Problemas
Operadores contínuos - Representación $|r\rangle$ y $|p\rangle$ §

1. **Observables cuyo conmutador es $i\hbar$**

   1. Consideramos dos observables $\hat{Q}$ y $\hat{P}$ tal que
   $$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar.$$
   Definimos al operador
   $$\hat{S} = e^{-i\frac{\lambda\hat{P}}{\hbar}}.$$
      a) Demostrar que $\hat{S}$ es unitario
      b) Calcular $\hat{S}(-\lambda)$
      c) Mostrar que $\hat{Q}\hat{S}(\lambda) = \hat{S}(\lambda)[\hat{Q} + \lambda]$
      d) Mostrar que si $|q\rangle$ es un autovector (no nulo) de $\hat{Q}$, entonces $\hat{S}(\lambda)|q\rangle$ también lo es. Calcular su autovalor.
      e) Sea $|q\rangle = \hat{S}(q)|0>$, donde $|0\rangle$ es un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor 0. Mostrar que $\hat{S}(\lambda)|q\rangle = |q + \lambda\rangle$.
      f) Mostrar que $\langle q|\hat{S}(\lambda) = \langle q - \lambda|$

2. **Representaciones $|q\rangle$ y $|p\rangle$**

   1. Mostrar que $\langle q|\hat{Q}|\psi\rangle = q\psi(q)$
   2. Mostrar que $\langle q|\hat{S}(\lambda)|\psi\rangle = \psi(q - \lambda)$
   3. Calcular $\langle q|\hat{S}(-\epsilon)|\psi\rangle$ utilizando los resultados anteriores (es decir, aplicando la propiedad que $\hat{S}$ es una "traslación espacial"), y calcularlo también expandiendo el exponencial en primer orden. Linearizando la derivada, demostrar que $\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d\psi(q)}{dq}$

3. **Otra vez lo mismo**

   1. **Generador de traslaciones espaciales**
   Utilizamos la definición de momento como generador de traslaciones espaciales:
   $$\hat{\tau}(\Delta x') \equiv 1 - \frac{i\hat{p}\Delta x'}{\hbar}$$
   donde
   $$\hat{\tau}(\Delta x')|x'\rangle = |x' + \Delta x'\rangle$$
   y utlizando la expansión de Taylor
   $$\langle x' - \Delta x'| = \langle x'| - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|,$$
   demostrar que
   $$\langle x' \mid \hat{p} \mid \alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle \quad (1)$$
   $$\langle x' \mid \hat{p} \mid x''\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x' - x'') \quad (2)$$
   $$\langle \beta \mid \hat{p} \mid \alpha\rangle = \int dx' \psi^*_\beta(x') \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)\psi_\alpha(x') \quad (3)$$

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/operatorsrp

Utilizando la ecuación (1) hacemos

$$\langle x' \mid \hat{p} \mid p' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | p' \rangle = p' \langle x' | p' \rangle. \tag{4}$$

a) Resolver la ecuación diferencial (4) y dar la expresión para la representación del momento en x (o sea: encontrar $\langle x'|p'\rangle$).

b) Comparar la solución con la función que se obtiene resolviendo la ecuación de Schrödinger.

c) Con este formalismo, relacionar $\psi_\alpha(x')$ con $\phi_\alpha(p')$

2. **Otra forma de ver al generador de traslaciones**:

   a) Demostrar que $[\hat{x}, G(\hat{p})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p}$ (de aquí en mas escribiremos $\hat{p}$ en lugar de $\hat{p_x}$).

   b) Calcular $[\hat{x}, e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}}]$, donde a es un número con dimensiones de longitud.

   c) Usando el resultado anterior, demostrar que el estado

   $$e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} \mid x' \rangle$$

   es un autoestado del operador $\hat{x}$ con autovalor $(x' - a)$.

   d) Se le ocurre algún generador de otro tipo de traslaciones?

3. **Traslación en el espacio de los momentos**
   Vamos a repetir el ejercicio anterior, pero trabajando en el espacio de momentos. Para ello, las expresiones que se deben evaluar son:

   a) $\langle p' \mid \hat{x} \mid \alpha \rangle$

   b) $\langle \beta \mid \hat{x} \mid \alpha \rangle$

   c) $[\hat{p}, F(x)]$

   d) ¿Qué significa: $e^{\frac{iK\hat{x}'}{\hbar}} \mid p' \rangle$, donde K es un número con dimensiones de momento?

4. **Ecuación de Schrödinger en el espacio de los momentos**

   1. Escribir la ecuación de Schrödinger en el espacio de los momentos para el potencial $V(x) = V_0 \cos(bx)$
   2. Escribir la ecuación de Schrödinger en el espacio de los momentos para el potencial $V(x) = V(x + b)$
   3. Encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme $V(x) = -Fx$

5. **Problema**
   Algo parece estar mal en el procedimiento siguiente. Detectar el error, o de lo contrario **estamos en problemas**:

   $$\hat{x}|\psi(x)\rangle = |x\psi(x)\rangle \tag{5}$$
   $$\hat{x}|\psi(x)\rangle = x|\psi(x)\rangle. \tag{6}$$

   Esto ocurre entonces para cualquier función f de x:

   $$|xf(x)\rangle = x|f(x)\rangle \tag{7}$$

   y en particular, para el caso en que $f(x) = e^{i\frac{p}{\hbar}x}$. Por lo tanto:

   $$\hat{x}|e^{i\frac{p}{\hbar}x}\rangle = x|e^{i\frac{p}{\hbar}x}\rangle \tag{8}$$

   o sea, encontramos un conjunto de autofunciones (completo, ortonormal) simultáneas de $\hat{x}$ y de $\hat{p}$. O sea, $[\hat{x}, \hat{p}] = 0$!!