

## Problemas Cuántica de fotones §

El estado de polarización de un fotón se puede describir por un vector en un espacio vectorial complejo de dimensión 2. En él se pueden definir las bases  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ ,  $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$  y  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , correspondientes a polarización lineal en  $x$  y  $y$ , polarización lineal en  $x'$  y  $y'$  y polarización circular. Los productos de dichas bases están en la siguiente tabla:

|      | $x$ | $y$ | $x'$           | $y'$            | $R$                                  | $L$                                |
|------|-----|-----|----------------|-----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x$  | 1   | 0   | $\cos(\theta)$ | $-\sin(\theta)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$                 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$               |
| $y$  |     | 1   | $\sin(\theta)$ | $\cos(\theta)$  | $-\frac{i}{\sqrt{2}}$                | $\frac{i}{\sqrt{2}}$               |
| $x'$ |     |     | 1              | 0               | $\frac{\exp(-i\theta)}{\sqrt{2}}$    | $\frac{\exp(i\theta)}{\sqrt{2}}$   |
| $y'$ |     |     |                | 1               | $-\frac{i \exp(-i\theta)}{\sqrt{2}}$ | $\frac{i \exp(i\theta)}{\sqrt{2}}$ |
| $R$  |     |     |                |                 | 1                                    | 0                                  |
| $L$  |     |     |                |                 |                                      | 1                                  |

1. Sea el estado  $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2} |R\rangle + \frac{(1-i)}{2} |L\rangle$ 
  1. ¿Está polarizado circularmente? Si es así, es esta polarización  $R$  o  $L$ ?
  2. ¿Está polarizado linealmente? En qué eje?

Ayuda:

  - a) Multiplique por  $\langle x'|$  y encuentre para qué valor de  $\theta$ ,  $\langle x'|\psi\rangle = 1$
  - b) Utilizando la matriz cambio de base, escriba  $|\psi\rangle$  en la base  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ .
2. A partir de la relación de completitud de la base  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ , verifique la de  $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$  y  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ .
3. Definimos el operador rotación como  $|x'\rangle = \hat{R}(\theta) |x\rangle$ .
  1. Escriba la representación matricial de  $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ ,  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , y  $\hat{R}(\theta)$  en la base  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ .
  2. Encuentre los autoestados y autovalores de  $\hat{R}(\theta)$ .
  3. Aplicando  $\hat{R}(\pi/2)$  sobre  $|x'\rangle$  muestre que obtiene  $|y'\rangle$
4. Para un estado arbitrario  $|\psi\rangle$  diga cuáles de las siguientes propiedades son ciertas siempre, a veces o nunca. Además, diga cuáles dependen de cómo se elige el factor arbitrario de fase.
  - a)  $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle y|\psi\rangle|^2 = 1$ .
  - b)  $\langle x|\psi\rangle$  es real.
  - c)  $\langle x|\psi\rangle$  y  $\langle x'|\psi\rangle$  son reales.
  - d)  $\langle x|\psi\rangle$  y  $\langle R|\psi\rangle$  son reales.
  - e) Existe un  $|\phi\rangle$  tal que  $\langle \phi|\psi\rangle = 0$ .
  - f)  $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle R|\psi\rangle|^2 = 1$ .
  - g) Si  $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle y|\psi\rangle|^2$ , entonces  $|\langle x'|\psi\rangle|^2 = 1/2$  para todo  $\theta$ .

Interprete los que pueda en términos de los experimentos de polarización y cristales birrefringentes.

§<http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/fotones>

5. Sea  $x'$  un eje orientado en  $\theta = 30$  respecto a  $x$ , y un haz de fotones orientados en un estado de polarización  $\psi$  tal que  $|\langle y|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

1. Se hace pasar el haz por los siguientes 3 proyectores:

$$\text{Detector} \leftarrow y' \leftarrow R \leftarrow y \leftarrow \psi$$

Calcular la probabilidad de transmisión.

2. Repetir el cálculo si se invierten las direcciones:

$$\text{Detector} \leftarrow \psi \leftarrow y \leftarrow R \leftarrow y'$$

3. Repetir los cálculos si se reemplazan los polarizadores  $R$  por un par de analizadores  $R-L$ .

6. Sea un haz de  $N$  fotones por segundo descritos por el siguiente estado de polarización

$$|\psi\rangle = c(3|x\rangle + 4i|y\rangle)$$

1. Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador  $y$ .
  2. Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador  $x'$  (orientado en un ángulo  $\theta$  respecto a  $x$ ).
  3. Cuando un fotón está polarizado en  $R$  lleva un momento angular  $\hbar$  respecto a su dirección de movimiento. Si su polarización es  $L$  ejerce el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descrito por el estado  $\psi$  es absorbido totalmente por una superficie, qué torque se ejercerá sobre esta superficie?
  4. ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?
7. Sea  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  una base ortonormal abstracta. Para las siguientes propiedades diga cuales son suficientes para asegurar ortonormalidad, cuales son necesarias pero no suficientes y cuales irrelevantes a la cuestión de la ortonormalidad:

- a)  $\langle 1|2\rangle = 0$ .
- b)  $|\langle 1|x\rangle|^2 + |\langle 2|x\rangle|^2 = 1$
- c)  $|\langle 1|\phi\rangle|^2 + |\langle 2|\phi\rangle|^2 = 1$  para todo  $|\phi\rangle$ .
- d) Existe un  $|\phi\rangle$  tal que  $\langle 1|\phi\rangle = 0$  y  $\langle 2|\phi\rangle = 0$ .
- e) Para todo  $|\phi\rangle$  existen constantes  $a$  y  $b$  tal que  $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$
- f) Al menos uno de  $\langle 1|R\rangle$  y  $\langle 2|R\rangle$  es complejo.