

Problemas

Momento Angular (2) §

1. (a) Considere un sistema con $j = 1$. Escriba explícitamente

$$\langle j = 1, m' | J_y | j = 1, m \rangle$$

como matriz de 3×3 .

- (b) Muestre que en el caso particular $j = 1$, es legítimo reemplazar $e^{-iJ_y\beta/\hbar}$ por

$$1 - i \left(\frac{J_y}{\hbar} \right) \sin \beta - \left(\frac{J_y}{\hbar} \right)^2 (1 - \cos \beta).$$

- (c) Usando (b) obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \cos \beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) \end{pmatrix}.$$

2. Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje y . Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en $m = 0, \pm 1$, y ± 2 .
3. Suponga que un átomo decae de un estado excitado a otro estado excitado (de corta vida), emitiendo un fotón en una dirección determinada. Este fotón sólo puede tener momento angular $\hat{L}_z = \pm \hbar$ (esto sería correcto, si por ejemplo se tratase de una transición $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$). Luego, el átomo vuelve a decaer emitiendo un segundo fotón que sólo puede tener $\hat{L}_z = \pm \hbar$, y en otra dirección que conforma un ángulo θ con la dirección del fotón anterior.
- (a) Calcular la probabilidad relativa de los diferentes ángulos θ
- (b) Calcular el cociente entre la probabilidad de encontrar los dos fotones con la misma polarización circular, a encontrar los dos fotones con distinta polarización
4. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3z) f(r).$$

- (a) ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
- (b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
- (c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E . Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

§<http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/momentoangular2>

5. (a) Evaluar

$$\sum_{m=-j}^j |d_{mm'}^{(j)}(\beta)|^2 m$$

para cualquier j (entero o semi-entero). Comprobar en particular la respuesta para $j = 1/2$, utilizando la tabla de matrices de rotación.

Ayuda: $e^{-\frac{i\hat{J}_y\beta}{\hbar}} \hat{J}_z e^{\frac{i\hat{J}_y\beta}{\hbar}} = \hat{J}_x \sin \beta + \hat{J}_z \cos \beta$

(b) Probar, para todo j ,

$$\sum_{m=-j}^j m^2 |d_{m'm}^{(j)}(\beta)|^2 = \frac{1}{2} j(j+1) \sin^2 \beta + m'^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1)$$