,{temp,1000,30000,100}
];
(*Imprimimos la gráfica*)
ListPlot[data, AxesLabel->{"B-V (mag)",T(K)},BaseStyle->
{FontSize -> 16},PlotStyle -> Red]

```

Gráficas comparativas de las funciones de distribución de Planck, Wien y Rayleigh-Jeans

```
(*Definimos las constantes del problema en metros*)
```

```
h=6.62606896 *10^(-34)
```

```
k=1.3806488 *10^( -23)
```

```
c=299792458
```

```
(*Definimos la función de Planck*)
```

```
P[x_,T_]:= (2*Pi*h*x^3)/(c^2*(Exp[h*x/(k*T)]-1));
```

```
(*Definimos la función de Rayleigh-Jeans*)
```

```
R[x_,T_]:= (2*Pi*k*T*x^2)/(c^2);
```

```
(*Definimos la función de Wien*)
```

```
W[x_,T_]:= (2*Pi*h*x^3)/(c^2*(Exp[h*x/(k*T)]));
```

```
(*Definimos Pc como la gráfica de la función de Planck*)
```

```
Pc = Plot [P[s,15000],{s,0,3000000000000000},PlotStyle->Black,AxesLabel->{"f", "E"}]
```

```
(*Definimos Rc como la gráfica de la función de Rayleigh-Jeans*)
```

```
Rc =Plot [R[s,15000],{s,0,3000000000000000},PlotStyle->Red,AxesLabel->{"f", "E"}]
```

```
(*Definimos Wc como la gráfica de la función de Wien*)
```

```
Wc= Plot [W[s,15000],{s,0,3000000000000000},PlotStyle->
```

```
>Blue, AxesLabel->{"f", "E"}]
```

```
(*Imprimimos las tres gráficas a la vez*)
```

```
Show[Pc, Rc, Wc, DisplayFunction->$DisplayFunction]
```