Teoría del electrón de Dirac

Física Contemporanea

1. Ecuación de Dirac

La mecánica cuántica descripta por la ecuación de Schrödinger resulta incompatible con la teoría de la relatividad espacial. Consideremos la ecuación de Schrödinger para un electrón en un campo electromagnético:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\,\psi \tag{1}$$

donde

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\,\vec{A}\right)^2 - e\phi(\vec{r}) \qquad (e > 0) \tag{2}$$

y

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\,\nabla$$

Esta ecuación no es invariante ante transformaciones de Lorentz, como es evidente si analizamos el caso de una partícula libre $H = p^2/2m$. Este capítulo trata entonces acerca del desarrollo de una teoría cuántica relativista para el electrón, la cual fue llevada a cabo exitósamente por P. Dirac en 1928.

1.1. Cuantización

Comencemos con una partícula libre. La idea de Dirac fue aplicar las reglas de cuantización canónicas, esto es, reemplazar variables clásicas por operadores de acuerdo con $E \to i\hbar\partial/\partial t$ y $\vec{p} \to -i\hbar\nabla$, a la expresión relativista para la energía:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}. \tag{3}$$

Un primer intento podría ser la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m^2c^4 - (\hbar c)^2\nabla^2}\;\psi; \tag{4}$$

Inmediatamente nos encontramos con el problema de interpretar el operador raiz cuadrada en el lado derecho de la ecuación. Si desarrollamos la raiz obtendremos una ecuación que contiene todas las potencias del operador gradiente y por lo tanto una teoría no local.

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

de donde obtenemos la ecuación de ondas

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi \tag{5}$$

que se conoce como ecuación de Klein-Gordon. Si bien en la actualidad se utiliza como modelo para ciertas partículas elementales, las soluciones de esta ecuación presentan ciertas dificultades conceptuales, por lo cual fue desconsiderada en la época como modelo para el electrón.

Dirac decide entonces mantener la derivada primera temporal, asi como derivadas primeras espaciales. Esto es, utilizar la ecuación (1), con una expresión para el Hamiltoniano tal que "elevada al cuadrado" reproduzca $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$. La propuesta es entonces

$$H = \alpha_0 mc^2 + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j c\, p_j \tag{6}$$

donde $p_j = -i\hbar\partial/\partial x_j$, a la cual vamos a exigir que

$$H^2 = (mc^2)^2 + \sum_{j=1}^{3} (c\, p_j)^2$$

Los coeficientes α_μ evidentemente no pueden ser simples números, ya que igualando cuadrados obtenemos los condiciones

$$\alpha_\mu^2 = 1 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{7}$$

$$\alpha_\mu\, \alpha_\nu + \alpha_\nu\, \alpha_\mu = 0 \qquad \mu \neq \nu \tag{8}$$

Si definimos el *anticonmutador* entre dos operadores A y B como

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

podemos resumir las Ecs.(7) y (8) como

$$\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\} = 2\delta_{\mu,\nu} \tag{9}$$

Así, los coeficientes α_μ tienen que ser operadores independientes y hermitianos (para que H sea hermitiano) que anticonmutan entre sí. Dichos operadores estarán representados por matrices de dimensión $n \times n$ y por lo tanto ψ no será un escalar, sinó un vector de n dimensiones:

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \psi_n(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

al cual llamaremos *espinor*, por motivos que quedarán claros mas adelante.

¿Cuanto vale n? De las Ecs.(7) y (8) es facil deducir que Tr $\alpha_\mu = 0$, mientras que de la Ec.(7) se deduce que los autovalores de los operadores α_μ solo pueden tomar los valores ± 1. Ambas propiedades nos dicen que n tiene que ser par. Para $n = 2$ tenemos las matrices de Pauli, que satisfacen las relaciones de anticonmutación (9). No obstante, necesitamos cuatro matrices linealmente independientes y sabemos que las matrices de Pauli, junto con la identidad, conforman una base del espacio de matrices complejas con $n = 2$. Así, $n \geq 4$. Puede demostrartse que para $n = 4$ existen muchas representaciones posibles para estas matrices. Una de las representaciones mas usada es la llamada representación de Dirac, en la cual se eligen:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times 2} \end{pmatrix} \qquad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, 3 \tag{10}$$

donde σ_j son las matrices de Pauli. Con esta elección, el operador

$$H = mc^2\alpha_0 - i\hbar c\, \vec{\alpha}.\nabla, \tag{11}$$

donde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, ó

$$H = mc^2\alpha_0 + c\, \vec{\alpha}.\vec{p} \tag{12}$$

se conoce como *Hamiltoniano de Dirac* y la ecuación asociada $i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$ como *ecuación de Dirac*. En preencia de un campo electromagnético tendremos que

$$H = mc^2\alpha_0 - e\phi(\vec{r})I_{4\times 4} + c\,\vec{\alpha}.(\vec{p} + e\vec{A}) \tag{13}$$

donde

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Vamos a demandar de la ecuación de Dirac que: a) mantenga la interpretación probabilistica de la mecánica cuántica; b) que reproduzca la ecuación de Schrödinger en el límite no relativista y c) que sea invariante ante transformaciones de Lorentz.

1.2. Ecuación de continuidad

Sea

$$\psi^\dagger = \psi^{*T} = (\psi_1^*, \ldots, \psi_4^*) \tag{14}$$

Si multiplicamos la ecuación de Dirac a izquierda por $\psi^\dagger$ obtenemos

$$i\hbar\,\psi^\dagger \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\,\psi^\dagger(\vec{\alpha}.\nabla\psi) + \psi^\dagger\left[mc^2\alpha_0 - e\phi(\vec{r})I_{4\times 4} + ce\,\vec{\alpha}.\vec{A}\right]\psi \tag{15}$$

Si tomamos el conjugado hermitiano de la ecuación de Dirac y la multiplicamos por ψ a derecha obtenemos

$$-i\hbar\,\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i}\,(\nabla\psi^\dagger.\vec{\alpha})\psi + \psi^\dagger\left[mc^2\alpha_0 - e\phi(\vec{r})I_{4\times 4} + ce\,\vec{\alpha}.\vec{A}\right]\psi \tag{16}$$

donde hemos usado que $\alpha_\mu^\dagger = \alpha_\mu$. Restando las Ecs.(15)-(16) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) + c\nabla.\left(\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi\right) = 0 \tag{17}$$

ó

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + c\nabla.\vec{J} = 0 \tag{18}$$

donde

$$\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_{\sigma=1}^{4}\psi_\sigma^*\psi_\sigma$$

$$J_k = c\psi^\dagger\alpha_k\psi$$

Integrando la Ec.(18) en todo el espacio y usando el teorema de la divergencia, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\;\psi^\dagger\psi = 0$$

Estas propiedades nos muestran que resulta consistente interpretar ρ como una densidad de probabilidad y $\vec{J}$ como una corriente de probabilidad.

1.3. Límite no relativista

Al igual que en el caso de la ecuación de Schrödinger, las soluciones de la ecuación de Dirac tienen la forma

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{r})$$

con

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Para una partícula libre clásica, el límite no relativista se obtiene para $p \ll mc$, en cuyo caso

$$\sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Para la ecuación de Dirac vamos a expresar los autovalores de la energía como

$$E = mc^2 + E'$$

El límite no relativista va a corresponder entonces a $E' \ll mc^2$. Definimos

$$\psi'(\vec{r},t) = e^{-iE't/\hbar}\psi(\vec{r}) \tag{19}$$

de manera que

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-imc^2t/\hbar}\psi'(\vec{r},t). \tag{20}$$

Tenemos

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = H'\,\psi' \tag{21}$$

donde

$$H' = H - mc^2\, I_{4\times 4} \tag{22}$$

y

$$H'\psi(\vec{r}) = E'\psi(\vec{r}).$$

Consideremos ahora un electrón en un campo externo, esto es

$$H' = c\vec{\alpha}.\vec{\pi} - e\phi\, I_{4\times 4} + mc^2(\alpha_0 - I_{4\times 4}) \tag{23}$$

donde $\vec{\pi} \equiv \vec{p} + e\vec{A}$ y

$$\alpha_0 - I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

Vamos a expresar

$$\psi' = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

es decir

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix}$$

Utilizando la representación (10) la ecuación de Dirac nos queda

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\,\vec{\sigma}.\vec{\pi}\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\end{pmatrix} - e\phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix} \tag{24}$$

esto es,

$$i\hbar\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\vec{\sigma}.\vec{\pi}\,\chi - e\phi\,\varphi \tag{25}$$

$$i\hbar\,\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\,\vec{\sigma}.\vec{\pi}\,\varphi - e\phi\,\chi - 2mc^2\,\chi \tag{26}$$

Tomando en cuenta que

$$i\hbar\,\frac{\partial\chi}{\partial t} = E'\chi$$

de la Ec.(26) que

$$\chi(2mc^2 + E' + e\phi) = c\,\vec{\sigma}.\vec{\pi}\,\varphi,$$

y en el límite no relativista

$$\chi \approx \frac{1}{2mc}\vec{\sigma}.\vec{\pi}\,\varphi. \tag{27}$$

Reemplazando esta última en la Ec.(25) tenemos

$$i\hbar\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\,(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi}) - e\phi\right]\varphi \tag{28}$$

Usando la identidad

$$(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b}) = \vec{a}.\vec{b} + i\vec{\sigma}.(\vec{a}\times\vec{b}), \tag{29}$$

donde $\vec{a}$ i $\vec{b}$ son vectores arbitrarios, tenemos que

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi}) &= \vec{\pi}^2 + i\vec{\sigma}.(\vec{\pi}\times\vec{\pi})\\ &= \vec{\pi}^2 + e\hbar\vec{\sigma}.\vec{B}\end{aligned} \tag{30}$$

y reemplazando en la Ec.(28) obtenemos finalmente

$$i\hbar\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\,(\vec{p} + e\vec{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B} - e\phi\right]\varphi \tag{31}$$

La Ec.(31) es precisamente la ecuación de Pauli. A diferencia de la teoría de Pauli, donde estas cantidades se incluyen ad hoc, el spin aparece naturalmente en la teoría relativista, incluyendo el valor correcto del momento magnético electrónico

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m}\,\vec{\sigma},$$

correspondiente a una razón giromagnética $g = 2$.

1.4. Covariancia, rotaciones y spin

La relatividad especial nos exige que, dados dos oservadores O y O' ubicados en diferentes referenciales inerciales describan el mismo evento físico con coordenadas espacio-temporales x y x' respectivamente. Ambas coordenadas están relacionadas a través de una transformacion de Lorentz $x' = ax$, o bien

$$x'^{\nu} = a^{\nu}_{\mu} x^{\mu}; \tag{32}$$

a es lineal y homogenea, y los coeficientes a^{ν}_{μ} dependen solo de las velocidades y orientaciones relativas de ambos referenciales, de tal manera que mantienen invariante el elemento de linea

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

donde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

es el tensor métrico y $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. La invariancia del elemento de linea implica la relación

$$a^{\nu}_{\mu} a^{\mu}_{\sigma} = \delta^{\nu}_{\sigma} \tag{34}$$

Consideremos ahora la Ec. de Dirac para una partícula libre correspondiente al Hamiltoniano(11). Multiplicando la misma por α_0/c y usando que $\alpha_0^2 = 1$ obtenemos

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi - mc\psi = 0 \tag{35}$$

donde hemos definido

$$\gamma^0 \equiv \alpha_0 \qquad \gamma^{\nu} \equiv \alpha_0 \alpha_{\nu} \qquad \nu = 1, 2, 3 \tag{36}$$

que se conocen como *matrices de Dirac*.

De las relaciones de anticonmutación (9) se deduce que las matrices de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} I_{4\times 4} \tag{37}$$

De su definición es claro que las matrices γ^{ν} con $\nu = 1, 2, 3$ son antihermitianas con $(\gamma^{\nu})^2 = -1$ y γ^0 obviamente es hermitiana. En la representación (10) estas toman la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times 2} \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, 3 \tag{38}$$

La ecuación de Dirac para una partícula libre puede ser entonces escrita de manera compacta como

$$\left(i\hbar \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc \right) \psi = 0 \tag{39}$$

A fin de corroborar la covariancia de la ecuación de Dirac, debemos comprobar dos requisitos. Primero, debe haber una prescripción explícita que, dada la "función de onda" $\psi(x)$ medida por el observador O, permita calcular la función de onda $\psi'(x')$ que describe para O' el mismo estado físico. En otras palabras, necesitamos saber como se transforman los objetos ψ. Segundo, $\psi'(x')$ tiene que ser solución de una ecuación que adopta la forma (39) en el sistema primado, esto es

$$\left(i\hbar \gamma'^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - mc \right) \psi'(x') = 0 \tag{40}$$

donde las matrices γ'^{μ} tienen que ser también matrices de Dirac.

Vamos a asumir que la relación entre $\psi'(x')$ y $\psi(x)$ es lineal, ya que tanto la ecuación de Dirac como las tranformaciones de Lorentz lo son, esto es $\psi'(x') = S(a)\psi(x)$. Mas aún, vamos a asumir que S tiene inversa tal que $S^{-1}(a) = S(a^{-1})$. Así, podemos escribir la Ec.(39) como

$$\left(i\hbar S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc\right)\psi'(x') = 0. \tag{41}$$

De (32) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = a^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}$$

y así

$$\left(i\hbar S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)a^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - mc\right)\psi'(x') = 0. \tag{42}$$

La ecuación (42) es igual a la (40) siempre que exista una transformación S tal que

$$S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)a^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\nu} \tag{43}$$

o bien usando la Ec.(34)

$$S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a) = a^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{44}$$

Teorema de Pauli: Dados dos conjuntos de matrices de Dirac $\{\gamma^{\mu}\}$ y $\{\hat{\gamma}^{\mu}\}$ **existe** una matriz no singular S que las conecta: $S\,\gamma^{\mu}\,S^{-1} = \hat{\gamma}^{\mu}$.

Por otra parte, resulta evidente que $a^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}$ son también matrices de Dirac (satisfacen las relaciones de conmutación), con lo cual queda demostrada la coveriancia de la ecuación de Dirac, en tanto la función de onda se transforme como $\psi'(x') = S\psi(x)$, donde S viene dada por la Ec.(44). La manera de determinar S es considerar transformaciones de Lorentz infinitesimales

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon\lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$$

esto es,

$$a^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon\lambda^{\mu}_{\nu}.$$

De la Ec.(34) se deduce que los coeficientes λ^{μ}_{ν} son antisimetricos: $\lambda^{\mu}_{\nu} = -\lambda^{\nu}_{\mu}$. Si asumimos

$$S = I_{4\times 4} + \epsilon T,$$

reemplazando en la Ec.(44) y desarrollando a $\mathcal{O}(\epsilon)$ obtenemos la ecuación para el operador T:

$$\gamma^{\mu}T - T\gamma^{\mu} = \lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} \tag{45}$$

Utilizando las relaciones de conmutación (37) y la antisimetria de los coeficientes λ^{μ}_{ν} se demuestra que una solución de la Ec.(45) es

$$T = \frac{1}{8}\lambda^{\mu\nu}\,[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \tag{46}$$

Tomemos por ejemplo las rotaciones en R^3. Supongamos por simplicidad una rotación un ángulo θ alrededor del eje z:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para un ángulo infinitesimal ϵ tenemos entonces que

$$\lambda_2^1 = -\lambda_1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda^{12} = -\lambda^{21} = -1$$

y todos los demas coeficientes se anulan. Usando además que $\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_2\gamma_1$ tenemos que

$$T = -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 = -\frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

De esta manera,

$$S = I + \frac{i\epsilon}{2}\Sigma^3$$

donde

$$\Sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

es el generador de rotaciones infinitesimales alrededor del eje z. Para una rotación un ángulo finito finito θ tendremos

$$S = e^{i\theta\Sigma^3/2}$$

El mismo resultado se obtiene para rotaciones alrededor de los otros dos ejes, de manera que

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{47}$$

es el generador de rotaciones infinitesimales alrededor de un eje arbitrario. El operdor $\vec{\Sigma}$ tiene autovalores ± 1. Vemos así que los estados ψ resultan ser efectivamente espinores de 4 dimensiones, esto es, objetos que resultan invariantes ante una rotación en un ángulo 4π, pero cambian de signo ante una rotación un ángulo de 2π.

Por otra parte, si analizamos el conmutador del operador momento angular $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ con el Hamiltoniano de Dirac para una partícula libre

$$H = mc^2\alpha_0 + c\,\vec{\alpha}.\vec{p}$$

es facil ver que

$$\left[\vec{L}, H\right] = i\hbar c\,\vec{\alpha}\times\vec{p},$$

lo cual nos dice que, a menos que la partícula está en reposo $p = 0$, el momento angular orbital no se conserva. Sin embargo, el Hamiltoniano es invariante ante rotaciones (partícula libre). Esto nos dice nos esta faltando considerar otro momento angular. Es facil ver que

$$\frac{\hbar}{2}\left[\vec{\Sigma}, H\right] = -i\hbar c\,\vec{\alpha}\times\vec{p},$$

de tal manera que

$$\left[\vec{J}, H\right] = 0$$

donde

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\,\vec{\Sigma} \tag{48}$$

es el momento angular total y $\vec{S} = \hbar\vec{\Sigma}/2$ se identifica con el operador de spin, esto es, el momento angular en un referencial en el cual la partícula esta en reposo. Notemos que, a diferencia del caso no relativista, para una partícula relativista los momentos angulares orbital y de spin no se conservan por separado, a menos que la partícula esté en reposo. Esto significa que los autoestados del Hamiltoniano no serán en general autoestados del spin. Sin embargo, puede obtenerse un buen número cuántico si consideramos la proyección del spin en la dirección de movimiento. Definimos el operador dirección de movimiento como

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{p}$$

y la *helicidad* Λ como

$$\Lambda = \vec{S}.\vec{n}.$$

Notando que

$$\Lambda = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}.\vec{n} = \left(\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{r}\times\vec{p}\right).\frac{\vec{p}}{p} = \vec{J}.\vec{n}$$

y por lo tanto

$$[H, \Lambda] = 0.$$

La helicidad se conserva y los autoestados del Hamiltoniano pueden ser a la vez autoestados de Λ.

1.5. Soluciones de partícula libre

Vamos a considerar soluciones de la forma

$$\psi = w\varphi(\vec{r})$$

donde w es un vector columna de 4 componentes independientes de $\vec{r}$ y vamos a considerar ondas planas $\varphi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}}$. Tomemos el caso de una onda en la dirección z: $\vec{k} = k\,\vec{e}_z$. Tenemos que $\vec{p}\varphi(\vec{r}) = \hbar k\varphi(\vec{r})\,\vec{e}_z$ y la ecuación de autovalores $H\psi = E\psi$ toma la forma

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & \hbar kc & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -\hbar kc \\ \hbar kc & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -\hbar kc & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} w(k) = Ew(k) \tag{49}$$

Resulta evidente que los autovectores de esta ecuación tendrán la estructura

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{pmatrix};$$

reemplazando en la Ec.(49) obtenemos

$$\begin{pmatrix} mc^2 & \hbar kc \\ \hbar kc & mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\begin{pmatrix} mc^2 & -\hbar kc \\ -\hbar kc & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Ambas ecuaciones tienen los mismos autovalores:

$$E = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (\hbar ck)^2}$$

de tal manera que $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ $(p = \hbar k)$, tal como era de esperar. Los autovectores correspondientes al autovalor de energía positiva son

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + (\hbar kc)^2}} \begin{pmatrix} \hbar kc \\ 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + (\hbar kc)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \hbar kc \\ 0 \\ -\epsilon \end{pmatrix}$$

y los autovectores correspondientes al autovalor de energía negativa son

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + (\hbar kc)^2}} \begin{pmatrix} -\epsilon \\ 0 \\ \hbar kc \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_4 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + (\hbar kc)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 0 \\ \hbar kc \end{pmatrix}$$

donde $\epsilon = |E| - mc^2$. Claramente estos son todos autoestados de $\Lambda(\hbar\Sigma^3/2$ en este caso), donde w_1 y w_3 tienen helicidad positiva (autovalor $\lambda = \hbar/2$) y w_2 y w_4 tienen helicidad negativa (autovalor $\lambda = -\hbar/2$).

La existencia de un espectro no acotado de energías negativas constituye un problema serio para la teoría de Dirac. En particular, esto implica la inestabilidad de cualquier átomo, ya que ante la interacción con el campo de radiación, un electrón tendría a su disposición un número infinito de estados con menor energía a los cuales transigir. Para solucionar este problema, Dirac propuso en 1930 una reinterpretación de la teoría que se conoce como "teoría de huecos". En analogía a lo que ocurre en semiconductores, el espectro de partícula libre presenta un gap de ancho $2mc^2$, entre las "bandas" infinitas de estdos con energías positivas y negativas. Dirac propuso entonces que la banda de energías negativas se encontraría totalmente ocupada, constituyendo lo que se conoce como "mar de Dirac", en analogía al "mar de Fermi". De esta manera, por el principio de exclusión de Pauli, los electrones con energías positivas no podrían transigir a los estados de energía negativa. No obstante, esta interpretación implica la existencia de un nuevo fenómeno. Debido a la interacción con el campo de radiación, un electrón en el mar de Dirac puede ser excitado a un estado de energía positiva $+E > mc^2$. Pero esto involucra la creación de un "hueco" en el mar de Dirac, lo cual equivale a la creación de una partícula de carga positiva e y con energía $+E$. De esta manera, deberíamos poder observar la transformación de un fotón en un par de partículas de carga opuesta y también el proceso opuesto: un par de partículas de carga opuesta que se aniquilan con la consiguiente aparición de un fotón. Esta partícula de carga positiva, el *positrón*, fue observada en 1932 por Carl Anderson. Si aceptamos que la ecuación de Dirac describe el comportamiento de cualquier fermión, para cada partícula existirá una antipartícula. Esta fue la primera evidencia de la existencia de antimateria.

Bibliografía

- *Relativistic Quantum Mechanics*, J. D. Bjorken and S. D. Drell, McGraw-Hill (1964).
- *Quantum Field Theory*, F. Mandl and G. Shaw, John Wiley and Sons (1986).
- *An introduction to the Standard Model of Particle Physics*, W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, Cambridge University Press (1998).