Problemas de Física 4 [§]
Diferenciales Exactas

1. **Diferenciales Exactas**
   Verificar si las siguientes son ecuaciones diferenciales exactas. De ser posible, encontrar la ecuación primitiva:
   (a) $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$
   (b) $3ydx + 2xdy = 0$
   (c) $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)dy = 0$
   (d) $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$
   (e) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$

2. **Factor de Integración**
   Encontrar el factor de integración y resolver las siguientes ecuaciones:
   (a) $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$
   (b) $-ydx + 4xdy = x^2dy$
   (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$
   (d) $x^2 - 2y^2 + 2xyy' = 0$ (ayuda: verificar si es homogénea)

3. **Propiedades de Estado**
   Si el diferencial de una función es exacto, se dice que la función es una *propiedad de estado*. Determinar si las siguientes son propiedades de estado:
   (a) La presión p dada por
   $$p(v-b) = RT,$$
   donde b y R son constantes.
   (b) El calor emitido por un sistema cuyo diferencial esta dado por
   $$dq = f(T)dT + \frac{RT}{v}dv$$
   (c) La suma de dos propiedades.
   (d) El producto de dos propiedades.
   (e) El producto de una propiedad y un diferencial inexacto.
   (f) $dq\left(\frac{1}{T}\right)$.

4. **Relaciones entre Derivadas Parciales**
   (a) Demostrar que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}$
   (b) Demostrar que $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$
   (c) Demostrar que la ecuación anterior se cumple para la esfera:
   $$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$
   Ayuda: $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{y}{x}$

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

5. **Derivadas Parciales en Termodinámica**

   (a) Para la ecuación de estado de gases de Van der Waals

   $$p = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{v^2}$$

   determinar $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$, $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ y $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$.

   (b) Repetir el problema para un gas ideal

   (c) Calcular el producto de los 3 diferenciales anteriores.

6. **Coeficientes de expansión**

   El **coeficiente de expansión volumétrico** β se define por:

   $$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,$$

   la **compresibilidad** κ se define:

   $$\kappa = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T,$$

   y el **coeficiente de expansión lineal** α es:

   $$\alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F.$$

   (a) Demostrar:

   i. $\beta_{g.i.} = \frac{1}{T}$

   ii. $\kappa_{g.i.} = \frac{1}{P}$

   iii. $\beta = 3\alpha$

   iv. $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$

   v. $\left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)_p$

   (b) Una esfera de bronce ($\alpha = 1.9 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$) tiene un diámetro de 5.0 cm a 25 ℃. Un anillo de acero ($\alpha = 1.1 \times 10^{-5}$ ℃$^{-1}$) tiene un diámetro de 4.995 cm a 25 ℃. A qué temperatura puede empezar a pasar la esfera a través del anillo si:

   - se calienta el anillo, pero no la esfera
   - se calientan ambos a la misma temperatura

   (c) Un tacho de Aluminio de 40 l y 75 cm de altura, se llena hasta el tope con agua, cuando la temperatura es 20 °C. El tacho se coloca al sol, y la temperatura del agua se incrementa a 35 °C. Teniendo en cuenta que tanto el tacho como el agua expanden su volumen al aumentar la temperatura

   i. ¿El agua se derrama o deja de estar en el tope del tacho?

   ii. ¿Cómo cambia la presión en el fondo del tacho?

   Buscar los datos en tablas.

7. **Transformaciones de Legendre**
   Sea

$$df = g\ dx + h\ dy$$

   un diferencial exacto, y $g = g(x, y)$ y $h = h(x, y)$, utilizar las transformaciones de Legendre para demostrar que

   (a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_g = -\left(\frac{\partial h}{\partial g}\right)_y$

   (b) $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y$

   (c) $\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_x = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_h$

   (d) $\left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)_g = \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_h$

8. **Problema Especial**

   Se desea representar el H_2O alrededor del estado $P = 0.35$ bar y $T = 80$ ℃, con la siguiente ecuación de estado:

$$v = \frac{RT}{P} - \frac{b}{T^3}\,.$$

   (a) Justificar si esta ecuación puede ser válida.

   (b) Encontrar el valor de b apropiado.

   (c) En el transcurso de la materia, veremos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T &= T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P\\ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v &= c_v\,.\end{aligned}$$

   Integrar ambas ecuaciones y encontrar $U(T, v)$.

   (d) En el transcurso de la materia, veremos que

$$dS = \frac{1}{T}\,c_v\,dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dV\,.$$

   Integrar la ecuación y obtener $S(T, v)$.

   (e) La energía libre de Helmholtz se define como $F = U - T\,S$. Verificar que se cumple

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_T &= -P\\ \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v &= -S\end{aligned}$$