Problemas [§]
La Ecuación de Schrödinger (2): Problemas Adicionales

1. **Pozo infinito con división opaca**
   Considerar un pozo infinito de potencial, entre $-a$ y a, en el cual introducimos una pared opaca en $x = 0$. La pared opaca se puede obtener como la idealización de una barrera de ancho 2ϵ (o sea, entre $x = -\epsilon$ y $x = \epsilon$) y de altura V_0, con $\epsilon \to 0$ y $V_0 \to \infty$. El producto $\epsilon V_0 \equiv \Omega$, donde Ω es el *parámetro de opacidad* de la pared divisora, se mantiene constante.
   Considerar el efecto que produce la división opaca en las soluciones del pozo infinito, en función del parámetro Ω.

2. **El mismo problema aplicado**
   Encontrar la energía del estado fundamental para un electrón dentro de un pozo infinito unidimensional, de ancho $2a = 1.058$ Å, en cuyo centro se encuentra un potencial delta de Dirac

   $$V(x) = \begin{cases} \infty & x \geq |a| \\ -V_0\delta(x) & -a < x < a \end{cases}$$

   casos donde: a) $V_0 \gg 1$ a.u. b) $V_0 \geq 1$ a.u. c) $V_0 \ll 1$ a.u. d) $V_0 \leq 1$ a.u. (¿Qué sucede cuando $V_0 = 1$?).

3. **Modelo del Átomo de Hidrógeno**
   Se quiere modelar el átomo de Hidrógeno con un potencial $V(x) = -\alpha\delta(x)$ (*distribución Delta de Dirac*), de modo tal que tengan la misma energía en sus estados fundamentales. Encontrar los parámetros de este potencial.

4. **Modelo de molécula H_2^+**
   La molécula diatómica H_2^+ puede ser modelada por el siguiente potencial ("doble delta"):

   $$V(x) = -\alpha\{\delta(x + d) + \delta(x - d)\},$$

   donde la distancia entre los dos núcleos de Hidrógeno es $2d = 0.74$ Å. Utilizando los parámetros del punto anterior, encontrar los dos primeros estados de este potencial (si es que existen).

5. **Pozo finito**
   Calcular la profundidad mínima que debe tener un pozo de potencial unidimensional de ancho $a = 5$ Å, para que existan al menos dos estados ligados.

6. **Más Potenciales**
   Resolver la ecuación de Schrödinger para el siguiente potencial:

   $$V(x) = V_0\Theta(x) - \alpha\delta(x).$$

   Analizar sólo los casos: a) $E > V_0$ y b) $E < 0$.

7. **Matriz de Dispersión**
   Encontrar los estados ligados de un pozo finito sabiendo únicamente la expresión del coeficiente de reflexión.

8. **Varias barreras de potencial**
   Demostrar la ecuación **B10** del artículo de Tambini *et al.*: *Dymanics of quantum collapse in energy measurements*, Physical Review A **51**, 967 (1995). Para los que se animen, demostrar **B15**.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

9. **Potentiales sin reflexión**
Considerar el potencial del tipo *Pöschl–Teller*:

$$V(x) = -\frac{\hbar a^2}{m}\operatorname{sech}^2(ax)$$

donde a es una constante real positiva.

(a) Demostrar que el $\Psi_0 = A\,\operatorname{sech}(ax)$ es una posible solución de la ecuación de Schrödinger para éste potencial (Ψ_0 es el estado fundamental). Calcular E_0, normalizar la función, y dibujarla.

(b) Demostrar que

$$\Psi_0 = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx} \qquad\qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

es solución para toda $E > 0$.

i. ¿Cuál es la forma asimptótica de estas funciones?
ii. Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión R y T.
iii. Encontrar otros estados ligados. (Ayuda: utilizar la matriz de scattering (S–matrix)).

10. **Uno más de barrera de potencial unidimensional**
Realizar el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}
\alpha_\pm &\equiv \frac{k_1^2 \pm k_2^2}{2k_1k_2},\\
\beta &\equiv 2k_2a,\\
\frac{F}{A} &\equiv \sqrt{T}e^{i\phi_T},\\
\frac{B}{A} &\equiv \sqrt{R}e^{i\phi_R}.
\end{aligned}$$

donde A, B y F son las amplitudes de la onda incidente, reflejada y transmitida, a es el ancho de la barrera, k_1 y k_2 son los números de onda en la zona libre y en la barrera. Suponer que la energía de la partícula es mayor que el alto de la barrera y demostrar:

(a) $T + R = 1$

(b) $\phi_T = \phi_R - n\frac{\pi}{2}$

11. Dado el siguiente potencial unidimensional:

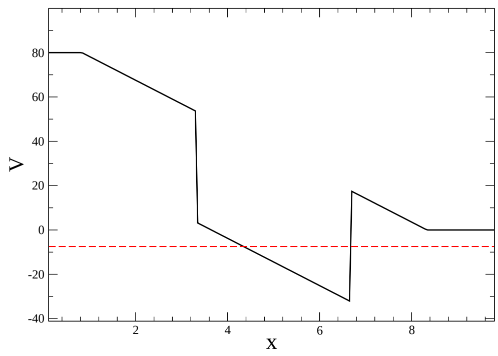

Figure 1: Potencial unidimensional y energía del estado.

Se representan las siguientes figuras, de las cuales sólo una corresponde a la solución de la ecuación de Schrödinger, para el 4^{to} nivel energético de este potencial dado (cuya energía está indicada por la línea punteada). Identificar cuál es la función de onda correcta. Justifique sus respuestas (tanto para el caso correcto como para los casos que considera incorrectos).

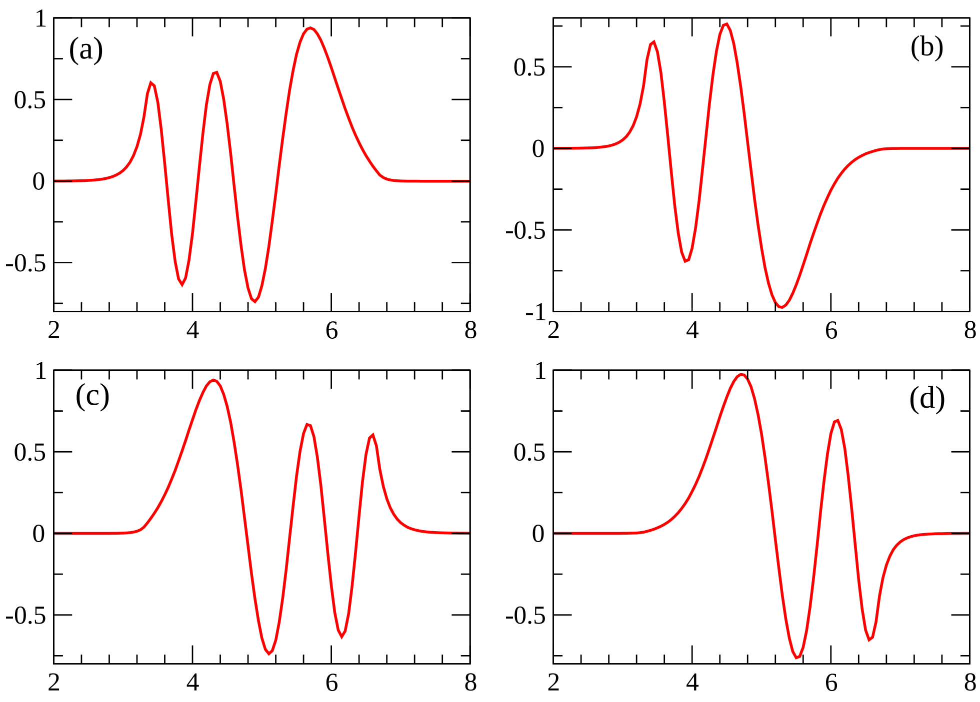

Figure 2: Posibles soluciones del problema de potencial unidimensional.

12. En las figuras siguientes están representados potenciales unidimensionales, y sus estados fundamentales, desplazados verticalmente con su energía correspondiente. Cada función de onda es solución de alguno de los potenciales dibujados en la figura. Identificar cuál de estos gráficos es el correcto.

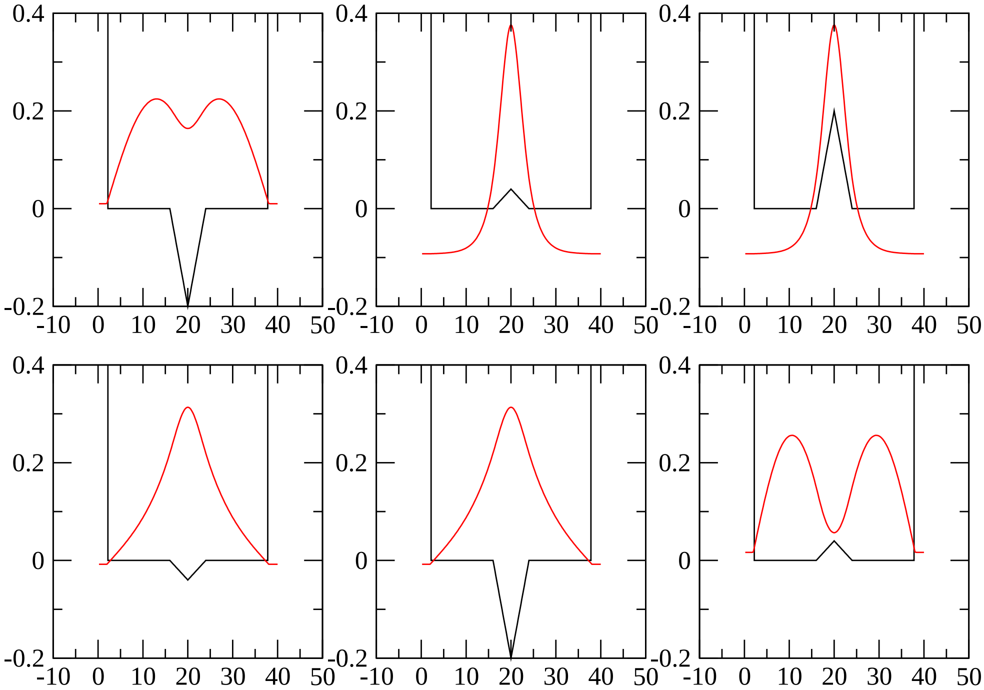

Figure 3: Potenciales unidimensionales y soluciones.

13. En las siguientes figuras están representados potenciales unidimensionales (líneas gruesas) y las energías correspondientes a los 5^{tos} estados (líneas de punto).

    (a) Identificar en cuál figura se ve la 5^{ta} autofunción con su potencial correspondiente, justificando la respuesta.

    (b) Plantear la ecuación de Schrödinger y las condiciones de contorno para el potencial (d) (**no** resuelva las ecuaciones).

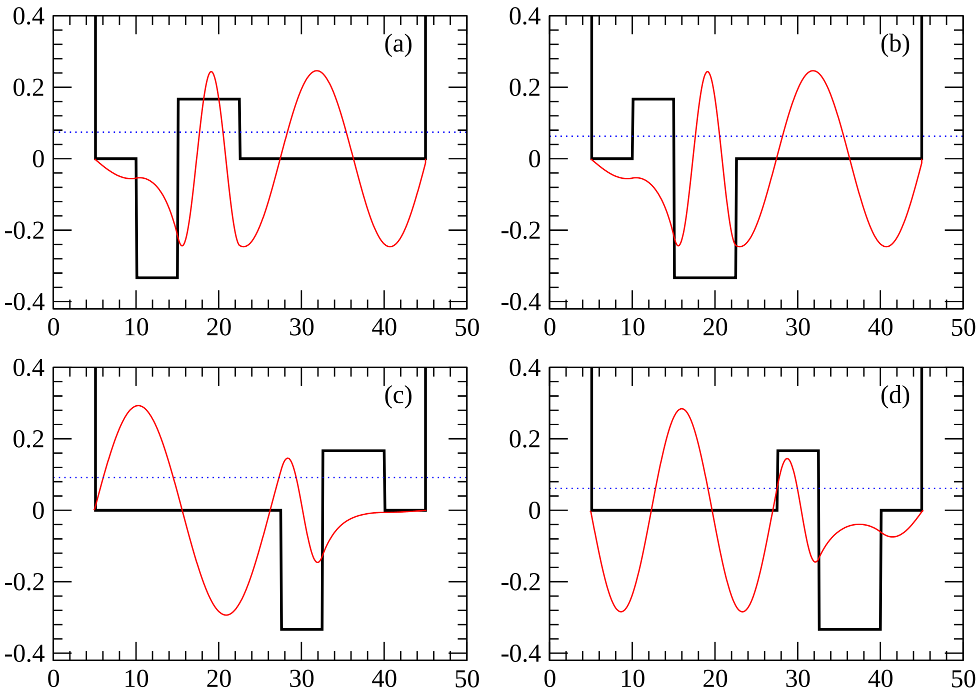

Figure 4: Potenciales unidimensionales y 5^{tas} autofunciones.