Problemas de Física 4 §
La Ecuación de Schrödinger (1)

1. Una partícula está representada (a $t = 0$) por la función de onda:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax/a & 0 \leq x \leq a \\ A(b-x)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

donde A, a y b son constantes.

   (a) Normalizar Ψ

   (b) Dibujar la función

   (c) ¿Dónde será mas probable encontrar la partícula a $t = 0$?

   (d) ¿Cuál es la probabilidad de encontrarla a la izquierda de a? Comprobar este resultado para los casos límites: $b = a$ y $b = 2a$

   (e) Calcular $< x >$

2. Considerar la función de onda

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

donde A, λ y ω son constantes reales y positivas.

   (a) Normalizar Ψ

   (b) Dibujar la función

   (c) Calcular $< x >$

   (d) Calcular $< x^2 >$

   (e) Calcular σ_x e ilustrar este valor en el gráfico. ¿Cuánto vale la probabilidad de encontrar la partícula fuera de este rango?

3. Sea $P_{ab}(t)$ la probabilidad de encontrar una partícula en el rango ($a < x < b$), a tiempo t. Mostrar que

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a,t) - J(b,t)$$

donde

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\frac{d\Psi^*}{dx} - \Psi^*\frac{d\Psi}{dx}).$$

¿Qué unidades tiene $J(x,t)$? ¿Qué significado físico tiene?

4. Supongamos que se le agrega un potencial constante V_0 a la energía de potencial. ¿Qué efecto tiene esto en una partícula clásica? ¿Qué efecto tiene en la función de onda cuántica? ¿Y en los valores medios?

5. **Teoremas útiles**

   (a) Demostrar que si la ecuación de Schrödinger es separable, la constante de separación E debe ser real.
   Ayuda: La función debe estar normalizada a todo t. Calcular la variación de la norma para el caso en que E es compleja.

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

(b) Si la ecuación de Schrödinger es separable, y la solución se puede expresar como $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, entonces

i. Ψ es imaginaria

ii. ψ siempre se puede hacer real

(c) Si $V(x)$ es una función par, entonces ψ es par o impar (tiene simetría definida).

(d) Si la solución es normalizada, entonces E debe ser mayor que el valor mínimo de $V(x)$. ¿Cuál es la analogía clásica?

6. **Pozo infinito**

(a) Mostrar que no puede existir solución con $E \leq 0$.

(b) Comprobar que las soluciones cumplen con el principio de incertidumbre de Heisenberg. ¿Qué estado se aproxima más al límite de incertidumbre?

(c) Expresar las soluciones, energías, valores medios, etc., para el pozo infinito centrado en el orígen (entre $-a/2$ y $a/2$).

(d) Una partícula en un pozo infinito, tiene una función onda inicial que es una mezcla de los dos primeros estados estacionarios:

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)].$$

i. Normalizar $\Psi(x,0)$

ii. Calcular $\Psi(x,t)$ y $|\Psi(x,t)|^2$

iii. Calcular $< \hat{x} >$

iv. Calcular $< \hat{p} >$

v. Calcular $< \hat{H} >$ (comparar con E_1 y E_2)

vi. Si una partícula clásica se encuentra rebotando entre paredes elásticas infinitamente, con una energía igual al valor $< \hat{H} >$ obtenido. ¿Cuál es la frecuencia de su movimiento? ¿Coincide éste con la frecuencia cuántica (dada en $< x >$)?

(e) Una partícula en un pozo infinito, tiene una función onda inicial

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x).$$

i. Normalizar $\Psi(x,0)$

ii. Graficar la función. ¿A qué estado estacionario se parece? Estimar entonces, sin cuentas, $< \hat{x} >$, $< \hat{p} >$ y $< \hat{H} >$, para $t = 0$.

iii. Calcular $< \hat{x} >$, $< \hat{p} >$ y $< \hat{H} >$ para $t = 0$.