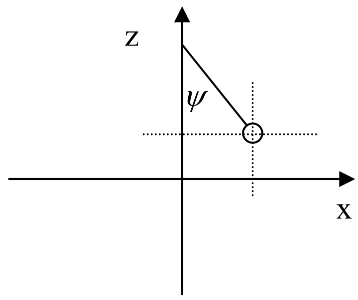
Guía 1

0)Encuentre la parte real, el módulo, la fase y el conjugado de

$z=\dfrac{1}{a+ib}$ $\quad z=\rho e^{i\phi}e^{iwt}$ $\quad z=e^{a+ib}$ $\quad z=e^{i\phi_1}+e^{i\phi_2}$

$z=Ae^{i\phi_1}+Be^{i\phi_2}$ con A, B, ρ y ϕ reales.

1) Escriba la ecuacion del pendulo usando como coordenadas:
a) x
b) z
c) ξ=senψ
Escriba la energia potencial y cinetica en dichas coordenadas.
Discuta cuales elecciones son razonables y cuales no, y porque.

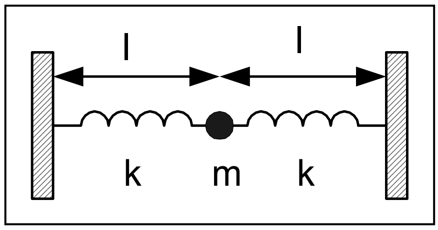


Prob 1…

2)- Resuelva el pendulo en pequeñas oscilaciones tomando como coordenada el ángulo entre el hilo y la horizontal (techo).

3) Demuestre que si ψ es una solución matemática compleja de la ecuación del oscilador armónico, su parte real tambien es solución.

4) Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento para los siguientes sistemas.
a) Péndulo de longitud **l** en un campo gravitatorio constante **g**. Discuta todas las aproximaciones realizadas. Demuestre que sin dichas aproximaciones la superposición lineal de dos soluciones no es solución (el sistema no es lineal)
b) Oscilaciones longitudianles del sistema de la figura para los dos casos límite: i) resorte poco estirado ii) resorte muy elongable (slinky).
c) Oscilaciones transversales del sistema de la figura nuevamente para los mismos dos casos límite. Analice cuidadosamente las aproximaciones realizadas y para el caso **i,** describa las diferencias entre resortes inicialmente elongados ($l>l_0$) y aquellos inicialmente relajados ($l=l_0$).
En todos los casos discuta el significado del límite cuando la constante restitutiva tiende a cero.
Compare las frecuencias de los modos longitudinales con los transversales.



5)-Resuelva el resorte vertical con un peso colgado usando como cero de coordenadas la del resorte en reposo sin peso. Escriba la energía potencial (gravitatoria mas elástica) y encuentre el equilibrio y la curvatura. Al oscilar, ¿la energía potencial es solo la del resorte o tambien oscila la potencial gravitatoria?

6)-calcule la tensión del hilo en función del ángulo para un péndulo en pequeñas oscilaciones. Discuta la validez de la hipótesis de longitud de hilo constante. De valores de orden de magnitud razonables a los parametros que necesite para la discusión. Discuta la validez de la aproximación g=constante.

7) Oscilador amortiguado. Si la condición inicial es $\psi=\psi_o$ y $\dot{\psi}=0$. Encuentre la solución a la ecuación de mivimiento y escriba cual es la energía inicial.

8)-se tiene un péndulo que oscila con una disipación tal que su amplitud se reduce un 10% cada 10 oscilaciones. Con que precisión deberíamos determinar su longitud para notar el corrimiento en su frecuencia debido al rozamiento?

9)-verifique que si ψ_1 *y* ψ_2 son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre, cualquier combinación lineal $\psi=A\psi_1+B\psi_2$ tambien es solución. Muestre que esto tambien vale si la fuerza disipativa es porporcional a la velocidad. Vale si es un rozamiento constante?

10) Para un péndulo con fuerza de disipación proporcional a la velocidad calcule el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento y compárelo con la pérdida de energia.

11)-Resuelva un oscilador armónico libre al que se le agrega una fuerza de rozamiento constante. Sugerencia: resuelva cada media oscilación agregando la fuerza que cambia la posición de equilibrio. Calcule el movimiento cada medio ciclo. Evalue como cambia la amplitud cada medio ciclo. Calcule como es esa amplitud máxima en función del número de oscilación y compárela con una fuerza disipativa proporcional a la velocidad.

12)-grafique las soluciones al oscilador amortiguado en el caso de amortiguamiento crítico y en el sobreamortiguado.

13)-a) resuelva de manera completa el oscilador forzado excitado en el pico de resonancia ($\omega = \omega_o$) con la condición inicial de estar en reposo en su posición de equilibrio.
b) simplifique la expresión para el caso en que $\gamma << \omega_o$ y gráfiquela para poner en evidencia como el sistema tiende a su solución estacionaria.

14) Construya un péndulo de torsión, mida sus parámetros relevantes y escriba la ecuación diferencial que describe su movimiento.

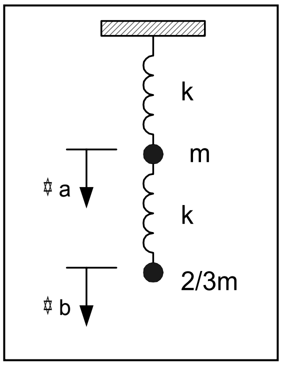
15) Discuta entre los distintos osciladores unidimensionales que se le ocurran factibles, cuál construiría para verificar las predicciones del modelo de oscilador armónico libre.

16) Repita el porblema 13 para el caso en que no se lo excita en el pico de resonancia. Resuelva y grafique en forma completa el caso de muy baja frecuencia.

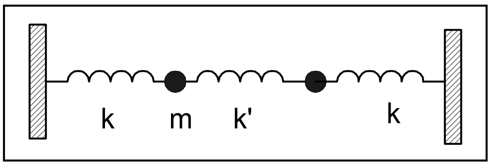
17) Resuelva el oscilador armónico sin pérdidas y muestre que cuando domina la solución elástica (lejos de la resonancia) la solución hallada aproxima adecuadamente a la que tiene en cuenta las pérdidas.

Nota general: en todos los problemas (de todas las materias), analice a priori qué puede predecir sin hacer cálculos y analice a posteriori qué podría haber predicho sin hacer cálculos. Si va achicando la diferencia entre ambos está aprendiendo los conceptos (o perdiendo capacidad de análisis).

Guía 2

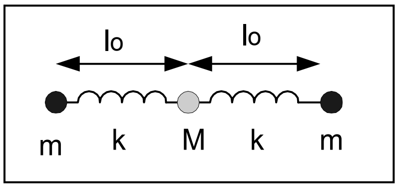


1.- a) Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad y obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
b) Sabiendo que en t=0 el sistema satisface las siguientes condiciones $\Psi_a(0)=1$ y $\Psi_b(0)=0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.
c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.



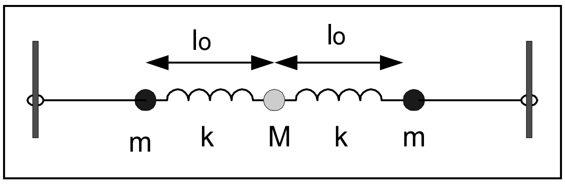
2.- Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k'. Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.
¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son batidos?

3.- Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa M=2m y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_o. Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales



a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.
b) Halle las frecuencias de los modos normales.
c) Dibuje las configuraciones de cada modo.
d) Si el centro de masa de la molécula se mueve con v_o=cte, halle la solución para $\Psi_a(t)$, $\Psi_b(t)$ y $\Psi_c(t)$.
e) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).,
f) Si se aplica a una de las masas una fuerza armónica, ¿a cuál conviene aplicarla para excitar más eficientemente el modo de mayor frecuencia?

4.- Se analizan las oscilaciones transversales del sistema de la figura.
a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas.
b) Halle las frecuencias de los modos normales.
c) Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal.
d) Si el centro de masa se encuentra en reposo, determine los desplazamientos de cada masa como función del tiempo.
e) ¿Qué condiciones iniciales que permiten excitar sólo el segundo modo?
f) Si se fuerza la masa del centro y se va variando la frecuencia, ¿qué modos se observan?
g) ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si el extremo de la derecha se fija a la pared?.

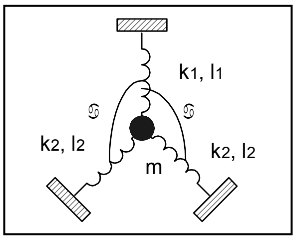


5) Escriba las ecuaciones de movimiento de las tres barras acopladas discutidas en la sección 2.3 en la base allí propuesta y demuestre que esas coordenadas quedan desacopladas.

6)-Considere un sistema similar al del caso de estudio 2.1, pero ahora con los extremos fijos a 20cm de cada barra.

a) Discuta cualitativamente a priori como espera que sean los modos normales, y como serán sus frecuencias comparadas con las del sistema con extremos libres.
b) Resuelva el problema analíticamente, suponiendo que hay pérdidas proporcionales a la velocidad de torsión que dominan los mecanismos de pérdidas. Discuta como se comparan las resonancias con el caso libre.
c) Si se fuerza uno de los péndulos de modo que oscile con una amplitud fija a una frecuencia fija, ¿cómo será el movimiento del otro péndulo?

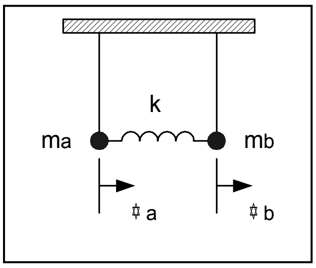
7)- Dado el sistema de la figura, supuesto en el equilibrio en las condiciones del dibujo, calcule sus frecuencias y modos normales,
a) cuando todos los resortes son slinkies
b) cuando las longitudes naturales de los resortes son menores que las graficadas.



8) Encuentre los modos normales de los osciladores acoplados en los dos casos discutidos de acoplamiento "débil" y “fuerte” y muestre solamente para el caso $\left|(\omega_1^2 - \omega_2^2)\right| >> \omega_{ac}^2$ los modos se parecen a los de los osciladores desacoplados.

9) En el caso de las barras acopladas con el resorte de torsión de; caso 2.1 se desea asimetrizar el sistema agregándole una pesa a una de las barras. ¿Cuán grande debe ser esa pesa para que el sistema se lo pueda considerar esencialmente desacoplado.

10).- Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b, acoplados mediante un resorte de constante k
a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa
-b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
c) Suponiendo que el acoplamiento es débil y que las condiciones iniciales son
$\Psi_a(0)=0$ y $\Psi_b(0)=1$ y las velocidades iniciales son cero.
Obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.
d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de las siguientes magnitudes T_a, T_b, V_a y V_b, donde T indica energía cinética y V energía potencial gravitatoria. Demuestre que bajo la hipótesis de acoplamiento débil



$<T_a>\sim<V_a>$ (<>=valor medio) y $<T_b>\sim<V_b>$.Grafique $<E_a>$ y $<E_b>$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas

($m_a=m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

Guía 3

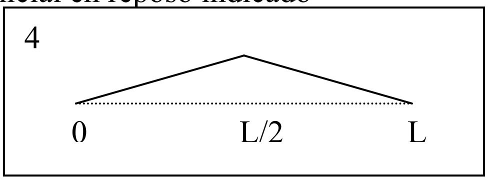
1) Una cuerda de longitud L fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Parte del reposo.
a- Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo. b- ¿Con qué período se repite el movimiento?
c- Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

2) Una cuerda de longitud L fija en un extremo y libre en el otro es lanzada a oscilar en sus modos 5 y 7 con igual amplitud, pero partiendo del reposo el modo 5 y de su máxima velocidad el modo 7. Repita los puntos del problema 1.

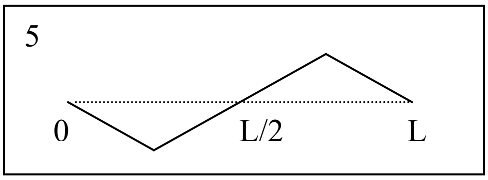
3) Mostrar que si ψ es solución de la ecuación de onda clásica, las funciones ϕ_1 ϕ_2 y ϕ_3 definidas abajo también lo son.

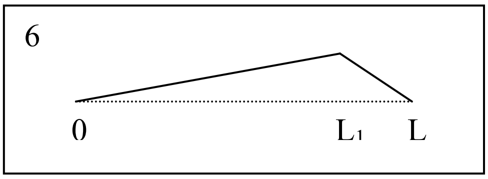
$$\phi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \phi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \phi_3 = \int \psi dt$$

4) Se suelta una cuerda fija en sus extremos desde el estado inicial en reposo indicado en la figura.
a- calcule la evolución en el tiempo.
b- ¿cuál es el modo excitado de mayor amplitud?
c- ¿qué modos no son excitados?



5) ¿Cómo cambia el problema anterior si el estado inicial es antisimétrico, como indica la figura?





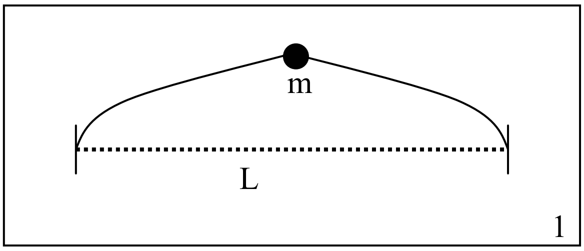
6) ¿Para qué valor de L_1 se maximiza la excitación del segundo modo?
¿Qué cambia musicalmente al cambiar L_1?

7) Se aplica una fuerza impulsiva sobre un 10% del largo de una cuerda fija en sus extremos. El impulso es suficientemente rápido como para asumir que la cuerda no se movió apreciablemente durante su aplicación.
a- ¿donde debe aplicarse el golpe para tener máxima amplitud en el quinto modo?
b- ¿y para tener máxima relación entre el quinto y el tercero?

8) Escriba la ecuación de onda para el caso del péndulo cuando la masa del hilo no es mucho menor que la del cuerpo suspendido. Para ello tenga en cuenta que la tensión varía a lo largo del hilo debido al peso del propio hilo. Muestre que las soluciones sinusoidales obtenidas para la cuerda ya no son solución. Discuta soluciones aproximadas.

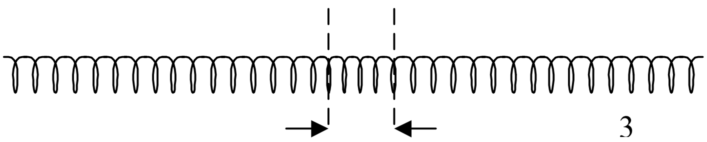
Guía 4

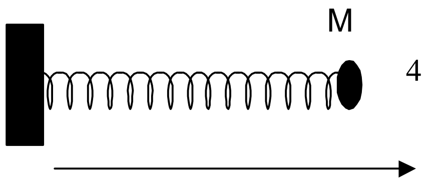
1) Encuentre los modos normales de la cuerda ilustrada en la figura, que está sujeta fija en sus extremos y tiene una masa sujetada en el centro.



2)Se establece una onda sonora estacionaria en el interior de un tubo de 1m de longitud y 5cm de diámetro. Si se la excita en el modo más bajo con una presión pico de 10^{-2}dinas/cm^2, calcule el desplazamiento pico y el cambio de densidad pico, así como la energía total contenida en la onda confinada en el tubo. Haga el cálculo para el tubo cerrado en ambos extremos y para el tubo abierto en un extremo. Compare ese desplazamiento con la distancia media entre moléculas en el aire. Nota: el ejemplo dado corresponde a un sonido apenas audible.

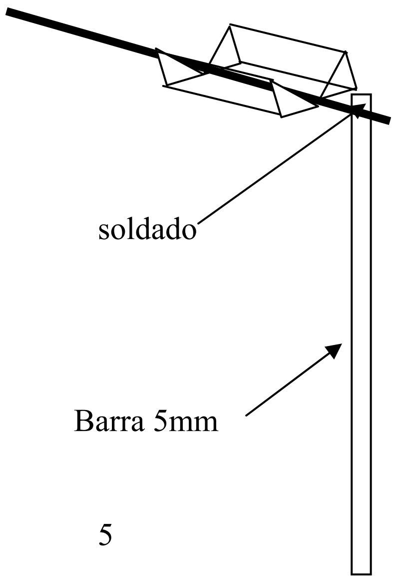
3) Un resorte con extremos libres es comprimido inicialmente un 5% en su 10% central y se lo suelta. Escriba las condiciones iniciales, halle su descomposición en modos normales y escriba la solución para todo tiempo. Demuestre que la solución es periódica (¿con qué periodo?) y dibuje (con ayuda de una computadora) la solución para 10 tiempos distintos dentro de un periodo. Discuta el resultado.





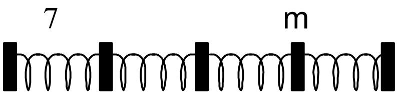
4) Un resorte apoyado horizontalmente sin rozamiento y fijo en un extremo, tiene una masa M sujeto en el otro extremo. Calcule los modos normales de oscilación longitudinal del resorte.

5) Una barra cuelga soldada a un alambre de torsión (similar al caso 2.1) con el otro extremo libre para girar. Encuentre los modos de torsión del alambre.
Repita el cálculo para el extremo del alambre fijo.



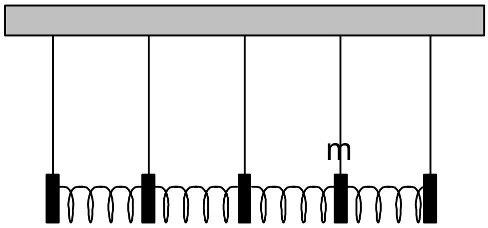
6) Utilizando el resultado anterior y consideraciones de simetría resuelva el caso 2.1 teniendo en cuenta las ondas de torsión que se propagan por el alambre. Compare los modos mas bajos con la solución hallada para el caso 2.1 en que se consideró como de dos grados de libertad.

7) Se tiene un sistema de masas acopladas por resortes. Halle la ecuación de ondas correspondiente a las oscilaciones longitudinales y transversales despreciando la masa de los resortes. Encuentre la relación de dispersión para este sistema y grafíquela.



8) Se tiene un sistema de péndulos acoplados longitudinalmente por resortes. Halle la ecuación de ondas correspondiente a las oscilaciones longitudinales y transversales despreciando la masa de los resortes. Encuentre la relación de dispersión para este sistema y grafíquela.

8



9) Para el problema anterior resuelva para el caso en que las $\omega<\omega_{min}$ o $\omega>\omega_{max}$. Para ello proponga una solución del tipo:

$$A_n = Ae^{\pm kan}$$

y encuentre la nueva relación entre ω y k.

Guía 5

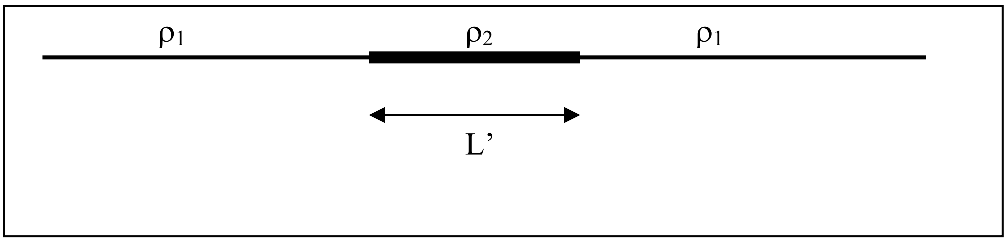
1.- demuestre que la onda sinusoidal propagante es solución de la ecuación de Klein-Gordon. Grafique la relación de dispersión. Indique como se determina en ese gráfico la velocidad de fase. Calcule analíticamente la velocidad de fase y grafíquela.

2.- Se tiene una cerda semi-infinita que se extiende hacia la izquierda. En x=L tiene su extremo. Una onda de amplitud A incide desde la izquierda. Calcule la expresión para la onda reflejada en este sistema de coordenadas. Repita el cálculo haciendo un cambio de variables de modo que el origen esté en el punto fijo, y vuelva a cambiar sobre el resultado al sistema original. Discuta como es la mecánica para este procedimiento.

3.- Repita el problema anterior para una cuerda que cambia su densidad en x=L. Calcule la onda reflejada y transmitida en ese sistema por los dos métodos.

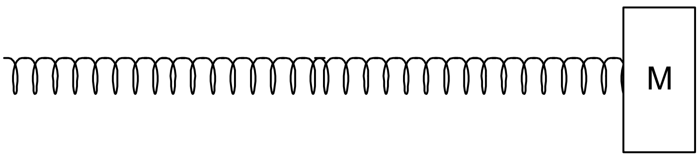
4.- Repita el problema anterior para el caso de una cuerda en la que se agrega una cuenta de masa m en x=L.

5.- Se tiene una cuerda de densidad lineal de masa ρ_1 sometida a una tensión T_0. A una distancia L del extremo la densidad lineal de la cuerda cambia abruptamente al valor ρ_2 y a una distancia L+L' del mismo extremo el valor de ρ vuelve a ser ρ_1. En esta cuerda se propaga una onda de la forma $A \cos(\omega t - k_1 z)$.

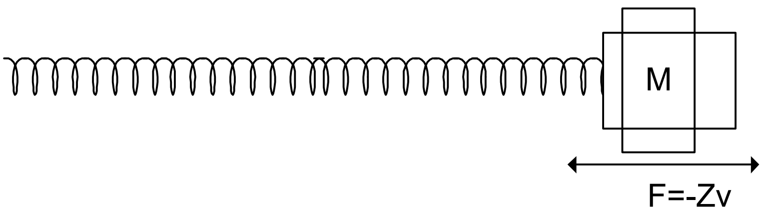


Escribir la forma de la función de onda (sin importar su amplitud) para las ondas transmitidas, y para los siguientes sistemas de referencia:
a) el origen de coordenadas en el extremo de la primer cuerda de densidad ρ_1.
b) el origen de coordenadas en el primer punto de cambio de ρ.
c) el origen de coordenadas en el segundo punto de cambio de ρ.

6.- Un resorte semi-infinito de constante distribuida K_i y densidad lineal ρ se extiende desde la izquierda hasta x=L. Termina en un cuerpo de masa M como uindica la figura. Encuentre el coeficiente de reflexión en función de la frecuencia y la masa M. Discuta el resultado.

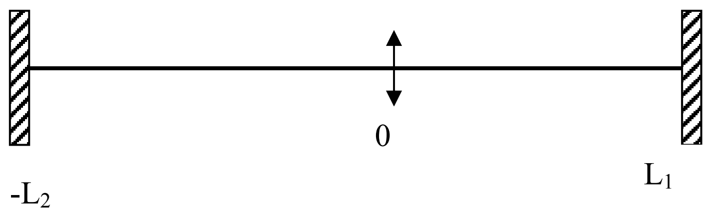


7.-Repita el problema anterior si la masa de terminación es remplazada por un amortiguador que ejerce una fuerza sobre el resorte oponiéndose al movimiento y proporcional a la velocidad



8.- Se tienen dos resortes semi-infinitos de distinta densidad lineal de masa (ρ_1 y ρ_2), y constantes K_{i1} y K_{i2} unidos en un punto.
a) conocida ρ_1 y K_{i1}calcule ρ_2 y K_{i2} para que a la onda reflejada le corresponda una amplitud que sea la mitad de la amplitud de la onda incidente. Considere los dos casos de incidencia posibles (desde la izquierda y desde la derecha).
b) Grafique los coeficientes de reflexión y de transmisión vs ρ_2 .
c) Vea que para cualquier recinto que incluya o no a la unión el flujo de energía que entra es igual al flujo de energía que sale.

9.- Se tiene el siguiente sistema, forzado en z=0, tal que $\psi(0,t) = A_o\ cos(\omega t)$ .No tenga en cuenta el rozamiento.
a) Calcule $\Psi(z,t)$.
b) Calcule la fuerza que hay que hacer en z=0 para que la cuerda se mueva de esta manera. Vea que es de la forma $f(t)=f_0\cos(\omega t)$. ¿Cuál es la relación entre A_0 y f_0? ¿Cómo es $\delta\Psi/\delta z$ en z=0? ¿En qué caso es continua?.
c) Si en vez de conocer el vínculo en z=0 ($\Psi(0,t)$) se conoce la fuerza que se realiza sobre la cuerda en ese punto, y se sabe que dicha fuerza es de la forma $f(t)=f_0\cos(\omega t)$, ¿cómo será el movimiento de la cuerda? (Use lo calculado en b)).
d) En t=0 se deja al sistema en libertad. Si la frecuencia de excitación era $\omega_1=3\pi v/4L$, calcule qué modos estarán excitados para t>0 y cuáles serán los más importantes. Dibuje $\Psi(z,0)$ y los modos más importantes. ¿Es cierto que al liberar al sistema éste



sigue oscilando con la frecuencia de excitación para t<0?

10.- Plantee el problema anterior en el caso en que se incluyen en la ecuación de ondas pérdidas proporcionales a la velocidad.

11.- Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión del sonido en las siguientes interfases: a) hierro-cobre, b) aluminio-plomo, c) aire-agua.

12.- Un tubo lleno de aire tiene un parlante en un extremo y el otro abierto. ¿Cómo son las condiciones de borde para calcular la amplitud de la onda sonora reflejada? ¿Y si el tubo está abierto?

Guía 6

1.- a) Determine cuáles de las siguientes expresiones matemáticas satisfacen la ecuación de ondas clásica:

i) $\Psi(z,t)= A \exp[-\lambda(ax-bt)^2]$, $\lambda \, \varepsilon \, \wedge$

ii) $\Psi(z,t)= A (z+vt)$

iii) $\Psi(z,t)= A \operatorname{sen}(az+bt)$

iv) $\Psi(z,t)= A \operatorname{sen}(ax^2-bt^2)$

b) Demueste que cualquier función de la forma $f(z\pm vt)$ es solución de la ecuación de ondas clásica.

2.- a) Demuestre que la suma de dos ondas armónicas que se propagan en la dirección +z: $A_1=\cos(\omega t-kz+\phi_1)$ y $A_2=\cos(\omega t-kz+\phi_2)$ y que tienen la misma frecuencia ω, es una onda armónica de propagación del mismo tipo. Esto es la suma puede escribirse en la forma $A=\cos(\omega t-kz+\phi)$. Encuentre cómo están relacionados A y ϕ con A_1, A_2, ϕ_1 y ϕ_2. Resuélvalo también en notación compleja y compare ambos resultados.

b) Calcule la superposición de dos ondas armónicas $A_1=\cos(\omega_1 t-k_1 z+\phi_1)$ y $A_2=\cos(\omega_2 t-k_2 z+\phi_2)$ que se propagan en la dirección +z. Sepárelas en una portadora a frecuencia promedio multiplicada por la envolvente. Verifique que si las frecuencias son iguales o las amplitudes lo son recupera resultados anteriores.

c) Encuentre el módulo al cuadrado de la envolvente y muestre que evoluciona en el tiempo o en el espacio siguiendo una elipse en el plano complejo. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos?.

d) ¿cómo se propaga la energía de esa superposición?

3.- Se superponen una onda de frecuencia ω_o de amplitud A con otras dos de frecuencias corridas en $\pm\Delta\omega$ de amplitud iguales B.

a) Calcule la envolvente de esta superposición en el origen.
b) Calcule la envolvente de la onda propagada suponiendo que $\Delta\omega \ll \omega_o$. Discuta que pasa si no vale esta aproximación.

4.- calcule la velocidad de fase y de grupo para la ecuación de Klein-Gordon.

5.- Se encuentra a partir de un modelo* que las ondas superficiales en un líquido satisfacen la siguiente relación de dispersión:

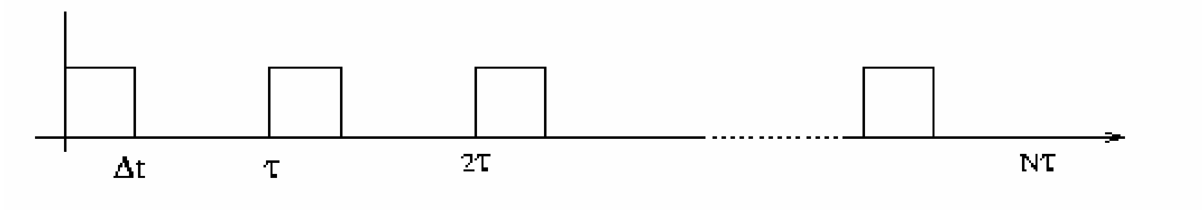
$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho} k^3 \right) \left[\frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}} \right]$$

donde g es la aceleración de la gravedad, T es la tensión superficial (aproximadamente 72dinas/cm para el agua), ρ es la densidad del líquido y h es la profundidad.

a) encuentre la relación de dispersión en el límite de aguas muy profundas ($h \gg \lambda$) y en el opuesto de aguas poco profundas. Discuta en que rango de frecuencias y profundidades vale cada aproximación.
b) Encuentre las velocidades de fase y de grupo en ambos límites.
c) Se realiza un experimento de propagación de ondas en que se golpea periódicamente la superficie del agua. Discuta que se observa en cada caso.

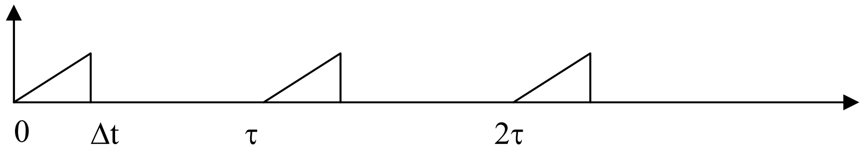
*ver libro Ondas de Crawford, cap. 7

6.- Calcule y grafique el módulo y la fase de C_n (coeficientes del desarrollo en serie de Fourier) de la función periódica:



Para: a) $\tau=T_1$ y $\Delta t=\tau_1$. b) $\tau=10T_1$ y $\Delta t=\tau_1$ .c) $\tau=100T_1$ y $\Delta t=\tau_1$. D) $\tau=10T_1$ y $\Delta t=\tau_1$.
Indique una estimación del ancho del espectro de frecuencias para cada caso.

7.- Repita el problema anterior para:



7.- Calcule como cambia C_n en los problemas anteriores (6 y 7) si se corre la función en una cantidad t_o hacia la derecha.

8.-¿Cómo cambia la función del tiempo si en los casos de los problemas 6 y 7 se agrega una fase lineal con la frecuencia $\phi(\omega)=\alpha\omega$ a cada componente $C_n(\omega_n)$?

9.- Si se toma la función de los problemas 6 y 7 como moduladoras o envolventes y se las multiplica por una portadora $\exp(i\omega_o t)$ (fase lineal con el tiempo),
a) ¿cómo quedan los nuevos coeficientes de la serie de Fourier. Hacer un gráfico cualitativo.
b) Si dicha perturbación se propaga a derecha con una relación de dispersión $\omega=ck$, hallar $\psi(t,z)$.
c) idem b, si $\omega=ak+b$. ¿A qué velocidad se propaga la portadora y a cuál la envolvente?

10.- Hallar la función del tiempo que tiene como coeficientes de Fourier $C_n= C$ (constante) para n=M hasta M+N (M>>N). Dar el valor de la frecuencia portadora. Estimar su ancho temporal
Repetir los puntos b y c del problema anterior.

11.- Demuestre la siguiente igualdad

$$\int_0 e^{inkx}\, e^{imkx}\, dx = \lambda\, \delta_{nm}$$

donde n y m son enteros distintos de cero y δ_{nm} es la delta de Krönecker.

12.- Grafique por medio de una computadora la moduladora resultante de superponer 11 ondas de igual amplitud equiespaciadas, si la portadora se toma como la frecuencia más baja, la más alta o la media. Discuta la relevancia de las diferencias y como dependen del ancho de banda relativo (relación entre $\Delta\omega$ y ϖ).

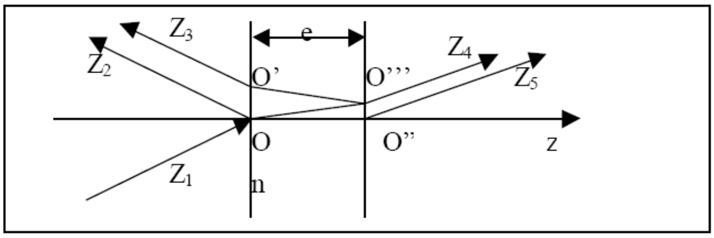
Guía 7

1.- a) Demostrar que para la ecuación de Klein-Gordon en tres dimensiones vale la relación de dispersión $\omega^2 = \omega_p^2 + v^2 k^2$

b) Hallar las frecuencias típicas del plasma de la ionosfera, de los semiconductores y de los metales. Indicar la región del espectro electromagnético a la que pertenecen. ¿Qué densidad de electrones haría falta para hacer un espejo para rayos X?

2.- Demostrar que f(**n.r** - ct) es solución de la ecuación de ondas clásica, donde **n** es un versor constante en la dirección de propagación de la onda.

3.- Una onda plana incide desde la derecha (aire) sobre una lámina de vidrio de espesor e, con un ángulo de incidencia γ. Demuestre que la onda transmitida se propaga con el mismo ángulo que la incidente.



Escriba la expresión para :

a) la onda incidente en el sistema de referencia con origen O y eje z; y con origen O y eje z
según z_1.

b) la onda reflejada, con origen O y eje z; y con origen O y eje z_2.

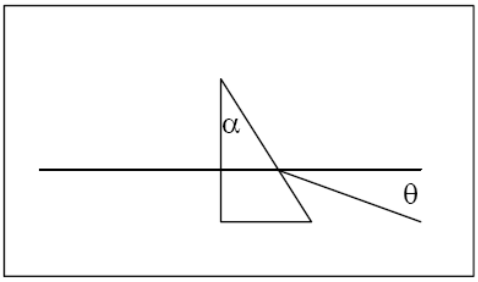
c) la onda transmitida dentro del material con origen O; con origen O" y con O'''.

d) la onda transmitida con origen O''' y eje z_4; con origen O" y ejes z_5 y con eje z.

e) la onda reflejada en la segunda cara y transmitida hacia atrás en la primera, con origen O'y eje z_3 y con origen O y eje z_2.

Analice los resultados y elabore una regla general sencilla para construir estas ondas.

4.- Una onda plana incide desde la derecha perpendicularmente a la cara del prisma de la figura. Encuentre:



a) El ángulo de desviación θ de la luz transmitida en función del índice de refracción y el ángulo α del prisma.

b) La dispersión del prisma (dθ/dλ). Estime dicho valor para algún material que encuentre en tablas o algún libro.

c)El ángulo a partir del cual toda la luz es reflejada (ángulo de refracción rasante). Este ángulo se denomina de reflexión total interna. Discuta para qué caso es posible la reflexión total externa.

5.- Demostrar que ψ(x,t) = (A/r) exp [i(kr-ωt)] satisface la ecuación de Klein-Gordon y la de las ondas electromagnéticas en medios transparentes.
Halle la relación de dispersión correspondiente.

6.- a) Considere el frente esférico generado por una fuente puntual que emite en una longitud de onda (λ) y que se encuentra a una distancia d del punto de observación. ¿Qué condiciones debe satisfacer ρ para que sea válida la aproximación paraxial?

b) Analice los siguientes casos: d = 100 μm; 1cm; lm; 100m y 10km, con λ perteneciente a: i) rango visible ii) microondas iii) onda corta iv) rayos X

7.- a) Defina qué se entiende por objetos e imágenes reales o virtuales. ¿Cómo se generan y cómo se detectan?.
b) Sea una fuente real a una distancia z_s de una lente de distancia focal imagen f'>0. Para $z_s > f$, $z_s=f$ y $z_s< f$, dibuje los frentes de onda incidentes y emergentes. Idem para $f' < 0$.
c) Idem b) pero para una fuente virtual.

8.- Escriba, en la aproximación paraxial, la expresión de una onda convergente a derecha a un punto P. Halle la expresión de la onda reflejada en un espejo esférico de radio R_1 en función de la distancia P-espejo. Discuta los distintos casos que se presentan.

9.- Halle la expresión de la onda transmitida cuando una onda esférica incide sobre una dioptra (también esférica).

10.- Halle las distancias focales para lentes: i) plano-cóncava, ii) plano-convexa, iii) bicóncava, iv) biconvexa, v) cóncava-convexa; en función del índice de refracción y de los radios de curvatura de las lentes, como así también de los índices de refracción de los medios externos. En un caso particular demuestre que el resultado es independiente del orden en que se iluminan las superficies.

11.- Una lente delgada convergente, de distancia focal 30cm, se coloca 20cm a la izquierda de otra lente delgada divergente de distancia focal 50cm. Para un objeto colocado a 40cm a la izquierda de la primera lente determine la imagen final. ¿Cuál es el aumento lateral del sistema?.¿La imagen es real o virtual, es directa o invertida?. Resuélvalo también geométricamente.

12.- a) Describa el microscopio simple (lupa) y recordando que el aumento de un instrumento se define como el cociente entre el ángulo con que se ve al objeto a través del instrumento y el ángulo con que se lo ve a ojo desnudo, calcule su aumento en los siguientes dos casos: i) imagen final en infinito, ii) imagen virtual a 25cm de la lupa.
b) Describa un microscopio compuesto, enumerando cada uno de los elementos que lo componen y la función que cumple cada uno de ellos. Indique también si en la práctica cada uno de estos elementos es un elemento simple o no. ¿Cómo se considera, a los efectos de resolución de esta guía, un microscopio compuesto?.

13.- Un microscopio consta de un objetivo de 4mm de distancia focal y de un ocular de 30mm de distancia focal. La distancia entre el foco imagen del objetivo y el foco objeto del ocular es g=18cm. Calcule: a) El aumento normal del microscopio, es decir el aumento cuando la imagen final está en el infinito. b) La distancia objeto-objetivo.

14.- Enumere los elementos básicos que componen un telescopio astronómico y los que componen un anteojo de Galileo, indique qué función cumple cada uno de ellos. Calcule el aumento de cada telescopio.

15.- Un anteojo astronómico utiliza como objetivo una lente convergente de 2m de distancia focal y 10cm de diámetro, y como ocular una lente convergente de 4cm de distancia focal. Determine: a) el aumento.
b) El tamaño de la primera imagen de la luna y el tamaño angular de la imagen final a través del telescopio. La luna subtiende, a ojo desnudo, un ángulo de 31'.

Guía 8

1) Una onda inicialmente polarizada según x y viajando según z positivo incide en un polarizador cuyo eje de trasmisión forma un ángulo A con el eje x, y luego pasa por un segundo polarizador que forma un ángulo B con el primero. ¿Cuál es la expresión de la onda transmitida en los ejes originales? ¿Y en los ejes del segundo polarizador?¿Cómo son las respectivas matrices que describen al sistema?
¿Cuál es la intensidad media transmitida por el sistema?

2) Se tiene un polarizador imperfecto con una matriz
$\begin{bmatrix} t_x & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta \end{bmatrix}$ con $t_x \approx 1$, $\varepsilon << 1$ y $\delta << 1$.

a) hallar la matriz del polarizador si forma un ángulo θ con el eje x.
b) Hallar la energía transmitida si se incide con luz linealmente polarizada según x.
c) idem b si incide polarizada según y.

3) Se tienen N polarizadores sucesivamente rotados en ángulos $\pi/(2N)$, encontrar la matriz del sistema. Hallar el límite para N tendiendo a $\propto$. Calcular la intensidad transmitida.

4) Una onda de polarización arbitraria incide sobre un espejo plano y se refleja sobre si misma. ¿Cómo escribe la onda reflejada cambiando al sistema z′=-z de modo que nuevamente se propague según z positivo. Note que al invertir z, debe invertir algún otro eje para mantener las orientaciones relativas de los ejes.
¿Cómo es ahora la matriz de un polarizador en este nuevo sistema? ¿y una lámina de onda?

5) Mostrar que el versor para una onda polarizada circularmente solo cambia en una fase ante una rotación de coordenadas. ¿Cuánto cambia la fase? Explique.

6) Encontrar la matriz de un polarizador seguido de una lámina de cuarto de onda orientada con su eje a un ángulo A respecto del eje del polarizador.
¿Cual es el estado de polarización de la onda transmitida? ¿Depende del estado de polarización de la incidente? Explique.
¿Calcule la intensidad transmitida en función de A.

7) Al sistema anterior se le agrega un espejo que refleja la onda sobre si misma. ¿Para qué ángulo A la transmisión del sistema a la vuelta es nula y para cuál es máxima?

8) Se realizan los siguientes experimentos: entre dos polarizadores rotados un ángulo A se colocan alternativamente un medio con actividad óptica que rota la polarización un ángulo B y un rotador de Faraday que también rota ese mismo ángulo.
Calcule para cada caso la transmisión del sistema y para que valor de B es máxima.
Para ese valor de B se refleja la luz nuevamente sobre el sistema. Calcule ahora la intensidad devuelta para cada caso. ¿En algún caso se puede hacer nula?

9) Se tiene un haz de luz y se quiere conocer su estado de polarización (el tipo de polarización y la orientación respecto de los ejes del laboratorio) realizando experimentos. Se cuenta con el siguiente material: un detector que mide intensidad de luz, un polarizador lineal con el eje de transmisión paralelo a la mesa óptica (la mesa sobre la que se trabaja), una lámina de media onda, y una lámina de cuarto de onda. Las dos últimas están montadas en soportes que permiten girarlas, y se conoce la ubicación de los ejes ordinarios. Describa un procedimiento experimental que contemple todos los casos que puedan presentarse.

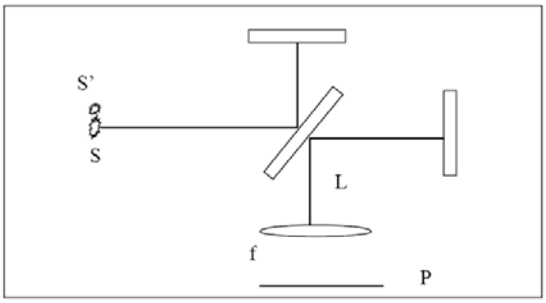
Guía 9

1) Dos ondas planas monocromáticas de igual frecuencia se propagan formando un ángulo α entre sus vectores de onda. Calcule la amplitud e intensidad media en una pantalla perpendicular a la bisectriz entre ambos vectores de onda.

2) Resuelva el problema anterior si las dos ondas son de frecuencia ligeramente diferentes.
Muestre que la figura de interferencia viaja a lo largo del plano y determine a que velocidad se mueve. Si se desea fotografiar la figura de interferencia, ¿que relación debe haber entre el tiempo de obturación y la diferencia entre ambas frecuencias? Si para este experimento se utilizan dos láseres distintos. ¿Qué longitud de coherencia deben tener como mínimo? ¿Con cuántas cifras debe estar definida la frecuencia para un caso típico de luz visible?

3) Una onda plana incide sobre una lámina de caras paralelas de vidrio de espesor d, con un ángulo de incidencia θ_i. Calcule la amplitud de la onda reflejada teniendo en cuenta solamente las dos reflexiones mas intensas. Calcule la amplitud de la onda transmitida teniendo en cuenta la que no sufre reflexiones y la que se refleja dos veces. Compare la pérdida de energía de la onda transmitida con la energía de la onda reflejada.

4) Se tienen dos fuentes puntuales que emiten en fase ubicadas a una distancia d entre ellas.
Calcule la figura de interferencia que se observa en una pantalla ubicada a una distancia L y perpendicular a la recta de unión entre las fuentes (L>>d). ¿Cómo es la figura en una pantalla paralela a la recta de unión y a una distancia L' de la misma (L'>>d)? ¿Cuántos máximos de interferencia aparecen en cada caso? ¿Como debe ser la longitud de coherencia para que todos ellos sean visibles?

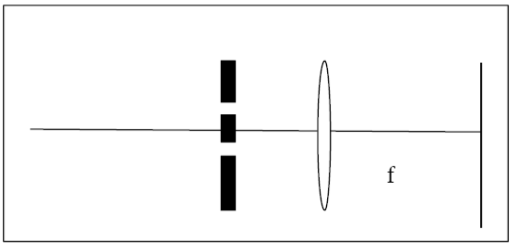


5) Un interferómetro de Michelson es iluminado por medio de una fuente puntual monocromática S. Calcule:
a) La posición de los máximos y mínimos en una pantalla ubicada a una distancia L del divisor de haz.
b) La posición de los máximos y mínimos en una pantalla ubicada a una distancia f de una lente de distancia focal f ubicada a una distancia L del divisor de haz.
c) Lo mismo que en a y b si se ubica otra fuente S'
d) Discuta como se observaría la figura si se ilumina con una fuente extensa. Explique porque esta configuración se denomina franjas de igual inclinación.
e) Indique la expresión de la intensidad que se mide con un detector que detecta el punto central, en función de la diferencia de distancias entre el divisor de haz y los dos espejos.

6) Un interferómetro de Michelson es iluminado por una fuente que emite en dos frecuencias. Calcule el valor medio de la intensidad de luz detectada. Muestre que cada frecuencia da una contribución sinusoidal con la distancia independiente de las otras frecuencias presentes, y que si multiplica la señal medida por $cos(\omega z/c)$ e integra según z puede recuperar la intensidad de la fuente a la frecuencia ω. ¿Cuán largo debe ser el barrido para que la otra frecuencia ω'no contribuya?. Calcule el caso particular de querer resolver el doblete del sodio.

7) Diseñe (si es posible) un experimento de Young a ser realizado por medio de un puntero laser, un papel de aluminio en que perforo dos aberturas muy próximas con un alfiler y observo a ojo desnudo. ¿Que ventajas tiene utilizar un biprisma de fresnel para realizar el mismo experimento?

8) Diseñe un experimento similar al de Young pero con dos fuentes sonoras y de modo que ambas orejas caigan dentro de un máximo de interferencia. ¿Porqué con sonido se pueden usar fuentes independientes?



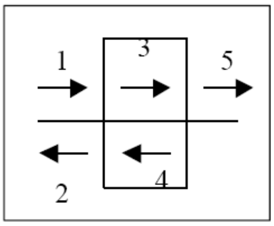
9)Se realiza un experimento de Young utilizando dos aberturas ubicadas a una distancia d y observando en una pantalla ubicada en el plano focal de una lente colocada delante de las ranuras. Discuta que se observa en cada uno de los siguientes casos:
a) Se ilumina las aberturas con una onda plana incidiendo sobre las ranuras con un ángulo α respecto del eje indicado y en el plano del dibujo.
b) Se ilumina por medio de una fuente puntual ubicada en el eje.
c) la fuente puntual es ubicada fuera del eje.
d) la fuente no es monocromática sino que tiene una longitud de coherencia de 10d.

10) Resuelva nuevamente el caso de la lámina de caras paralelas teniendo en cuenta ahora las infinitas reflexiones.

11) Se tienen N fuentes puntuales monocromáticas en línea equiespaciadas. Calcule las franjas de igual inclinación si se observa a lo largo del eje determinado por las fuentes. Calcule el ancho de las franjas claras y la separación entre ellas. ¿Qué se observa a lo largo del eje de las fuentes en función de la separación entre las fuentes? ¿Cómo cambia con el número de fuentes? Si las fuentes emiten en dos colores, ¿en qué condiciones quedan separados nítidamente los respectivos máximos?

12) Repita el problema anterior observando a lo largo de un eje perpendicular a las fuentes. ¿Qué se observa ahora que cambia con la separación entre fuentes y con el número de fuentes?

13) Compare la solución del interferómetro Fabry-Perot con la solución del problema 11. ¿En que se parecen y en que difieren? ¿Quien juega el papel de la distancia entre fuentes y cual es el número de fuentes equivalentes que da los mismos anchos característicos de los máximos?



14) Resuelva el problema de la lámina de caras paralelas con incidencia normal a las caras asumiendo una solución autoconsistente en vez de hacer una suma infinita: considere que dentro de la lámina hay una onda hacia la derecha Ψ_3 y otra hacia la izquierda Ψ_4 , que incide una onda de la izquierda Ψ_1 , se refleja una onda hacia la derecha Ψ_2 y se transmite una onda Ψ_5. Resuelva las incógnitas planteando las condiciones de borde (reflectividad y transmisión en cada cara).

Guía 10

1) Una ranura de ancho D es iluminada por una onda plana incidente perpendicularmente al plano de la ranura, observándose la figura de difracción en una pantalla ubicada a una distancia L.

a) ¿A qué distancia debe ubicarse la pantalla para que valga la aproximación de Fraunhofer?

b) Estime dichas distancias para ranuras de ancho 10μm, 100μm y 1mm, para luz visible.

c) ¿Para qué ranuras y distancias se cumplen condiciones equivalentes con ondas de sonido?

d) Para alguno de los casos anteriores calcule y grafique como cambia la distribución de intensidades si la onda incide con un ángulo de 10º respecto de la normal al plano de la ranura.

e) Idem d, si la ranura se ilumina con una fuente puntual ubicada a una distancia L'.

2) Delante de la ranura del problema anterior se ubica una lente de distancia focal f.

a) Calcule el perfil de intensidad en una pantalla plana ubicada en el plano focal de la lente.

b) Lo mismo si la onda incide con un ángulo de 10º.

c) Si inciden ambas ondas (a y b) ¿qué condiciones debe cumplir la lente para que las manchas respectivas queden nítidamente separadas?

d) ¿Con qué precisión debe ubicarse la pantalla en el plano focal para que valgan los resultados de los puntos anteriores?

3) Una fuente puntual está ubicada a una distancia s de una lente de distancia focal f.

a) Calcule la función de onda en el plano imagen.

b) calcule el perfil de intensidad. ¿Qué información se perdió al medir la intensidad?

4) Se tiene una onda monocromática de perfil Gaussiano que en z=0 tiene la forma:

$$\psi(x,y,t) = A e^{i\omega t}\, e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

a) Calcular en la aproximación paraxial (integral de Kirchhoff) la función de onda en un plano z=cte cualquiera.

b) Calcular el perfil de intensidad en dicho plano. ¿Qué información se pierde al medir la intensidad?

c) Con el dato de la función de onda en el plano z, calcule nuevamente la función de onda en un plano z' posterior. Notar como se recupera el ya calculado originalmente para todo z. ¿Porqué no puedo calcularlo si conozco solamente el perfil de intensidades?

5) En el plano z del problema anterior se ubica una lente.

a) Calcular la función de onda ahora en un plano a una distancia z' de la lente. Escriba la expresión integral y resuelva suponiendo la lente de diámetro mucho mayor que el haz Gaussiano. Discuta como cambia según la ubicación de la lente. ¿Como es el perfil de intensidades en el foco de la lente? ¿Para qué valor de z dicho perfil es mas angosto?

b) Para el problema anterior, encuentre la nueva cintura del haz (el plano de mínimo ancho espacial).

c) Discuta el caso particular en que z=f (lente ubicada con el foco en la cintura del haz)

d) ¿Como cambia el punto a si la lente tiene diámetro mucho menor que el diámetro característico del haz.

Guía 11

1) En una rendija de ancho D se ubican sucesivamente distintas diapositivas de transmisión t(x,y). Calcular para cada caso el perfil de intensidades en un plano ubicado suficientemente lejos como para que valga la aproximación de Fraunhofer. Discutir cualitativamente los resultados. Proponga para cada caso como construirlas.

a) $t(x,y)= \cos(\alpha x)$

b) $t(x,y)= \cos^2(\alpha x)$

c) $t(x,y)= e^{i\alpha x}$

d) $t(x,y)= \exp(-x^2/d^2)$ con $d<<D$

2) Con una onda plana se ilumina en forma normal una diapositiva de estructura periódica. Si se iluminan N períodos, calcular en la aproximación de Fraunhofer la amplitud y la intensidad en una pantalla ubicada a una distancia L de la diapositiva, para cada una de las siguientes transmisiones de las mismas:

a) $t(x)= \cos(K_0x)$

b) $t(x)= 1+\cos(K_0x)$

c) $t(x)= 1+\mathrm{sen}(K_0x)$

d) $t(x)= 1+\cos(K_0x)+ \mathrm{sen}(2K_0x)$

Discutir las similitudes, diferencias y algún sistema sencillo para generarlas.

3) N ranuras de ancho a y separación b son iluminadas uniformemente. Calcular la figura de difracción en el campo lejano. Discutir como cambia el patrón de intensidades si se cambia el ángulo con que se incide sobre la red. ¿Qué pasa si inciden dos longitudes de onda distintas, y en qué casos se distinguen los dos máximos?

4) Para los dos ejercicios anteriores de ejemplos alternativos de redes que den el mismo patrón de intensidad.

5) ¿Como cambian las figuras de difracción si en los ejercicios 2 y 3 se ilumina con un haz Gaussiano?

¿Qué es propio de la forma de iluminar, qué de la periodicidad de la transparencia y qué de la forma particular que se repite periódicamente?

6) Repita los ejercicios anteriores (2-5) para el caso en que se intercala una lente después de la red. ¿Y si se intercala antes?

7) Un espejo tiene una superficie ondulada de modo que la fase de la onda reflejada varía según $\phi=\delta \cos(K_0x)$. Si $\delta<<1$, calcule la onda difractada en la reflexión.

8) Se tiene una estructura periódica con una transmisión

$t(x,y)= [1+\cos(K_1x)]\ \{1+\cos(K_2y)]$

calcular el perfil de intensidades difractado en la aproximación de campo lejano.

9) Calcular la dirección en que aparecen los máximos en una estructura bidimensional en que $\vec{a} = \frac{\lambda}{3}\hat{x}$ y $\vec{b} = \frac{\lambda}{5}\hat{y}$.