

## Problemas de Física 4

### § Spin

#### 1. Spin

- (a) Sean  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  los autoestados de spin  $1/2$ . Encontrar:
- (a)  $S^2|\alpha\rangle$  (b)  $S^2|\beta\rangle$  (c)  $S_z|\alpha\rangle$  (d)  $S_z|\beta\rangle$   
 (e)  $S_+|\alpha\rangle$  (f)  $S_-|\alpha\rangle$  (g)  $S_x|\alpha\rangle$  (h)  $S_y|\alpha\rangle$
- (b) Representar (en la representación anterior) las matrices:
- (a)  $S^2$  (b)  $S_+$  (c)  $S_-$   
 (d)  $S_z$  (e)  $S_x$  (f)  $S_y$
- (c) Comprobar que las matrices anteriores cumplen la relación de conmutación que define un momento angular
- (d) Supongamos que se mide  $S_z$  en un estado  $\chi$  y se obtiene el valor  $\hbar/2$  con probabilidad  $|a|^2$ , y el valor  $-\hbar/2$  con probabilidad  $|b|^2$ . ¿Qué valores de  $S_x$  se podrán medir, y con qué probabilidad?

#### 2. Matrices de Pauli

- (a) Calcular las trazas, los determinantes, y las relaciones de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_i$ , ( $i = x, y, z$ ).
- (b) Calcular  $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z$
- (c) Sea una matriz  $X$  de  $2 \times 2$  (no necesariamente Hermítica ni unitaria), que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde  $\mathbf{a}$  es un vector 3-d.

- i. Hallar  $\text{Tr}(X)$  y  $\text{Tr}(\sigma_k X)$  en función de  $a_i$   
 ii. Hallar  $a_i$  en términos de los elementos de matriz  $X_{ij}$
- (d) Sean  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{B}}$  dos operadores vectores en tres dimensiones que conmutan con  $\hat{\sigma}$ . Demostrar que

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{A}})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}})$$

#### 3. Interacción Spin-Orbita

- (a) La interacción del spin del electrón con el momento angular de su propia órbita introduce un término adicional en la energía, que se puede escribir como

$$E_{SL} = a\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

Calcular el valor de  $E_{SL}$  para los casos  $S_z = \pm \frac{1}{2}$ , y encontrar sus diferencias. Calcular la diferencia energética (en función de  $a$ ) para el caso específico  $L = 2$ .

---

§ <http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4>