Física 4: Termodinámica




Darío Mitnik

Instituto de Astronomía
y Física del Espacio

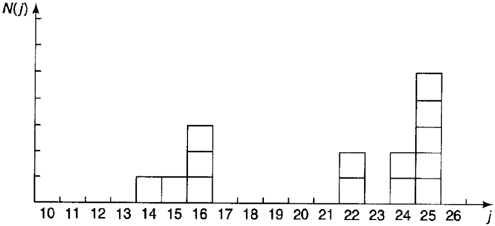
Departamento de Física
Universidad de
Buenos Aires

Argentina

Probabilidad

Un grupo de 14 personas:

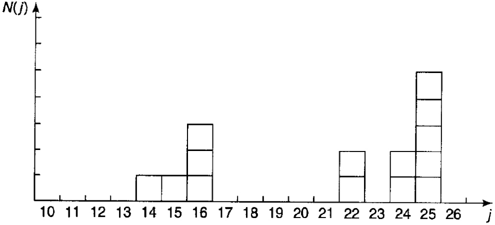
- 1 de 14 años
- 1 de 15 años
- 3 de 16 años
- 2 de 22 años
- 2 de 24 años
- 5 de 25 años



Probabilidad

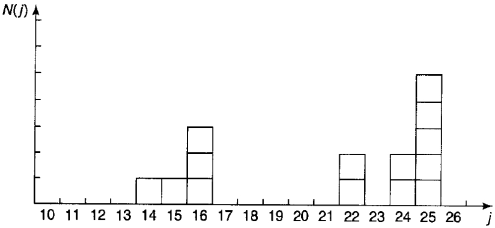
- $N(14) = 1$
- $N(15) = 1$
- $N(16) = 3$
- $N(22) = 2$
- $N(24) = 2$
- $N(25) = 5$

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$



Probabilidad

- $P(14) = \frac{1}{14}$
- $\ldots$
- $\ldots$
- $P(22) = \frac{2}{14}$
- $\ldots$
- $P(25) = \frac{5}{14}$



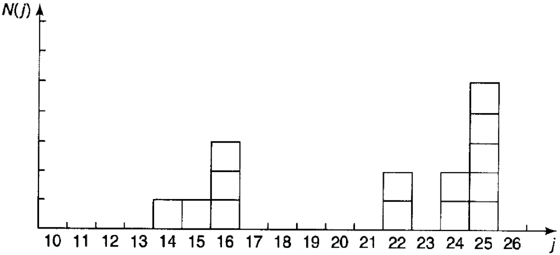
$$P(j) = \frac{N(j)}{N}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N(j)}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Probabilidad

- Edad **más probable**: 25 (máximo $P(j)$)
- **median**: 23 (7 personas menores y 7 mayores)
- **Promedio**:

$$\langle j \rangle = \frac{14 + 15 + 3 \times 16 + 2 \times 22 + 2 \times 24 + 5 \times 25}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

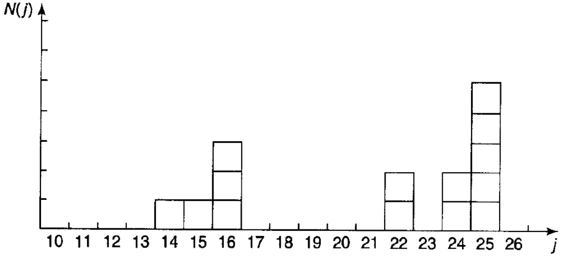


Nadie tiene esa edad!

Promedio

$$\langle j \rangle = \frac{14 \times 1 + 15 \times 1 + 16 \times 3 + 22 \times 2 + 24 \times 2 + 25 \times 5}{14}$$

$$\langle j \rangle = \frac{\sum j \; N(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} j \, P(j)$$



Promedio Cuadrático

$$\langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \, P(j)$$

y en general, para cualquier función:

$$\langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \, P(j)$$

Promedio Cuadrático

Tenemos dos monedas:

- $r_1 = 2$ cm
- $r_2 = 3$ cm

$$\begin{aligned}
\langle r \rangle &= \frac{2 \times 1 + 3 \times 1}{2} = \frac{5}{2}\ \text{cm} \\
\Rightarrow &\quad \langle A \rangle = \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \pi\,(2.5)^2 = \pi\,(6.25) = 19.635\ \text{cm}^2
\end{aligned}$$

Promedio Cuadrático

Tenemos dos monedas:

- $r_1 = 2$ cm
- $r_2 = 3$ cm

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \pi\,(r_1)^2 = \pi\,4\ \mathrm{cm}^2 \\
A_2 &= \pi\,(r_2)^2 = \pi\,9\ \mathrm{cm}^2 \\
\langle A \rangle &= \pi\,\frac{4\times 1 + 9\times 1}{2} = \pi\,\frac{13}{2} = \pi\,(6.5) = 20.4204\ \mathrm{cm}^2
\end{aligned}
$$

Cuidado!

$$\pi\,\langle j^2\rangle \neq \pi\,\langle j\rangle^2$$

$$\langle j^2\rangle \neq \langle j\rangle^2$$

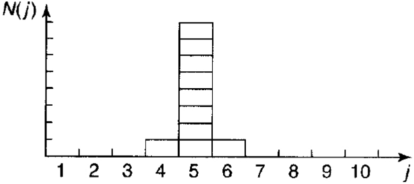
Radio Cuadrático Medio

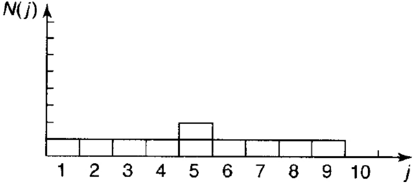
- $r_1 = 2$ cm
- $r_2 = 3$ cm
- $\langle r \rangle = 2.5$
- $\pi \langle r \rangle^2 = \pi\,(6.25)$
- $A_1 = \pi\,(r_1)^2 = \pi\,4\ \mathrm{cm}^2$
- $A_2 = \pi\,(r_2)^2 = \pi\,9\ \mathrm{cm}^2$
- $\langle r^2 \rangle = 6.5 \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 2.55$
- $\langle A \rangle = \pi\,(6.5)$

Podemos definir entonces un radio efectivo r_{cm} tal que $\pi\, r_{cm}^2$ sea igual al área promedio. Por inspección:

$$r_{cm} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$$

Caracterización de Histogramas





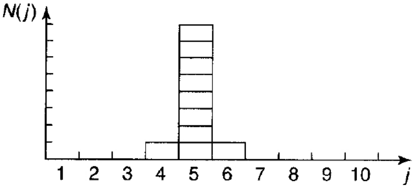
Mismo promedio, misma mediana, mismo valor más probable

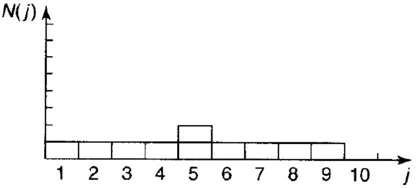
Caracterización de Histogramas

Podemos analizar cuánto se alejan los valores del promedio

$$\Delta j \;\equiv\; j - \langle j \rangle$$

y promediar esas distancias





$$\begin{aligned}\langle \Delta j \rangle &= \sum_j (j - \langle j \rangle)\, P(j) = \sum_j j\, P(j) - \sum_j \langle j \rangle\, P(j) = \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle \sum P(j) = \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0\end{aligned}$$

Varianza

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle$$

La raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto al promedio... **Desviación estándar:**

$$\sigma = \sqrt{\langle (\Delta j)^2 \rangle}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_j (\Delta j)^2 \, P(j) = \sum_j (j - \langle j \rangle)^2 \, P(j) = \\
&= \sum_j (j^2 - 2\, j\, \langle j \rangle + \langle j \rangle^2) \, P(j) = \\
&= \sum_j j^2 \, P(j) - \sum_j 2\, j \, \langle j \rangle \, P(j) + \sum_j \langle j \rangle^2 \, P(j)
\end{aligned}$$

Desviación Estándar

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_j (\Delta j)^2 \, P(j) = \\ &= \sum_j j^2 \, P(j) - \sum_j 2\, j \, \langle j \rangle \, P(j) + \sum_j \langle j \rangle^2 \, P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2 \langle j \rangle \, \langle j \rangle + \langle j \rangle^2\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2}$$

Atención:
$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2$, y la igualdad se da para $\sigma = 0$.

Distribución Continua

¿Qué probabilidad hay de encontrar una persona cuya edad sea 16 años, 14 días, 2 horas, 34 minutos, 42 segundos y 238.45 milésimas de segundo?

La probabilidad en una variable continua se define en un rango.
Densidad de Probabilidad:

$$\rho(x)\,dx$$

es la probabilidad de encontrar el valor entre x y $x + dx$.

Para un intervalo finito:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

Distribución Continua

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \rho(x)\, dx$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \rho(x)\, dx$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

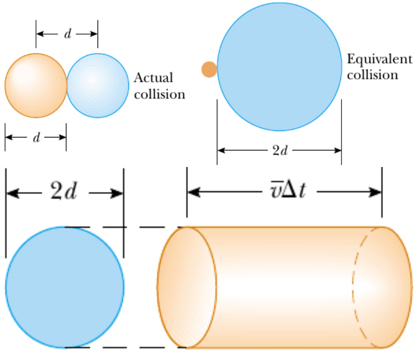
Teoría Cinética

Distribución de Maxwell–Boltzmann:

$$f(v)\,dv = 4\pi\,v^2\,\left(\frac{m}{2\,\pi\,k\,T}\right)^{3/2}\,e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}}\,dv$$

Camino Libre

- Dos moléculas de diámetro d colisionarán si sus caminos están dentro de un área σ (círculo de radio d)
- En un Δt todas las moléculas dentro del volúmen $\langle v \rangle \, \Delta t \, \sigma$ colisionan.
- Número de choques en Δt: $n_c = n \, \langle v \rangle \, \Delta t \, \sigma$
- Camino libre: $\lambda = \frac{\langle v \rangle \, \Delta t}{n_c} = \frac{1}{n \, \sigma}$



Camino Libre

Otras magnitudes importanes:

- Frecuencia de colisiones: $f = \frac{n_c}{\Delta t} = n \langle v \rangle \sigma$
  (también se puede calcular como $f = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}$
- Tiempo de colisiones: $\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{n \langle v \rangle \sigma}$

Camino Libre

Relación con la presión (aproximación de gas ideal):

- densidad $n = \frac{N}{V} = \frac{n_{\text{mol}}\,N_A}{\frac{n_{\text{mol}}\,R\,T}{p}} = \frac{p\,N_A}{R\,T} = \frac{p}{k\,T}$
- $\lambda = \frac{1}{n\,\sigma} = \frac{k\,T}{p\,\sigma}$
- El camino libre λ **no es igual** a la distancia de separación entre partículas $d = \frac{1}{n^3}$.

Camino Libre

Números para tener alguna idea. Aire a $p = 1$ atm y $T = 20°C$.
La molécula de N_2 tiene un diámetro $d = 2 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} = 2$ Å.

- densidad $n = \frac{p}{k\,T} = 2.5 \times 10^{25}$ moléculas/m^3.
- Separación entre moléculas $d = \frac{1}{n^3} = 3 \times 10^{-9}$ m $= 30$ Å.
- Sección eficaz $\sigma = \pi\,d^2 = 1 \times 10^{-19}$ m^2.
- El camino libre $\lambda = \frac{1}{n\,\sigma} = 3 \times 10^{-7}$ (viaja por 100 moléculas antes de chocar!)
- Velocidad media $\langle v \rangle = 511$ m/s
- Freculencia de colisiones $f = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = 2 \times 10^9$ colis/sec (mil millones por segundo!)